Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

Физический факультет

Международный научный семинар

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

СБОРНИК ТЕЗИСОВ ДОКЛАДОВ

Москва

МГУ имени М.В.Ломоносова

Физический факультет

28-29 ноября 2014 г.

ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ СЕМИНАРА

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Конференция-семинар проводится при финансовой поддержке

Российского фонда фундаментальных исследований

Проект № 14-01-20348

Пленарные доклады

Математическое моделирование волноведущих систем

А.Н.Боголюбов

Московский Государственный университет имени М.В. Ломоносова,

физический факультет, кафедра математики

Начало строгой математической теории волноведущих систем было положено в 1947-1948 гг. классическими работами А.Н.Тихонова и А.А.Самарского « О представлении поля в волноводе в виде суммы полей ТЕ и ТМ» и «О возбуждении радиоволноводов», вышедшими в «Журнале технической физики» [1,2].

Наряду с теорией регулярных волноводов, то есть однородных по длине прямолинейных волноводов постоянного сечения, в конце сороковых - начале пятидесятых годов появились работы по развитию методов расчета влияния различных плавных нерегулярностей в волноводе на распространяющуюся в нем основную волну моду. Одним из таких методов явился метод поперечных сечений предложенный в 1955 году в работе С.А.Щелкунова и П.Е.Краснушкина и развитый в работах Б.З.Каценеленбаума, А.Г.Свешникова, А.С.Ильинского, В.П.Моденова, А.А.Быкова, Б.Ф.Емелина и ряда других авторов.

Основной трудностью реализации метода поперечных сечений является необходимость на каждом шаге численно решать спектральную задачу, что сильно снижает его эффективность. Этот недостаток был преодолен в начале 60-х годов в предложенном А.Г.Свешниковым неполном методе Галеркина [3]. В этом методе основой алгоритма построения приближенного с заданной точностью решения задачи расчета нерегулярного волновода является переход от краевой задачи для уравнения в частных производных к краевой задаче для конечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, что позволяет провести строгое математическое доказательство сходимости метода при условиях значительно более общих, чем это удается сделать в случае сведения задачи к бесконечной системе дифференциальных уравнений и получить мажорантные оценки скорости сходимости. А.Г.Свешниковым был предложен общий принцип формулировки проекционных соотношений неполного метода Галеркина, при котором имеет место сходимость метода в энергетических нормах операторов с разрывными коэффициентами.

Основная сложность численной реализации неполного метода Галеркина заключается в необходимости решать жесткую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, что приводит к необходимости использовать различные достаточно трудоемкие специальные методы. Большие возможности для математического моделирования сложных волноведущих систем дает метод конечных разностей (МКР) в прямой и вариационной постановках (метод конечных элементов – МКЭ. На кафедре математики физического факультета МГУ под руководством А.Г.Свешникова был выполнен большой цикл работ по моделированию волноведущих систем на основе МКР и МКЭ [4].

В 50-х годах прошлого века А. Г. Свешниковым были введены парциальные условия излучения, которые в случае внешних задач дифракции позволяют редуцировать их к задачам в ограниченных областях с нелокальными граничными условиями [5]. Использование разностных аналогов парциальных условий излучения оказалось наиболее эффективным методом для построения численных алгоритмов решения данного класса задач.

Задачи синтеза волноведущих систем составляют специальный класс обратных задач математической физики. Они ставятся как задачи математического проектирования для определения основных характеристик синтезируемого объекта, при которых этот объект обладает требуемыми техническими и эксплуатационными характеристиками. Характерной особенностью задач синтеза является то, что в отличие от обратных задач распознавания в задачах синтеза, как правило, отсутствует требование единственности решения.

Наиболее полный и универсальный подход к решению задач синтеза волноведущих систем заключается в рассмотрении таких задач как математически некорректных, с применением для их решения метода регуляризации А.Н.Тихонова. Такой подход был предложен в работах А.Г.Свешникова и А.С.Ильинского [6]. При этом используются вариационные постановки задач синтеза, когда строится оценивающий функционал и затем ищется его экстремум.

На кафедре математики физического факультета МГУ под руководством А.Г.Свешникова был решен ряд важных задач синтеза волноведущих систем. Были рассмотрены следующие задачи: синтез круглых диэлектрических волноводов (в частности, волоконных световодов), синтез трехмерного волноводного перехода между двумя волноводами овального сечения, синтез плоского волноводного трансформатора и излучателя, синтез трехмерного волноводного перехода с согласующим ребром между круглыми и планарными волноводами, синтез волноведущих систем с киральным заполнением, синтез волноведущих систем на основе фотонных кристаллов.

Литература

1. *Самарский А.А., Тихонов А.Н.* О представлении поля в волноводе в виде суммы ТЕ и ТМ // Журнал технич. физики. 1948. Т.28, вып. 7. С. 959-970.
2. *Самарский А.А., Тихонов А.Н.* О возбуждении радиоволноводов// Журнал технич. физики. 1947. Т.27, вып. 11, 12. С. 1283-1296; 1431-1440.

3. *Свешников А.Г.* К обоснованию метода расчета распространения электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах // Журнал выч. мат. и мат. физ. 1963. Т. 3, № 2, с. 314-326.

4. *Боголюбов А.Н., Буткарев И.А., Минаев Д.В.* Математическое моделирование волноведущих систем на основе метода конечных разностей и конечных элементов // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50, № 2, с. 140-151.

5. *Свешников А.Г.* Принципы излучения. ДАН СССР, 1950. Т. 3, №5. С. 517-520.

6. *Свешников А.Г., Ильинский А.С.* Задачи проектирования в электродинамике // ДАН СССР. 1972. Т. 204, № 5, с. 1077-1080.

7. *Боголюбов А.Н., Красильникова А.В., Минаев Д.В., Свешников А.Г.* Метод конечных разностей для решения задач синтеза волноведущих систем // Математическое моделирование. 2000. Т. 12, № 1, с. 13-24.

Метод Галёркина в задачах вычислительной электродинамики

А.С. Ильинский
Московский государственныйуниверситет имени М.В.Ломоносова
celd@cs.msu.su

Целью настоящего доклада является развитие метода Галёркина для решения интегрального уравнения электрического поля, к которому сводится краевая задача дифракции электромагнитных волн на тонких экранах. Я буду рассматривать плоский идеально проводящий экран с кусочно-гладкой границей в однородном пространстве [1]. Не смотря на геометрическую простоту, этот случай не является простым для математического моделирования. Он может быть использован как основа для решения задач дифракции на криволинейных экранах. Следует отметить, что использование граничных условий на экране приводит к интегральным уравнениям, имеющим особенности в ядрах. Для исследования этих интегральных уравнений в данном докладе используется теория обобщенных решений псевдодифференциальных операторных уравнений.

Рассмотрим постановку задачи дифракции на экране. Пусть $\Omega \subset R^2$ - ограниченная плоская область с кусочно гладкой границей Г, состоящей из конечного числа простых дуг класса C^∞, сходящихся под углами, отличными от нулевого. Задача дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля $\vec{E}^0(x,y,z,), \vec{H}^0(x,y,z,)$ на бесконечно тонком идеально проводящем экране Ω, расположенном в трехмерном пространстве с волновым числом k, $k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu$, $\operatorname{Im} k \ge 0\ (k \ne 0)$, состоит в определении рассеянного электромагнитного поля $\vec{E}, \vec{H}$, удовлетворяющего однородным уравнениям Максвелла, краевым условиям для касательных составляющих электрического поля на поверхности экрана, условиям конечности энергии в ограниченном объёме пространства и условиям на бесконечности.

Для изучения задачи дифракции на плоском экране Ω введём векторное пространство обобщённых функций или распределений W. В дальнейшем нас будут интересовать пространства вектор-функций, поэтому через $\vec{u}$ и $\vec{v}$ будем обозначать вектора $\vec{u} = (u_1 u_2)^T$, $\vec{v} = (v_1 v_2)^T$. При этом запись $\vec{u} \in H^s$ будем понимать как декартово произведение двух экземпляров пространства H^s со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v})_s = (u_1 v_1)_s + (u_2 v_2)_s = \int \langle \xi \rangle^s \hat{\vec{u}}(\xi) \overline{\hat{\vec{v}}}(\xi) d\xi.$$

Определим Гильбертово пространство $W = W(\overline{\Omega})$ как пополнение множества функций $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$\|\vec{u}\|_W = \int \frac{1}{\langle \xi \rangle} \left| \hat{\vec{u}} \right|^2 d\xi + \int \frac{1}{\langle \xi \rangle} \left| \xi \hat{\vec{u}} \right|^2 d\xi. \quad (1)$$

Пространство W состоит из функций $\vec{u} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Omega)$ для которых $div_\perp \vec{u} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Omega)$, т.е.

$$W := \left\{ \vec{u} \in \widetilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}\right), \quad div_{\perp}\vec{u} \in \widetilde{H}^{-1/2}\left(\overline{\Omega}\right) \right\}.$$

Пространство W разлагается на прямую сумму (замкнутых) ортогональных подпространств W_1 и W_2, $W = W_1 \oplus W_2$. Для гладких вектор-функций $\vec{g} \in C_0^{\infty}(\Omega)$ разложение $\vec{g}$ совпадает с хорошо известным разложением на соленоидальную и потенциальную составляющие. Для исследования множества отображений из пространства W требуется рассмотреть антидвойственное относительно билинейной формы $t\left(\vec{u}, \vec{f}\right)$ пространство $W' := (W(\Omega))'$. Пространство W' определяется следующим образом:

$$W' = \left\{ \begin{array}{l} \vec{f}\,|_{\Omega}\colon \vec{f} \in H^{-1/2}\left(R^2\right), \\ \partial f_1/\partial x_2 - \partial f_2/\partial x_1 \in H^{-1/2}\left(R^2\right) \end{array} \right\},$$

$$H^{1/2}(\Omega) \subset W' \subset H^{-1/2}(\Omega). \quad t\left(\vec{u}, \vec{f}\right) = \int_{\Omega} \vec{u}(x)\bar{\vec{f}}(x)dx, \quad \vec{u} \in W(\Omega), \quad \vec{f} \in W'\left(\overline{\Omega}\right)$$

Норма в W' индуцируется нормой в $H^{-1/2}\left(R^2\right)$. Пространство W' разлагается на прямую сумму (замкнутых) ортогональных подпространств $W^1 \oplus W^2$, где

$$W^1 := \left\{ \vec{f} \in W' : \partial f_1/\partial x_2 + \partial f_2/\partial x_1 = 0 \right\}, \; W^2 := \left\{ \vec{f} \in W' : \partial f_2/\partial x_1 - \partial f_1/\partial x_2 = 0 \right\}.$$

Введем интегральные представления решения задачи дифракции на экране с помощью векторного потенциала

$$\vec{E} = {}^{i}\!\!\diagup_{\omega\varepsilon}\left(grad\, div_{\perp} A(\vec{u}) + k^2 A(\vec{u})\right), \quad \vec{H} = rot\, A(\vec{u}),$$

$$\vec{u} = (u_1, u_2)^T, \quad \vec{u} \in W\left(\overline{\Omega}\right), \quad \vec{u}, div_{\perp}\vec{u} \in C^1\left(\overline{\Omega}\right).$$

Принадлежность $A\vec{u} \in H^1_{loc}\left(R^3\right)$ обеспечивает условие конечности энергии. Краевое условие $\vec{E}_{\tau}\,|_{\Omega} = -\vec{E}^{\,0}_{\tau}\,|_{\Omega}$, приводит к интегродифференциальному уравнению относительно вектора $\vec{u}$. Опуская точку x на Ω, получим

$$grad_{\perp} A(div_{\perp}\vec{u}) + k^2 A\vec{u} = f, \tag{2}$$

$$A(\vec{u}) = \int_{\Omega} \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|}\, dy, \quad x \in \Omega, \quad f = 4\pi i\omega\varepsilon E^0_{\tau}\,|_{\Omega}, \quad f \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right).$$

Систему (2) можно рассматривать как систему псевдодифференциальных уравнений

$$L\vec{u} = f, \quad \vec{u} \in W, \quad f \in C^{\infty}\left(\overline{\Omega}\right) \subset W'.$$

При этом равенство (16) понимается в смысле распределений

$$L\vec{u} := grad\, A(div\,\vec{u}) + k^2 A\vec{u} = \int \left[a(\xi)\left(-\xi\left(\xi\hat{\vec{u}}(\xi)\right)\right) + k^2\hat{\vec{u}}(\xi)\exp(ix\xi)\right]d\xi, \quad a(\xi) = \left(\xi^2 - k^2\right)^{1/2}$$

или, умножая скалярно на $\bar{\vec{v}} \in C_0^{\infty}(\Omega)$, получим вариационное соотношение

$$t(\vec{u}, \vec{v}) = -\int a(\xi)\left(\xi\hat{\vec{u}}(\xi)\right)\left(\xi\bar{\hat{\vec{v}}}\right)d\xi + k^2\int a(\xi)\hat{\vec{u}}(\xi)\bar{\hat{\vec{v}}}(\xi)d\xi = \int_{\Omega} f(x)\bar{\vec{v}}(\xi)dx. \tag{2'}$$

Рассматривая [2] полуторалинейную форму $t(\vec{u}, \vec{v})$ при $\vec{u} \in W_1$ а $\vec{v} \in W_2$, устанавливаем, что $t(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \quad \vec{u} \in W_1, \quad \vec{v} \in W_2$. Аналогично $t(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \quad \vec{u} \in W_2, \quad \vec{v} \in W_1$.

Таким образом W_1 и W_2 являются инвариантными подпространствами для оператора T, определяемого формой $t(\vec{u},\vec{v}) = (T\vec{u},\vec{v})$, где

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$$

Рассматривая операторы T_1 и T_2, устанавливаем, что они представимы

$$T_1 = k^2 I + B_1, \quad T_2 = -I + B_2,$$

где B_1, B_2 - компактные операторы.

Из данного рассмотрения следует, что оператор $L(k): W \to W'$ является фредгольмовым и непрерывно обратимым при $\operatorname{Im} k \geq 0, k \neq 0$.

Для численного решения уравнения электрического поля (2) самым естественным методом является проекционный метод Галеркина, при котором выбирается последовательность конечномерных подпространств W_n, обладающих свойствами аппроксимации в пространстве W.

Для обоснования сходимости метода Галеркина обычно требуется, чтобы оператор задачи обладал определёнными свойствами. Чаще всего требуется, чтобы оператор был коэрцитивен, что означает $(T\vec{u},\vec{u})_W \geq \gamma(\vec{u},\vec{u})_W$.

Для интегрального уравнения (2) обоснование метода Галёркина следует из теоремы о полноте подпространств W_n и эллиптичности операторного уравнения (2) на подпространствах W_1, W_2.

Рассмотрим реализацию метода Галёркина для расчёта наведённого тока на треугольной пластине, на которую падает плоская волна в пространстве R^3. Для аппроксимации векторов тока на пластине используются так называемые «рёберные» базисные функции, определённые на двух соседних элементарных треугольных областях, на которые разделена исходная плоская область. Для построения неравномерных треугольных сеток использовалось программное обеспечение, разработанное Е.С. Николаевым на факультете ВМК МГУ. Полнота базисных функций доказана в работе [3].

В качестве основного объекта исследования выбрана треугольная пластина, для которой проводились измерения обратного поперечника рассеяния на измерительном комплексе ИРЭ РАН. С вычислительной точки зрения объект рассеяния электромагнитной волны представляет определенные трудности. Треугольная пластина ориентирована произвольно по отношению направления падения плоской волны. В зависимости от ориентации наводимые на пластине токи меняются очень заметно. Однако при любой ориентации имеют место особенности поведения наведенных токов на кромках и в угловых точках.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.С. Ильинский, Ю.Г. Смирнов Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. М.:ИПРЖР, 1996.
2. Ю.Г. Смирнов Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза: Изд-во Пензинского университета, 2009.
3. М.Ю. Медведик, Ю.Г. Смирнов // Журнал выч. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 1. С. 105-113.

Generalized Steklov Eigenvalues for the Laplacian

Kunimochi Sakamoto
(Hiroshima University)

We consider the eigenvalue problem for $\mathbb{C}$-valued function $u(x)$;

$$\text{(GSEP)} \qquad \lambda u = \triangle u \quad \text{in } \Omega \qquad \partial_{\boldsymbol{n}} u = Eu \quad \text{on } \partial\Omega,$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ $(m \geq 1)$ is a smooth bounded domain, $\triangle$ stands for the Laplace operator and $\lambda \in \mathbb{C}$ plays the role of a parameter. $E = E(\lambda)$ is called a *generalized Steklov eigenvalue*, if (GSEP) has a nontrivial solution $u \not\equiv 0$. Naturalyl, when $\lambda = 0$, the problem (GSEP) is nothing but the well-known Steklov eigenvalue problem.

This talk has two purposes;

(1) to show that the Steklov eigenvalues, say, $\nu_0 < \nu_1 \leq \ldots \leq \nu_j \to \infty$ as $j \to \infty$, are analytically continued to $E_j(\lambda)$ $(j = 0, 1, \ldots)$ for $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \sigma(\triangle_{\mathrm{Dir}})$, subject to (GSEP) in generic domains, where $\sigma(\triangle_{\mathrm{Dir}}) \subset (-\infty, 0)$ stands for the eigenvalues of Laplacian in Ω under homogeneous Dirichlet boundary conditions on $\partial\Omega$;

(2) and to apply the results thus obtained to determine the stability of the following problem;

$$\partial_t \boldsymbol{u} = D \triangle \boldsymbol{u} \quad \text{in } \Omega, \qquad D \partial_{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{u} = J \boldsymbol{u},$$

where $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_N)$, $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_N)$ and J is a $N \times N$ real matrix. In particular, we focus our attention on the case where the diffusion matrix D is scalar, i.e., $D = \mathrm{diag}(d, \ldots, d)$ with $d > 0$. In this case, the distribution of the eigenvalues of J relative to the lines $E_j(\mathrm{i}\mathbb{R})$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ determine the degree of instability.

We also display concrete examples of the items (1) (2) above, for special domains Ω.