Классические ортогональные полиномы дискретной переменной.

Рассмотрим обобщение классических ортогональных полиномов — классические ортогональные полиномы дискретной переменной. Они получили широкое применение при составлении эффективных разностных схем для ряда уравнений математической физики, при статистической обработке результатов измерений, вычислении сумм вида $\sum_i \rho(z_i) f(z_i)$ для заданной функции $\rho(z)$ по квадратурным формулам типа Гаусса.

1. Разностный аналог уравнения гипергеометрического типа.

Рассмотрим разностный аналог уравнения

$$\sigma y'' + \tau y' + \lambda y = 0 \qquad (1.1)$$

Заменяя в нем производные конечными разностями, получаем:

$$\sigma(z)\frac{y(z+h)-2y(z)+y(z-h)}{h^2} + \tau(z)\frac{y(z+h)-y(z)}{h} + \lambda y(z) = 0,$$

где h - некоторая постоянная (шаг сетки). Если ввести новую переменную z': $z = hz'$, то уравнение (1.1) примет вид:

$$\frac{\sigma(hz')}{h^2}\left(y(h(z'+1)) - 2y(hz') + y(h(z'-1))\right) + \frac{\tau(hz')}{h}\left(y(h(z'+1)) - y(hz')\right) + \lambda y(hz') = 0$$

Далее для краткости будем использовать обозначения:

$$\tilde{\sigma}(z') = \frac{\sigma(hz')}{h^2}; \quad \tilde{\tau}(z') = \frac{\tau(hz')}{h}, \quad \tilde{y}(z') = y(hz'),$$

а также: $\Delta f(z') = f(z'+1) - f(z')$; $\nabla f(z') = f(z') - f(z'-1)$

Если для сокращения записи далее вместо z' использовать обозначение z, то уравнению (1.1) в соответствие можно поставить разностное ур-ие

$$\sigma(z)\Delta\nabla y + \tau(z)\Delta y + \lambda y = 0 \qquad (1.2)$$

Заметим, что $$\Delta\nabla y = \Delta\left(y(z) - y(z-1)\right) = y(z+1) - 2y(z) + y(z-1) = \nabla\Delta y \qquad (1.3)$$

$$\Delta f(z) = \nabla f(z+1) \qquad (1.4)$$

$$\Delta[f(z)g(z)] = f(z)\Delta g(z) + g(z+1)\Delta f(z) \qquad (1.5)$$

Пусть $z_0 = a$, $z_{i+1} = z_i + 1$, $i = 0, 1, \dots, I$, $z_I = b$. Тогда из (1.5) следует, что

$$\sum_{i=0}^{I-1} f(z_i)\Delta g(z_i) = f(z)g(z)\Big|_a^b - \sum_{i=0}^{I-1} g(z_{i+1})\Delta f(z_i) \qquad (1.6)$$

Для произвольного полинома $q_m(z)$ степени m выражения $\Delta q_m(z)$ и $\nabla q_m(z)$ будут полиномами степени $m-1$:

$$q_m(z)=a_m z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\dots+a_0 \qquad \overbrace{\qquad\qquad}^{\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_k^m z^k}$$

$$\Delta q_m=q_m(z+1)-q_m(z)=a_m\Big[\underbrace{(z+1)^m}_{\sum\limits_{k=0}^{m} C_k^m z^k}-z^m\Big]+a_{m-1}\Big[\underbrace{(z+1)^{m-1}}_{\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_k^{m-1} z^k}-z^{m-1}\Big]+\dots+$$

$$+a_1\big[(z+1)-z\big]=a_m\cdot\sum_{k=0}^{m-1}C_k^m z^k+a_{m-1}\sum_{k=0}^{m-2}C_k^{m-1}z^k+\dots+a_1=a_m m z^{m-1}+\dots$$

$$\nabla q_m=a_m\Big[z^m-\sum_{k=0}^{m}C_k^m z^k(-1)^{m-k}\Big]+a_{m-1}\Big[z^{m-1}-\sum_{k=0}^{m-1}C_k^{m-1}z^k(-1)^{m-1-k}\Big]+\dots+$$

$$+a_1\big[z-[z-1]\big]=$$

$$=a_m\sum_{k=0}^{m-1}C_k^m z^k(-1)^{m+1-k}+a_{m-1}\sum_{k=0}^{m-2}C_k^{m-1}z^k(-1)^{m-k}+\dots+a_1=a_m m z^{m-1}+\dots+a_1$$

При этом $\Delta^m q_m(z)=\nabla^m q_m(z)=q_m^{(m)}(z)$.

$$\Delta^2 q_m(z)=a_m m(m-1)z^{m-2}+\dots+a_2\Rightarrow\dots\Rightarrow\Delta^m q_m=a_m\cdot m!=q_m^{(m)}(z)$$

$$\nabla^2 q_m(z)=a_m\cdot m(m-1)z^{m-2}+\dots+a_2\Rightarrow\dots\ \nabla^m q_m=a_m\cdot m!=q_m^{(m)}(z)$$

Покажем прежде всего, что $v_1(z)=\Delta y(z)$ удовлетворяет разностному уравнению типа (1.2). Применим операцию Δ к обеим частям (1.2):

$$\Delta\{\sigma(z)\nabla\Delta y(z)+\tau(z)\Delta y(z)+\lambda y(z)\}=0\Leftrightarrow\Delta\sigma(z)\underbrace{\nabla\Delta y(z+1)}_{\Delta\nabla y(z+1)=\Delta\underbrace{\Delta y(z)}_{v_1(z)}}+\sigma(z)\Delta\nabla\underbrace{\Delta y(z)}_{v_1(z)}+$$

$$+\Delta\tau(z)\underbrace{\Delta y(z)}_{v_1(z)}+\tau(z+1)\Delta\underbrace{\Delta y(z)}_{v_1(z)}+\lambda\underbrace{\Delta y(z)}_{v_1(z)}=0$$

$$\sigma(z)\Delta\nabla v_1(z)+\underbrace{\big(\Delta\sigma(z)+\tau(z+1)\big)}_{\tau_1(z)}\Delta v_1(z)+\big(\underbrace{\lambda+\Delta\tau(z)}_{\mu_1}\big)v_1(z)=0 \qquad (1.7)$$

Здесь $\tau_1(z)$ – полином не выше первой степени, μ_1 – число, т.е. $v_1(z)$ удовлетворяет уравнению того же типа, что и $y(z)$. Справедливо и обратное утверждение: любое решение уравнения (1.7) при $\lambda\neq0$ можно представить в виде $v_1(z)=\Delta y(z)$, где $y(z)$ – некоторое решение уравнения (1.2), которое выражается через v_1 следующим образом:

$$y(z)=-\frac{1}{\lambda}\big[\sigma(z)\nabla v_1+\tau(z)v_1\big].$$

Применяя последовательно операцию Δ к уравнению (1.7) и следующим из него уравнениям типа (1.2), получим для $v_n(z) = \Delta^n y(z)$ разностное уравнение гипергеометрического типа:

$$\sigma(z)\Delta\nabla v_n(z) + \tau_n(z)\Delta v_n(z) + \mu_n v_n(z) = 0, \qquad (1.8)$$

где
$$\begin{cases} \tau_n(z) = \tau_{n-1}(z+1) + \Delta\sigma(z), \\ \tau_0(z) = \tau(z) \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_n = \mu_{n-1} + \Delta\tau_{n-1}(z). \\ \mu_0 = \lambda \end{cases} \qquad (1.9)$$

При этом любое решение уравнения (1.8) при $\mu_k \neq 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, можно представить в виде $v_n(z) = \Delta^n y(z)$, где $y(z)$ - некоторое решение уравнения (1.2). Выразим μ_n в явном виде:

$$\Delta\tau_n = \Delta\tau_{n-1} + \Delta^2\sigma = \Delta\tau_{n-2} + 2\Delta^2\sigma = \dots = \Delta\tau + n\Delta^2\sigma \Rightarrow$$

$$\mu_n = \underbrace{[\mu_n - \mu_{n-1}] + [\mu_{n-1} - \mu_{n-2}] + [\mu_{n-2} - \mu_{n-3}] + \dots + [\mu_1 - \mu_0]}_{\sum_{k=1}^{n}(\mu_k - \mu_{k-1})} + \mu_0 = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{(\mu_k - \mu_{k-1})}_{\Delta\tau_{k-1}} + \mu_0$$

$$= \sum_{k=1}^{n}(\Delta\tau + (k-1)\Delta^2\sigma) + \mu_0 = \underbrace{\mu_0}_{\lambda} + n\underbrace{\Delta\tau}_{\tau'} + \underbrace{\Delta^2\sigma}_{\sigma''}\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(k-1)}_{} = \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''.$$

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\nabla\frac{k^2}{2} - \frac{1}{2}\right] = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Итак, $\mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$ (1.10). $\quad \frac{k^2 - (k-1)^2}{2} = \frac{2k-1}{2}$

Получим явное выражение для $\tau_n(z)$:

$$\tau_n(z) = \tau_{n-1}(z+1) + \Delta\sigma(z) = \tau_{n-1}(z+1) + \sigma(z+1) - \sigma(z) = \tau_{n-2}(z+2) + \sigma(z+2) - \cancel{\sigma(z+1)} +$$
$$+ \cancel{\sigma(z+1)} - \sigma(z) = \dots = \tau(z+n) + \sigma(n+z) - \sigma(z). \qquad (1.11)$$

2. Формула Родрига.

{в диф. ур.: $\tau_n = \tau + n\sigma'$}

Если $\mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 0$, то соответствующее уравнение (1.8) имеет частное решение $v_n(z) = \mathrm{const}$, а значит ур-ие (1.2) при $\lambda = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$ имеет частное решение $y_n(z)$, представляющее собой полином степени n. Получим для него явное выражение. Для этого уравнения (1.2) и (1.8) запишем в самосопряженном виде:

$$\Delta(\sigma\rho\nabla y) + \lambda\rho y = 0 \qquad (1.12)$$

$$\Delta(\sigma\rho_n\nabla v_n) + \mu_n\rho_n v_n = 0 \qquad (1.13)$$

Для этого функции $\rho(z)$ и $\rho_n(z)$ должны удовлетворять разностным уравнениям:

$$\Delta(\sigma\rho) = \tau\rho\,; \qquad \Delta(\sigma\rho_n) = \tau_n\rho_n \qquad (1.14)$$

Из (1.14) и (1.9) получаем:

$$\frac{\Delta(\sigma(z)\rho_n(z))}{\rho_n(z)} = \tau_n(z) = \tau_{n-1}(z+1) + \Delta\sigma(z) = \frac{\Delta(\sigma(z+1)\rho_{n-1}(z+1))}{\rho_{n-1}(z+1)} + \Delta\sigma(z)$$

$$\frac{\sigma(z+1)\rho_n(z+1) - \cancel{\sigma(z)\rho_n(z)}}{\rho_n(z)} = \frac{\sigma(z+2)\rho_{n-1}(z+2) - \cancel{\sigma(z+1)\rho_{n-1}(z+1)}}{\rho_{n-1}(z+1)} + \cancel{\sigma(z+1)} - \cancel{\sigma(z)}$$

$$\frac{\rho_n(z+1)}{\rho_n(z)} = \frac{\sigma(z+2)}{\sigma(z+1)}\cdot\frac{\rho_{n-1}(z+2)}{\rho_{n-1}(z+1)} \iff \rho_n(z) = \sigma(z+1)\rho_{n-1}(z+1) \qquad (1.15)$$

Так как $\rho_0(z) = \rho(z)$, то из (1.15) находим:

$$\boxed{\rho_n(z) = \rho(z+n)\prod_{k=1}^{n}\sigma(z+k)} \qquad (1.16) \qquad \left\{ \text{для дифф. ур-ия было: } \rho_n = \sigma^n\rho \right\}$$

$\iff \rho_{n+1}(z) = \rho_n(z+1)\cdot\sigma(z+1)$

Итак, уравнение (1.8) можно записать в виде:

$$\rho_n(z)v_n(z) = -\frac{1}{\mu_n}\Delta\left[\sigma(z)\rho_n(z)\nabla v_n(z)\right] = -\frac{1}{\mu_n}\nabla\Big[\underbrace{\sigma(z+1)\rho_n(z+1)}\,\underbrace{\Delta v_n(z)}_{v_{n+1}(z)}\Big] =$$

$$\sigma(z+1)\rho(z+n+1)\underbrace{\prod_{k=1}^{n}\sigma(z+k+1)}_{\prod_{k'=2}^{n+1}\sigma(z+k')} = \rho(z+n+1)\prod_{k'=1}^{n+1}\sigma(z+k')$$

$$= -\frac{1}{\mu_n}\nabla\left[\rho_{n+1}(z)\,v_{n+1}(v)\right].$$

Следовательно, для $\forall m < n$ получаем:

$$\rho_m v_m = -\frac{1}{\mu_m}\nabla\left[\rho_{m+1}v_{m+1}\right] = \left(-\frac{1}{\mu_m}\right)\left(-\frac{1}{\mu_{m+1}}\right)\nabla^2\left[\rho_{m+2}v_{m+2}\right] = \dots = \frac{A_m}{A_n}\nabla^{n-m}\left[\rho_n v_n\right],$$

где $A_n = (-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\mu_k$, $A_0 = 1$. Если $y = y_n(z)$ — полином степени n, то

$v_n(z) = \text{const}$ $\quad$ ($= a_n\cdot n!$, где a_n — коэфф. при старшей степени в y_n).

Окончательно получаем: $\Delta^m y_n(z) = \frac{A_m \cdot B_n}{\rho_m(z)} \nabla^{n-m}[\rho_n(z)]$, (1.17)

где $B_n = \frac{\Delta^n y_n}{A_n} = \frac{y_n^{(n)}}{A_n} = \frac{n!\, a_n}{A_n}$, где a_n - коэф. при старшей степени в y_n.

Из (1.17) при $m=0$ получаем выражение для полиномов $y_n(z)$:

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} \nabla^n[\rho_n(z)] \qquad (1.18)$$

Соотношение (1.18) является разностным аналогом формулы Родрига для классических ортогональных полиномов. Формулу (1.18) также можно переписать в виде: $\rho_n(z) = \rho(z+n) \prod_{k=\cancel{0}}^{n-1} \sigma(z+k)$

$$y_n(z) = \frac{B_n}{\rho(z)} \Delta^n[\rho_n(z-n)] = \frac{B_n}{\rho(z)} \Delta^n\left[\rho(z) \prod_{k=0}^{n-1} \sigma(z-k)\right]. \qquad (1.19)$$

3. Свойство ортогональности. $\rho_n(z-n) = \rho(z) \prod_{k=1}^{n} \sigma(z-n+k)$

Рассмотрим уравнения для полиномов $y_n(z)$ и $y_m(z)$:

$$\Delta(\sigma\rho\nabla y_n) + \lambda_n \rho y_n = 0, \quad \Delta(\sigma\rho\nabla y_m) + \lambda_m \rho y_m = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda_m - \lambda_n)\rho y_n y_m = \Delta[\sigma\rho(y_m \nabla y_n - y_n \nabla y_m)]$$

Пусть $z_0 = \frac{a}{h}$, $z_{i+1} = z_i + 1$, $i = 0, \dots, I$, $z_I = \frac{b}{h}$ $\Rightarrow$ {или $z_0 = a$; $z_I = b$, где a и b - целочисл.}.

$$(\lambda_m - \lambda_n) \sum_{i=0}^{I-1} \rho(z_i) y_n(z_i) y_m(z_i) = \sigma\rho \underbrace{(y_m \nabla y_n - y_n \nabla y_m)}_{\text{полином относительно переменной } z} \Big|_{z=a}^{z=b}$$

Если выполнены условия: $\sigma\rho \cdot z^k \Big|_{z=a,\, z=b} = 0$, $k = 0, 1, \dots$, (1.20)

то полиномиальные решения разностного уравнения гипергеометрического типа, отвечающие различным $\lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''$, ортогональны между собой с весом $\rho(z)$:

$$\sum_{i=0}^{I-1} \rho(z_i) y_n(z_i) y_m(z_i) = 0 \qquad (1.2\cancel{1})$$

Величину $d_n^2 = \sum_{i=0}^{I-1} \rho(z_i) y_n^2(z_i)$ назовем квадратом нормы $y_n(z)$.

Из ортогональности полиномов следует рекуррентное соотношение:

$$z\cdot y_n(z) = \alpha_n y_{n+1}(z) + \beta_n y_n(z) + \gamma_n y_{n-1}(z),$$

где $\alpha_n = \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$; $\beta_n = \dfrac{b_n}{a_n} - \dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$; $\gamma_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}\dfrac{d_n^2}{d_{n-1}^2}$, если

$$y_n(z) = a_n\cdot z^n + b_n\cdot z^{n-1} + \ldots$$

Определение: Полиномы $y_n(z)$, для которых интервал (a,b) находится на вещественной оси и функция $\rho(z)$ удовлетворяет ур-ию (1.4) и условию (1.20), называются классическими ортогональными полиномами дискретной переменной.

Условие ортогональности имеет место и для разностных производных классических ортогональных полиномов дискретной переменной. В самом деле, $\Delta y(z)$ удовлетворяет разностному уравнению гипергеометрического типа, в котором $\rho_1(z) = \rho(z+1)\sigma(z+1)$; $\mu_1 = \lambda + n\tau'$, причем

$$\sigma\rho_1(z)\cdot z^k\Big|_{z=a,\,z=b} = \sigma\underbrace{\rho(z+1)\sigma(z+1)}_{\tau(z)\rho(z)+\rho(z)\sigma(z)} z^k\Big|_{z=a,\,z=b} = \sigma\cdot\rho\cdot\underbrace{(\tau(z)+\sigma(z))\cdot z^k}_{\text{полином}}\Big|_{z=a}^{z=b} = 0,$$

$k = 1, 2, \ldots$

Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{I-1}\Delta y_m(z_i)\,\Delta y_n(z_i)\,\rho_1(z_i) = 0, \quad n\neq m$$

Аналогично можно показать, что

$$\sum_{i=0}^{I-1}\Delta^k y_m(z_i)\,\Delta^k y_n(z_i)\,\rho_k(z_i) = 0, \quad n\neq m.$$

4. Полиномы Хана, Чебышева, Мейкснера, Кравчука и Шарлье.

Получим явный вид функции $\rho(z)$: $\Delta(\sigma\rho) = \tau\rho \Rightarrow$

$$\sigma(z+1)\rho(z+1) - \sigma(z)\rho(z) = \tau(z)\rho(z) \Rightarrow \frac{\rho(z+1)}{\rho(z)} = \frac{\sigma(z)+\tau(z)}{\sigma(z+1)}. \qquad (4.1)$$

Рассмотрим решения разностного уравнения

$$\frac{\rho(z+1)}{\rho(z)} = f(z), \quad \text{где } f(z) = f_1(z)\cdot f_2(z) \text{ или } f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

Утверждение: если функции $\rho_1(z)$ и $\rho_2(z)$ являются решениями уравнений:
$$\frac{\rho_1(z+1)}{\rho_1(z)} = f_1(z) \quad \text{и} \quad \frac{\rho_2(z+1)}{\rho_2(z)} = f_2(z),$$
то решением уравнения $\frac{\rho(z+1)}{\rho(z)} = f(z)$

при $f(z) = f_1(z) f_2(z)$ будет функция $\rho(z) = C \cdot \rho_1(z) \cdot \rho_2(z)$, а при $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$ — функция $\rho(z) = C \cdot \frac{\rho_1(z)}{\rho_2(z)}$, где C — произвольная постоянная.

Функция $f(z) = \frac{\tau(z)+\sigma(z)}{\sigma(z+1)}$ является дробно-рациональной, поэтому решение уравнения (4.1) можно выразить через решения разностных уравнений:
$$\frac{\rho(z+1)}{\rho(z)} = \gamma + z \quad (4.2); \quad \frac{\rho(z+1)}{\rho(z)} = \gamma - z \quad (4.3) \quad \text{и} \quad \frac{\rho(z+1)}{\rho(z)} = \gamma, \quad (4.4).$$
где γ — некоторая постоянная. Рассмотрим уравнение (4.2):
$$\gamma + z = \frac{\Gamma(\gamma+z+1)}{\Gamma(\gamma+z)} \Rightarrow \rho(z) = \Gamma(\gamma+z)$$
с точностью до нормировочного множителя.

Аналогично получаем решение уравнения (4.3):
$$\gamma - z = \frac{\Gamma(\gamma-z+1)}{\Gamma(\gamma-z)} = \frac{1}{\Gamma[(\gamma+1)-(z+1)]} : \frac{1}{\Gamma(\gamma-z+1)} \Rightarrow \rho(z) = \frac{1}{\Gamma(\gamma+1-z)}.$$
Наконец, частным решением ур-ия (4.4) является $\rho = \gamma^z$: $\gamma = \frac{\gamma^{z+1}}{\gamma^z}$.

Рассмотрим ряд частных случаев:

1) Пусть $a = 0$, $b = N$, $\sigma(z) = z(N-z)$. Тогда $\sigma(z)+\tau(z) = (\gamma+z)(\delta-z)$, где γ и δ — некоторые постоянные. При этом
$$\frac{\rho(z+1)}{\rho(z)} = \frac{\sigma(z)+\tau(z)}{\sigma(z+1)} = \frac{(\gamma+z)(\delta-z)}{(z+1)(N-1-z)} \Rightarrow \rho(z) = C \cdot \frac{\Gamma(\gamma+z) \cdot \Gamma(N-z)}{\Gamma(z+1)\ \Gamma(\delta+1-z)} \quad (4.5).$$
Если $C>0$, $\gamma>0$, $\delta+1 \geq N$, то $\rho(z) > 0$ и выполнены условия
$$\sigma(z)\rho(z) \cdot z^k \Big|_{z=0}^{z=N} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$
Соответствующие ортогональные полиномы называют полиномами Хана.

В частном случае: $C = 1$, $\gamma = 1$; $\delta + 1 = N$ приходим к полиномам Чебышева дискретной переменной: $t_n(z)$, ортогональным с весом $\rho(z) = 1$

2) Пусть $a=0$, $b=\infty$, $\sigma(z)=z$. Рассмотрим три возможных случая:

$$\sigma(z)+\tau(z)=\begin{cases}\mu(\gamma+z)\\ \mu(\gamma-z)\\ \mu\end{cases}$$, где μ и γ - некоторые постоянные.

Решение уравнения $\frac{\rho(z+1)}{\rho(z)}=\frac{\sigma(z)+\tau(z)}{\sigma(z+1)}$ при этом будет иметь вид:

$$\rho(z)=\begin{cases}C\mu^z\Gamma(\gamma+z)/\Gamma(z+1)\\ C\mu^z/[\Gamma(\gamma+1-z)\cdot\Gamma(z+1)]\\ C\cdot\mu^z/\Gamma(z+1)\end{cases}$$

В первом случае условие $\sigma(z)\cdot\rho(z)\cdot z^k\Big|_{z=0,\ z=\infty}=0$, $k=0,1,\ldots$ выполнено, если $\gamma>0$, $0<\mu<1$. Возьмем $C=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}$:

$$\rho(z)=\frac{\mu^z\cdot(\gamma)_z}{\Gamma(z+1)},\quad\text{где}\quad(\gamma)_z=\frac{\Gamma(z+\gamma)}{\Gamma(\gamma)}.$$

Соответствующие полиномы называются полиномами Мейкснера и обозначаются $m_n(z)$.

Во втором случае условие $\sigma(z)\rho(z)z^k\Big|_{z=0,\ z=\infty}=0$, $k=0,1\ldots$ выполнено, если $\gamma\geq N$; $\mu>0$. Положим $\gamma=N$, $\mu=\frac{p}{q}$ ($p>0$, $q>0$, $p+q=1$), $C=q^N N!$

Тогда $\rho(z)\equiv 0$ при $z_i>N$ ($i>N$), а при $i=0,1,\ldots,N$ для $\rho(z)$ получаем биномиальное распределение:

$$\rho(z_i)=\frac{N!}{(N-z_i)!\,z_i!}p^{z_i}q^{N-z_i}=C_N^i p^i q^{N-i},\quad\text{где}\quad z_i=i,\quad C_N^i=\frac{N!}{i!(N-i)!}$$

Соответствующие полиномы называются полиномами Кравчука и обозначаются $K_n(z)$.

В третьем случае, полагая $C=e^{-\mu}$, приходим к распределению Пуассона:

$$\rho(z_i)=\frac{e^{-\mu}\cdot\mu^i}{i!}$$

Соответствующие ортогональные полиномы дискретной переменной называются полиномами Шарлье $C_n(z)$.

1) Для полиномов Чебышева: $\sigma(z) = z(N-z)$, $\sigma+\tau = (1+z)(N-1-z) =$

$$= N-1-2z + \underbrace{Nz - z^2}_{\sigma} \Rightarrow \tau(z) = N-1-2z.$$

Следовательно, $\lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = 2n + n^2 - n = n(n+1)$, $n = 0, 1, \ldots$

2) Полиномы Мейкснера: $\sigma = z$, $\sigma+\tau = \mu(\gamma+z) \Rightarrow \tau = \mu\gamma + (\mu-1)z \Rightarrow$

$\lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'' = (1-\mu)\cdot n$, $n = 0, 1, \ldots$

3) Полиномы Кравчука: $\sigma = z$, $\sigma+\tau = \frac{p}{q}(N-z) \Rightarrow \tau = -\left(\frac{p}{q}+1\right)z + \frac{pN}{q}$

$\Rightarrow \lambda_n = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''_0 = \frac{n}{q}$, $n = 0, 1, \ldots$

4) Полиномы Шарлье: $\sigma+\tau = \mu \Rightarrow \tau = \mu - z \Rightarrow \lambda_n = -n\tau' = n$, $n = 0, 1, \ldots$

5. Основные характеристики: коэффициенты при старших степенях, квадрат нормы, коэффициенты в рекуррентном соотношении.

5.1. Нормировочные коэффициенты в формуле Родрига

$$B_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n!} & \text{для } t_n(z) \\ \mu^{-n} & \text{для } m_n(z) \text{ и } C_n(z) \\ \frac{(-1)^n}{n!} q^n & \text{для } K_n(z). \end{cases}$$

5.2. Коэффициент при старшей степени полинома.

Пусть $y_n(z) = a_n z^n + b_n z^{n-1} + \ldots + a_0$.

Так как $B_n = \frac{a_n n!}{A_n}$, где $A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k$, $\mu_k = \lambda_n + k\tau' + \frac{k(k-1)}{2}\sigma'' =$

$$= (-n+k)\tau' + \frac{\sigma''}{2}(-n^2+n+k^2-k) = -(n-k)\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right) \Rightarrow$$

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1}(n-k)\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right) = n! \prod_{k=0}^{n-1}\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right).$$

Следовательно:
$$a_n = B_n \cdot \prod_{k=0}^{n-1}\left(\tau' + \frac{n+k-1}{2}\sigma''\right)$$

$t_n(z)$: $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (-2 - (n+k-1)) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (n+k+1) =$

$$= \frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

$m_n(z)$: $a_n = \mu^{-n} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (\mu-1) = (\mu-1)^n \cdot \mu^{-n} = (1-\mu^{-1})^n.$

$c_n(z)$: $a_n = \mu^{-n} \prod_{k=0}^{n-1} (-1) = (-1)^n \mu^{-n}$

$k_n(z)$: $a_n = \frac{(-1)^n}{n!} q^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{n!}.$

Коэффициент b_n можно найти путем сравнения коэффициентов при z^{n-1} в разностном уравнении для $y_n(z)$:

$$\sigma \nabla\Delta y_n + \tau \Delta y_n + \lambda_n y_n = 0$$

$y_n = a_n z^n + b_n z^{n-1} + \dots + a_0 \Rightarrow \Delta y_n = a_n \cdot n z^{n-1} + b_n (n-1) z^{n-2} + \dots$; $\nabla\Delta y_n = a_n n(n-1) z^{n-2} + b_n (n-1)(n-2) z^{n-3} + \dots$

Так как $\sigma(z) = \sigma(0) + \sigma'(0) \cdot z + \frac{\sigma''(0)}{2} z^2$ и $\tau(z) = \tau(0) + \tau' \cdot z$, то, собирая коэффициенты при z^{n-1} в уравнении, получаем:

$$a_n n(n-1)\sigma'(0) + b_n (n-1)(n-2)\frac{\sigma''}{2} + a_n n \tau(0) + b_n (n-1)\tau' - \left[n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''\right] b_n = 0$$

$\frac{b_n}{a_n} = n \frac{(n-1)\sigma'(0) + \tau(0)}{(n-1)\sigma'' + \tau'}$ (можно использовать в рекуррентной формуле).

Это выражение можно преобразовать, воспользовавшись тем, что:

$$\tau_n = \tau_{n-1}(z+1) + \Delta\sigma = \tau(z+n) + n\Delta\sigma = \tau(0) + \tau'(z+n) + n\left[\sigma'(0) + \frac{\sigma''}{2}(1+2z)\right]$$

$$\tau_{n-1}(z) = [\tau(0) + (n-1)\sigma'(0)] + \tau' \cdot (z+n-1) + (n-1)\frac{\sigma''}{2}(1+2z)$$

$$\tau_{n-1}(0) = [\tau(0) + (n-1)\sigma'(0)] + (n-1)\left[\tau' + \frac{(n-1)}{2}\sigma''\right]$$

$$\tau'_{n-1}(z) = \tau' + (n-1)\sigma''$$

$$\frac{b_n}{a_n} = n \frac{\tau_{n-1}(0) - (n-1)\left[\tau' + \frac{(n-1)}{2}\sigma''\right]}{\tau'_{n-1}} = n \frac{\tau_{n-1}(0)}{\tau'_{n-1}} - n(n-1)$$

5.3. Квадрат нормы

$$d_n^2=\sum_{i=0}^{I-1}\rho(z_i)\,y_n^2(z_i)=B_n\sum_i y_n(z_i)\underbrace{\nabla^n[\rho_n(z_i)]}_{\Delta[\nabla^{n-1}\rho_n(z_i-1)]}=B_n\Big\{\underbrace{y_n(z_i)\nabla^{n-1}\rho_n(z_i-1)\Big|_a^b}_{I}-$$

$$-\sum_i \Delta y_n(z_i)\,\nabla^{n-1}\rho_n(z_i)\Big\}.$$

Так как $\nabla^{n-1}\rho_n(z_i-1)=\frac{1}{A_1B_n}\,\sigma(z_i)\rho(z_i)\,\nabla y_n(z_i)$, то $I=0$

$$\Big\{v_1=\Delta y=\frac{B_n}{A_1\rho_1}\nabla^{n-1}\rho_n(z)\iff\nabla y=\Delta y(z_i-1)\Big\}$$

Следовательно, $d_n^2=(-1)^n B_n\sum_{i=0}^{I-1}\underbrace{\Delta^n y_n(z_i)}_{a_n\cdot n!}\rho_n(z_i)=(-1)^n B_n\,a_n\cdot n!\underbrace{\sum_{i=0}^{I-1}\rho_n(z_i)}_{S_n}$

В некоторых случаях квадрат нормы легче вычислить с помощью коэффициентов в рекуррентной формуле

$$\alpha_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}\ ;\ \gamma_n=\underbrace{\frac{a_{n-1}}{a_n}}_{\alpha_{n-1}}\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}\iff\frac{\gamma_n}{\alpha_{n-1}}=\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}\implies d_n^2=d_{n-1}^2\cdot\frac{\gamma_n}{\alpha_{n-1}}=\ldots=d_0^2\prod_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k}{\alpha_{k-1}}$$

Получим выражение для γ_n: $\frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}=-n\frac{B_n}{B_{n-1}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{S_n}{S_{n-1}}$

$$S_n=\sum_{i=0}^{I-1}\rho_n(z_i)=\sum_{i=0}^{I-1}\underbrace{\sigma(z_i+1)\rho_{n-1}(z_i+1)}_{\frac{(\tau_{n-1}(z_i)+\sigma(z_i))}{\sigma(z_{i+1})}\rho_{n-1}(z_i)}=\sum_{i=0}^{I-1}(\sigma(z_i)+\tau_{n-1}(z_i))\rho_{n-1}(z_i)$$

– из уравнения Пирсона

Представим полином σ в виде: $\sigma(z)=\omega_n(z)\tau_{n-1}(z)+\delta_n$, где $\omega_n(z)$ – полином не выше первой степени, δ_n – некоторая постоянная.

Тогда $(\sigma(z_i)+\tau_{n-1}(z_i))\rho_{n-1}(z_i)=(\omega_n(z_i)+1)\,\Delta(\sigma\rho_{n-1}(z_i))+\delta_n\rho_{n-1}(z_i)$, и

$$S_n=\delta_n S_{n-1}+\sum_{i=0}^{I-1}(\omega_n(z_i)+1)\,\Delta(\sigma\rho_{n-1}(z_i))=\delta_n\cdot S_{n-1}-\underbrace{\Delta\omega_n}_{\omega_n'}\underbrace{\sum_{i=0}^{I-1}\sigma(z_i+1)\rho_{n-1}(z_{i+1})}_{S_n}$$

$$\implies\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{\delta_n}{1+\omega_n'}\implies\gamma_n=-n\frac{B_n}{B_{n-1}}\cdot\frac{\delta_n}{1+\omega_n'}.$$

Основные сетки

$y_n(z)$	$t_n(z)$	$m_n(z)$	$k_n(z)$	$c_n(z)$
(a, b)	$(0, N)$	$(0, \infty)$	$(0, N+1)$	$(0, \infty)$
ρ	1	$\frac{\mu^z \Gamma(\gamma+z)}{\Gamma(z+1)\Gamma(\gamma)}$	$\frac{N!\, p^z q^{N-z}}{\Gamma(z+1)\cdot\Gamma(N-z+1)}$	$\frac{e^{-\mu}\mu^z}{\Gamma(z+1)}$
σ	$z(N-z)$	z	z	z
τ	$N-1-2z$	$\mu\gamma - z(1-\mu)$	$\frac{Np-z}{q}$	$\mu - z$
λ_n	$n(n+1)$	$n(1-\mu)$	n/q	n
B_n	$\frac{(-1)^n}{n!}$	μ^{-n}	$\frac{(-1)^n q^n}{n!}$	μ^{-n}
α_n	$\frac{n+1}{2(2n+1)}$	$\frac{\mu}{\mu-1}$	$\frac{n+1}{n}$	$-\mu$
β_n	$\frac{1}{2}(N-1)$	$-n(1+\mu)$	$Np + n(q-\frac{1}{2})$	$\mu+n$
γ_n	$\frac{n(N^2-n^2)}{2(2n+1)}$	$\frac{n(\gamma+n-1)}{\mu-1}$	$pq\,\frac{N-n+1}{n-1}$	$-n$

6. Квадратурные формулы типа Гаусса.

Квадратурными формулами типа Гаусса называют формулы вида:

$$\int_a^b f(x)\rho(x)\,dx \approx \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j), \qquad (6.1)$$

в которых коэффициенты λ_j, называемые числами Кристоффеля, и узлы x_j $(j=1,2,\dots,n)$ подбираются так, чтобы формула (6.1) была точна для произвольного полинома степени $2n-1$. Узлы x_j являются нулями полинома $p_n(x)$, ортогонального на интервале (a,b) с весом ρ. В самом деле, пусть $f(x) = x^k \tilde{p}_n(x)$, где

$$\tilde{p}_n(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n) \quad \text{и} \quad k=0,1,\dots,n-1$$

Так как в этом случае $f(x)$ — полином степени не выше $2n-1$, то формула (6.1) должна быть точна: