

ПРОСТРАНСТВА С. Л. СОБОЛЕВА

§ 1. Неравенство Фридрикса

Лемма 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область. Тогда существует такая константа C_Ω , что для всех $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ верно неравенство Фридрикса

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.1)$$

Доказательство.

1. Докажем сначала это неравенство для бесконечно гладких функций u с носителем, вложенным в область Ω . Очевидно, продолжив любую из таких функций нулём всюду вне Ω , получим бесконечно гладкую функцию на всём \mathbb{R}^N . Пусть $a = \inf\{x_N \mid x \equiv (x_1, \dots, x_N) \in \Omega\}$, $b = \sup\{x_N \mid x \in \Omega\}$. Тогда, очевидно, для каждой из рассматриваемых функций и любой точки $x \equiv (x_1, \dots, x_N)$ верно (с учётом неравенства Коши — Буняковского)

$$\begin{aligned} |u(x_1, \dots, x_N)|^2 &= \left| \int_a^{x_N} \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_{N-1}, t) dt \right|^2 \leq \\ &\leq \int_a^{x_N} 1^2 dt \cdot \int_a^{x_N} \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_{N-1}, t) \right|^2 dt \leq \\ &\leq d(\Omega) \int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial x_N}(x_1, \dots, x_{N-1}, t) \right|^2 dt \leq \\ &\leq d(\Omega) \int_a^b |\nabla u(x_1, \dots, x_{N-1}, t)|^2 dt, \end{aligned}$$

где $d(\Omega)$ — диаметр области Ω . Интегрируя по области Ω , имеем

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq d(\Omega) \int_a^b dx_N \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx_1 \dots dx_{N-1} \left(\int_a^b |\nabla u(x_1, \dots, x_{N-1}, t)|^2 dt \right) = \\ &= d(\Omega) \int_a^b dx_N \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx_1 \dots dx_{N-1} \int_a^b |\nabla u(x_1, \dots, x_{N-1}, t)|^2 dt \right) \leq \\ &\leq d^2(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Итак, для бесконечно гладких функций с носителем внутри Ω выполняется (1.1) с $C_\Omega = d(\Omega)$.

2. Рассмотрим общий случай произвольной функции $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. По самому определению пространства $W_0^{1,2}(\Omega)$ функции, рассмотренные в п. 1 доказательства, плотны в нём. Поэтому существует последовательность $\{u_k\}$ такая, что

$$\|u - u_k\|_{W_0^{1,2}(\Omega)} \rightarrow 0. \quad (1.2)$$

Легко видеть, что и левая, и правая части неравенства Фридрихса мажорируются нормой в $W_0^{1,2}(\Omega)$, поэтому в силу (1.2) и неравенства треугольника имеем $\|u_k\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\nabla u_k\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$. А поскольку (1.1) с общей константой C_Ω выполнено для всех u_k , то это неравенство выполнено и для u с той же константой.

Лемма доказана.

Следствие 1. Неравенство Фридрихса позволяет ввести на пространстве $W_0^{1,2}(\Omega)$ (где Ω — ограниченная область) эквивалентную норму

$$\|u\|'_{W_0^{1,2}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \equiv \sqrt{\int_{\Omega} \sum_{n=1}^N \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 dx},$$

что удобно в тех задачах математической физики, где старшая часть эллиптического дифференциального оператора представляет собой оператор Лапласа. (См. л 4 настоящей лекции и: Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.)

§ 2. Ортогональные дополнения в соболевских пространствах

ПРИМЕР 1. Рассмотрим ортогональное дополнение к множеству (здесь и далее используется обозначение $H^1 \equiv W^{1,2}$)

$$\left\{ y \in H^1[a; b], \int_a^b y(x) dx = 0 \right\}.$$

□ Действительно,

1. Заметим прежде всего, что L — замкнутое подпространство в $H^1[a; b]$. Действительно, если $\|y_n - y\|_{H^1[a; b]} \rightarrow 0$, то с помощью неравенства Коши—Буняковского получаем

$$\left| \int_a^b (y_n - y) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b (y_n - y)^2 dx} \cdot \sqrt{b - a} \leq \|y_n - y\|_{H^1[a; b]} \sqrt{b - a} \rightarrow 0.$$

2. Построим ортогональное дополнение в $H^1[a; b]$ к подпространству L . Для этого заметим, что оператор

$$Q : z(x) \mapsto z(x) - \frac{1}{b - a} \int_a^b z(x) dx$$

является ортопроектором на L . В самом деле, очевидно, что Q — проектор (т. е. $Q^2 = Q$) и что его образ совпадает с L . ($\text{Im } Q \subset L$, как можно проверить; $\text{Im } Q \supset L$, поскольку функции из L оператор Q оставляет без изменений.)

3. Осталось доказать, что Q — самосопряжённый оператор. Имеем при произвольных $z(x), w(x) \in H^1[a; b]$:

$$\begin{aligned} (z, Qw)_{H^1[a; b]} &= \int_a^b [z(x) \cdot (Qw)(x) + z'(x) \cdot (Qw)'(x)] dx = \\ &= \int_a^b \left[z(x) \left(w(x) - \frac{1}{b - a} \int_a^b w(t) dt \right) + \right. \\ &\quad \left. + z'(x) \left(w(x) - \frac{1}{b - a} \int_a^b w(t) dt \right)' \right] dx = \\ &= \int_a^b [z(x)w(x) + z'(x)w'(x)] dx - \frac{1}{b - a} \int_a^b w(t) dt \int_a^b z(x) dx; \\ (Qz, w)_{H^1[a; b]} &= \int_a^b [(Qz)(x) \cdot w(x) + (Qz)'(x) \cdot w'(x)] dx = \\ &= \int_a^b \left[\left(z(x) - \frac{1}{b - a} \int_a^b z(t) dt \right) w(x) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(z(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b z(t) dt \right)' w'(x) dx = \\
& = \int_a^b [z(x)w(x) + z'(x)w'(x)] dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b z(t) dt \int_a^b w(x) dx.
\end{aligned}$$

4. Итак, $(z, Qw)_{H^1[a;b]} = (Qz, w)_{H^1[a;b]}$. Но если Q — ортопроектор на L , то

$$L^\perp = \text{Im}(I - Q) = \left\{ \frac{1}{b-a} \int_a^b z(x) dx \mid z(x) \in H^1[a; b] \right\}.$$

Нетрудно видеть, что в L^\perp содержатся все константы и только они. Итак, L^\perp состоит в точности из всех элементов $H^1[a; b]$, имеющих представителя-константу. \square

ПРИМЕР 2. Рассмотрим ортогональное дополнение к множеству

$$L = \{y \in H^1[a; b], y(a) = y(b) = 0\}.$$

Такое условие ставится корректно, поскольку, как следует из первой теоремы вложения (см. лекцию основного курса), каждая функция из $H^1[a; b]$ имеют непрерывный представитель.

\square

1. Заметим, что L — замкнутое подпространство в $H^1[a; b]$. Это верно в силу непрерывности вышеупомянутого вложения, т. е. оценки $\|y(x)\|_{C[a;b]} \leq C \|y(x)\|_{H^1[a;b]}$ с некоторой константой C , общей для всех функций $y \in H^1[a; b]$. Действительно, из $\|y_n - y\|_{H^1[a;b]} \rightarrow 0$ следует $\|y_n - y\|_{C[a;b]} \rightarrow 0$, а поэтому если $y_n(a) = y_n(b) = 0$, то $y(a) = y(b) = 0$.

2. Для построения ортогонального дополнения L^\perp подпространства L рассмотрим сначала достаточно гладкие функции (скажем, $z \in C^2[a; b]$). Выбирая y равными всевозможным гладким функциям из L , имеем

$$0 = \int_a^b (yz + y'z') dx = \int_a^b (yz - yz'') dx + yz' \Big|_{x=a}^{x=b} = \int_a^b (yz - yz'') dx, \quad (2.1)$$

где внеинтегральные члены при интегрировании по частям равны нулю в силу условия $y(a) = y(b) = 0$. В силу основной леммы вариационного исчисления из (2.1) имеем $z - z'' = 0$, или

$$z = C_1 e^x + C_2 e^{-x}. \quad (2.2)$$

3. Итак, все C^2 -гладкие функции из L^\perp образуют линейную оболочку функций e^x, e^{-x} . Остаётся вопрос, нет ли в L^\perp негладких

функций, не входящих в (2.2). Можно опираться на задачу 8 и заметить, что подпространство L задано как ядро линейного оператора $A(y) = (y(a), y(b))^T$, $A : H_0^1(a; b) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Тогда можно утверждать, что $\dim L^\perp = \dim \text{Im } A = 2$, откуда следует, что никаких элементов, линейно независимых с e^x , e^{-x} , в пространстве L^\perp нет.

4. Заметим, что мы только что описали отличие $H_0^1(\Omega)$ от $H^1(\Omega)$ в случае $\Omega = (a; b)$. \square

Замечание 1. Может показаться, что если гладкие функции плотны в $H_0^1(a; b)$, то они плотны в любом его подпространстве. На самом деле аргумент этого утверждать нельзя: подпространство банахова пространства B может даже вовсе не пересекаться с множеством, всюду плотным в B . Простой пример: прямая $y = \sqrt{2}x$ не пересекается с всюду плотным на плоскости множеством $(\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \setminus \{(0, 0)\}$.

§ 3. Пример неограниченной функции из $W^{1,2}(\Omega)$

Как было отмечено выше, из первой теоремы вложения следует, что при размерности пространства $N = 1$ для функций из $W_0^{1,2}(\Omega)$ гарантируется существование непрерывного представителя. В случае высших размерностей это уже не так, что нетрудно продемонстрировать на примере функции

$$u(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad \varepsilon \in (0; 1/2), \quad (3.1)$$

которую нельзя сделать непрерывной никаким переопределением на множестве меры нуль. Для определённости будем рассматривать область Ω , представляющую собой единичную сферу с центром в начале координат, и докажем, что функция (3.1) принадлежит пространству $W^{1,2}(\Omega)$.

С помощью частного признака сравнения несобственных интегралов легко видеть, что эта функция принадлежит $L^2(\Omega)$, т. к. $\varepsilon < 1/2 < 3$. Осталось доказать, что её частные производные по переменным x , y , z

- 1) принадлежат $L^2(\Omega)$;
- 2) действительно являются её обобщёнными производными.

Первый факт доказывается просто. Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\varepsilon \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}, \quad \left| \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \right|^2 \leq \frac{r^2}{r^{4+2\varepsilon}} \leq \frac{1}{r^{2+2\varepsilon}},$$

где мы воспользовались сферическими координатами. В силу $2 + 2\varepsilon < 3$ полученная оценка показывает, что производная u_x принадлежит $L^2(\Omega)$. Аналогичная оценка имеет место и для остальных производных. Второй факт рекомендуется доказать самостоятельно (см. задачу 4), используя технику «вырезания особенности», подобно тому,

как это было сделано при рассмотрении фундаментального решения в лекции 5г.

§ 4. Пространства Соболева с отрицательными индексами

Напомним, что пространства с отрицательными индексами определяются как сопряжённые к соответствующим «обычным» пространствам:

$$W^{-k,p'}(\Omega) = \left(W_0^{k,p}(\Omega)\right)', \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Введя эти пространства, можно рассматривать дифференциальные операторы, определённые на всём исходном пространстве Соболева. Для примера рассмотрим пространство $H_0^1[a; b]$ с «усечённым» скалярным произведением

$$(u, v)_{H_0^1[a; b]} = \int_a^b u'(x)v'(x) dx \quad (4.1)$$

и пространство

$$H^{-1}[a; b] = \left(H_0^1[a; b]\right)'.$$

Это позволяет определить оператор второй производной

$$D^2 : H_0^1[a; b] \rightarrow H^{-1}[a; b]$$

следующим образом: пусть при каждом $u \in H_0^1[a; b]$ элемент $w \equiv D^2u \in \left(H_0^1[a; b]\right)'$ есть ограниченный линейный функционал, действующий по правилу

$$\langle w, v \rangle = - \int_a^b u'(x)v'(x) dx, \quad (4.2)$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скобки двойственности между $H_0^1[a; b]$ и $H^{-1}[a; b]$. Легко видеть, что правая часть соотношения (4.2) действительно задаёт ограниченный линейный функционал на $H_0^1[a; b]$, поэтому такое определение корректно. Его мотивировка также понятна: если $u \in C^2[a; b]$, то из (4.2) с помощью интегрирования по частям с учётом граничных условий получаем:

$$\langle w, v \rangle = - \int_a^b u'(x)v'(x) dx = \int_a^b u''(x)v(x) dx,$$

то есть для $u \in C^2[a; b]$ функционал w представляется в виде

$$\langle w, v \rangle = \int_a^b U(x)v(x) dx,$$

где $U(x) = u''(x)$, причём функция $U(x)$ не может быть равна никакой другой непрерывной функции (почему?).

Вычислим теперь норму w как элемента $H^{-1}[a; b]$. По определению нормы функционала с учётом выбранного в $H_0^1[a; b]$ скалярного произведения (4.1) имеем

$$\|w\| = \sup_{v \neq \emptyset} \frac{\left| \int_a^b u'v' dx \right|}{\|v\|_{H^1[a; b]}} \leq \sup_{v \neq \emptyset} \frac{\sqrt{\int_a^b (u')^2 dx} \cdot \sqrt{\int_a^b (v')^2 dx}}{\sqrt{\int_a^b (v')^2 dx}} = \|u\|_{H^1[a; b]},$$

причём, как показывает выбор $v = u$, равенство достигается. Итак,

$$\|D^2u\|_{H^{-1}[a; b]} = \|u\|_{H^1[a; b]},$$

и на первый взгляд трудно вычисляемая норма в «странном» пространстве оказывается очевидной в том случае, где она естественным образом возникает. (Пример подобной трактовки производных см., напр.: Корпусов М. О. Разрушение в неклассических волновых уравнениях. М.: Либроком, 2010. С. 173—190, особ. замечание 1 на с. 177.)

В данном случае мы привели пример элемента $w \in H^{-1}[a; b]$ как результата применения дифференциального оператора. Оказывается, все элементы пространств с отрицательными индексами носят подобный характер. Именно, верна

Теорема 1. (См.: Свешников А. Г., Корпусов М. О. Нелинейный функциональный анализ и математическое моделирование в физике. Т. 1. Геометрические и топологические свойства линейных пространств. М: Красанд, 2011. С. 324, теорема 34.) *Всякий элемент $f^* \in W^{-k, p'}(\Omega)$ может быть представлен в виде*

$$f^* = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha g_\alpha(x), \quad \text{где } g_\alpha(x) \in L^{p'}(\Omega).$$

Рекомендуется сравнить этот результат с теоремой о представлении обобщённых функций из $\mathcal{D}'(\Omega)$.

§ 5. Применение пространств Соболева

Рассмотрим на примере простой ситуации, как можно провести исследование линейной задачи математической физики с использованием несколько другого подхода, чем изложен в предыдущем параграфе. Он не требует введения пространств отрицательного индекса, но существенно опирается на факты из теории гильбертовых пространств.

Рассмотрим краевую задачу Дирихле

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f, & f \in L^2(\Omega), \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (5.1)$$

с числовым параметром $\lambda \in \mathbb{C}$ в ограниченной области Ω .

Известно, что существование классического решения этой задачи, вообще говоря, нельзя гарантировать без требования гёльдеровости правой части f и некоторых условий гладкости на границу области. (См., напр.: Гилбарг Д., Трудингер М. Эллиптические уравнения с частными производными второго порядка.) Однако можно ослабить требования и искать обобщённое решение в смысле Соболева, т. е. элемент $u \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющий задаче (5.1) в некотором обобщённом смысле.

Чтобы обеспечить «обратную совместимость», т. е. гарантировать, что классическое решение (если оно существует) удовлетворяет обобщённой задаче, поступим при построении последней следующим образом. Умножим уравнение из (5.1) на \bar{w} , где w — произвольная функция из $C_0^2(\Omega)$, черта означает комплексное сопряжение. После интегрирования по частям получим:

$$(u, w)_{H_0^1(\Omega)} + \lambda(u, w)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2},$$

где учтены граничные условия $w \in C_0^2(\Omega)$ и выбор «усечённого» скалярного произведения в $H_0^1(\Omega)$. (В данном параграфе мы используем комплексные пространства; при этом скалярные произведения выбираем линейными по первому аргументу и сопряжённо-линейными по второму.)

Заметим теперь, что в силу плотности множества $C_0^2(\Omega)$ (и даже $C_0^\infty(\Omega)$) в пространстве $H_0^1(\Omega)$ можно заменить $w \in C_0^2(\Omega)$ на $w \in H_0^1(\Omega)$ (проведите эти рассуждения самостоятельно; аналогичное уже было сделано выше). В итоге получаем задачу

$$\begin{cases} \forall w \in H_0^1(\Omega) & (u, w)_{H_0^1(\Omega)} + \lambda(u, w)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2}, \\ & u \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad (5.2)$$

где условие $u \in H_0^1(\Omega)$ задаёт не только функциональное пространство, в котором ищется решение, но и граничные условия.

Как мы покажем, результаты относительно разрешимости задачи (5.2) непосредственно следуют из теории вполне непрерывных линейных операторов.

Для этого перепишем задачу (5.2) в операторном виде. Заметим, что при $f \in L^2(\Omega)$, $w \in H_0^1(\Omega)$ выражения

$$(f, w)_{H_0^1(\Omega)} \quad \text{и} \quad (u, w)_{L^2(\Omega)}$$

задают соответственно сопряжённо-линейный функционал и полуторалинейную форму в $H_0^1(\Omega)$ (проверьте это, пользуясь нашим определением скалярного произведения в $H_0^1(\Omega)$ и информацией из параграфа 0).

Поэтому в силу теорем Рисса—Фреше (о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве) и Лакса—Мильграма (о представлении полуторалинейной формы) для случая комплексного гильбертова пространства можно утверждать, что существуют такие функция $F \in H_0^1(\Omega)$ и линейный ограниченный оператор $A : H_0^1(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$, что

$$\forall v, w \in H_0^1(\Omega) \quad (v, w)_{L^2(\Omega)} = (Av, w)_{H_0^1(\Omega)}, \quad (f, w)_{L^2(\Omega)} = (F, w)_{H_0^1(\Omega)}. \quad (5.3)$$

Тогда (5.2) можно переписать в виде

$$\forall w \in H_0^1(\Omega) \quad (u, w)_{H_0^1(\Omega)} + \lambda(Au, w)_{H_0^1(\Omega)} = (F, w)_{H_0^1(\Omega)}, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

В силу произвольности $w \in H_0^1(\Omega)$ и свойств скалярного произведения последнее равенство эквивалентно задаче

$$(E + \lambda A)u = F, \quad u \in H_0^1(\Omega). \quad (5.4)$$

Из (5.4) сразу видно, что при $\lambda = 0$ (уравнение Пуассона) решение существует и единственно, $u = F$. (Конечно, не стоит удивляться «лёгкости» получения этого результата: во-первых, мы использовали мощные результаты теории гильбертовых и соболевских пространств, а во-вторых, мы рассматриваем обобщённые, «ослабленные» решения.) Рассмотрим случай $\lambda \neq 0$.

Докажем, что оператор A является вполне непрерывным.

□ Для этого (см. задачу 9) докажем, что он переводит любую слабо сходящуюся последовательность в сильно сходящуюся. Итак, пусть $v_n \rightharpoonup v$ в $H_0^1(\Omega)$. Тогда, во-первых, $v_n \rightarrow v$ в $L^2(\Omega)$ в силу теорем о компактных вложениях, а во-вторых, $Av_n \rightharpoonup Av$ в $H_0^1(\Omega)$, поскольку (см. задачи к лекции 6а—7а) непрерывный оператор непрерывен и в смысле слабой сходимости. Снова используя теорему о компактном вложении, получаем $Av_n \rightarrow Av$ в $L^2(\Omega)$. Далее, с учётом определения оператора A (см. (5.3)) имеем

$$\begin{aligned} (Av_n - Av, Av_n - Av)_{H_0^1(\Omega)} &= (v_n - v, Av_n - Av)_{L^2(\Omega)} = \\ &= (v_n, Av_n)_{L^2(\Omega)} - (v_n, Av)_{L^2(\Omega)} - (v, Av_n)_{L^2(\Omega)} + (v, Av)_{L^2(\Omega)} \rightarrow \\ &\rightarrow (v, Av)_{L^2(\Omega)} - (v, Av)_{L^2(\Omega)} - (v, Av)_{L^2(\Omega)} + (v, Av)_{L^2(\Omega)} = 0, \end{aligned}$$

где мы использовали непрерывность скалярного произведения по отдельным аргументам и по их совокупности. Итак, $Av_n \rightarrow Av$ в $H_0^1(\Omega)$, что и требовалось. □

Установим также, что оператор A самосопряжён. Имеем

$$(Av, w)_{H_0^1(\Omega)} = (v, w)_{L^2(\Omega)} = \overline{\overline{(w, v)_{L^2(\Omega)}}} = \overline{(Aw, v)_{H_0^1(\Omega)}} = (v, Aw)_{H_0^1(\Omega)}.$$

Теперь дальнейшие результаты следуют из теории вполне непрерывных самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. (См., напр.: Волков В. Т., Ягола А. Г. Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Курс лекций.) Мы получаем:

- 1) существует не более чем счётное число значений $\lambda = \lambda_k$ с единственной предельной точкой $\lambda = \infty$, для которых задача (5.4) имеет нетривиальное решение при $f \equiv 0$;
- 2) все такие значения (которыми мы будем называть собственными значениями задачи Дирихле для оператора Лапласа в области Ω) действительны;
- 3) при $\lambda \neq \lambda_k$ задача (5.4) имеет единственное решение.

Можно рассмотреть и случай более общего эллиптического оператора. Если он будет содержать и производные первого порядка, то оператор, роль которого в нашем рассуждении играет A , окажется, вообще говоря, несамосопряжённым (см., например, упомянутую выше книгу Ладыженской О. А.) и придётся использовать более общую теорию вполне непрерывных (компактных) операторов (см., напр.: Арсеньев А. А. Лекции по функциональному анализу для начинающих специалистов по математической физике. М.—Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика, 2011).

§ 6. Задачи для самостоятельного решения

Задача 0. Ответить на вопросы по тексту.

Задача 1*. Улучшить константу в неравенстве Фридрикса, используя (с обоснованием!) экстремальное свойство первой собственной функции задачи Дирихле для оператора Лапласа. Показать на примере, что новая оценка действительно лучше (а по её смыслу, очевидно, является неулучшаемой).

Задача 2*. Доказать неравенство Фридрикса для неограниченных областей Ω , «вложенных в слой», т. е. таких, что для некоторой координаты x_k существуют такие d_1 и d_2 , что $d_1 \leq \inf_{x \in \Omega} x_k \leq d_2$.

Задача 3. Для пространства $H_0^1(-1; 1)$ с «усечённым» скалярным произведением указать «представление дельта-функции», т. е. найти такую функцию $y(x) \in H_0^1(-1; 1)$, что

$$\forall z(x) \in H_0^1(-1; 1) \quad (y, z)_{H_0^1} = z(0), \quad (y, z)_{H_0^1} = \int_{-1}^1 y'(x) z'(x) dx.$$

Задача 4. Завершить рассмотрение примера с $u(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)^{\varepsilon/2}$, доказав, что частные производные этой функции, существующие почти всюду в единичном шаре, являются обобщёнными производными этой функции в смысле Соболева. (Указание: необходимую для этого формулу «интегрирования по ча-

стям» можно получить из формулы Остроградского — Гаусса, применяя последнюю к вектор-функции $\{u(x)\varphi(x); 0; 0\}$.)

Задача 5. Доказать, что функция-«ступенька»

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 1), \\ 1, & x \in [1; 2] \end{cases}$$

имеет классическую производную всюду, кроме одной точки, но не имеет обобщённой производной в смысле С. Л. Соболева. (Ср. с результатом предыдущей задачи!)

Задача 6. Перенести рассуждения л 4 на случай более общего эллиптического оператора

$$Du = \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^N b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

сформулировав некоторые условия на коэффициенты a_{ij} , b_i , c .

Задача 7*. Доказать, что семейство собственных значений задачи Дирихле для оператора Лапласа всегда счётно (тогда как общая теория вполне непрерывных самосопряжённых операторов гарантирует лишь не более чем счётное количество характеристических чисел).

Задача 8*. Назовём факторпространством B/L банахова пространства B по его (замкнутому) подпространству L линейное пространство классов эквивалентности элементов пространства B , где $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x - y \in L$. Размерность пространства B/L называется коразмерностью подпространства L и обозначается $\text{codim } L$.

1) Завершить определение, доказав, что введённое отношение действительно является отношением эквивалентности, и введя на B/L линейные операции. Доказать, что полученное пространство действительно является линейным.

2) Пусть $A : B_1 \rightarrow B_2$ — линейный оператор, определённый на всём пространстве B_1 . Доказать, что

$$\text{codim } \ker A \equiv \dim(B_1 / \ker A) = \dim \text{Im } A.$$

(Размерности могут быть и бесконечными!)

3) Доказать, что в гильбертовом пространстве $\text{codim } L = \dim L^\perp$.

Задача 9. Доказать, что для линейного оператора A , действующего в гильбертовом пространстве, достаточным условием полной непрерывности является следующее: для любой последовательности $\{x_n\}$ слабая сходимость $x_n \rightharpoonup x$ влечёт сильную сходимость $Ax_n \rightarrow Ax$. Указание. Учсть, что в рефлексивном банаховом пространстве из любой ограниченной последовательности можно извлечь слабо сходящуюся.