Вопросы и задачи к экзамену по математическому анализу
I семестр, 2011-2012 г.

Тема 1. Числовые множества и последовательности

1. **Определения.**

Сформулируйте определение:

1.1. ограниченного множества вещественных чисел;
1.2. ограниченного сверху множества вещественных чисел;
1.3. ограниченного снизу множества вещественных чисел;
1.4. неограниченного множества вещественных чисел;
1.5. неограниченного сверху множества вещественных чисел;
1.6. неограниченного снизу множества вещественных чисел;
1.7. окрестности данной точки;
1.8. ε - окрестности данной точки;
1.9. проколотой окрестности данной точки;
1.10. предельной точки числового множества;
1.11. верхней грани числового множества;
1.12. нижней грани числового множества;
1.13. точной верхней грани числового множества;
1.14. точной нижней грани числового множества;
1.15. числовой последовательности
1.16. ограниченной последовательности;
1.17. неограниченной последовательности;
1.18. монотонной последовательности;
1.19. предела последовательности;
1.20. бесконечно малой последовательности;
1.21. бесконечно большой последовательности;
1.22. фундаментальной последовательности;
1.23. подпоследовательности данной последовательности;
1.24. предельной точки последовательности (два определения);
1.25. верхнего предела последовательности;
1.26. нижнего предела последовательности.

2. **Основные теоремы (без доказательства)**

Сформулируйте

2.1. теорему о пределе суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей;
2.2. теорему о «двух милиционерах»;
2.3. теорему о пределе монотонной ограниченной последовательности;
2.4. теорему о вложенных отрезках;
2.5. теорему Больцано-Вейерштрасса;
2.6. критерий Коши сходимости последовательности.

3. **Теоремы с доказательством.**

3.1. Докажите, что сходящаяся последовательность имеет только один предел.
3.2. Докажите, что сходящаяся последовательность ограничена.
3.3. Сформулируйте и докажите теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного двух последовательностей.
3.4. Докажите теорему о «двух милиционерах».
3.5. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что любая подпоследовательность $\left\{a_{n_k}\right\}$ сходится к a.
3.6. Докажите, что неубывающая ограниченная сверху последовательность имеет предел.
3.7. Докажите, что невозрастающая ограниченная снизу последовательность имеет предел.
3.8. Докажите теорему о вложенных отрезках.
3.9. Докажите теорему Больцано-Вейерштрасса.
3.10. Докажите, что фундаментальная последовательность является ограниченной.
3.11. Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.

3.12. Докажите, что фундаментальная последовательность является сходящейся.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Приведите примеры ограниченного и неограниченного множеств вещественных чисел.
4.2. Докажите неравенство Бернулли: $(1+x)^n \geq 1+nx$ при $x \geq -1$ и $n \in \mathbb{N}$.
4.3. Сформулируйте отрицание к определению ограниченной последовательности.
4.4. Сформулируйте отрицание к определению "Число b называется пределом последовательности".
4.5. Сформулируйте отрицание к определению бесконечно малой последовательности.
4.6. Сформулируйте отрицание к определению бесконечно большой последовательности.
4.7. Сформулируйте отрицание к определению фундаментальной последовательности.
4.8. Докажите, что последовательность $x_n = (1+1/n)^n$ – возрастающая.

4.9. Докажите, что последовательность $x_n = (1+1/n)^{n+1}$ – убывающая.

4.10. Докажите, что последовательность $x_n = (1+1/n)^n$ сходится.

4.11. Пусть $\{a_n\}$ - бесконечно малая последовательность, $a_n \neq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Докажите, что последовательность $\{1/a_n\}$ - бесконечно большая.

4.12. Пусть $\{a_n\}$ - бесконечно большая последовательность. Докажите, что последовательность $\{1/a_n\}$ определена, начиная с некоторого номера n, и является бесконечно малой.

4.13. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a \neq 0$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a}$.

4.14. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n + y_n\}$? Ответ обоснуйте.

4.15. Пусть последовательность $\{x_n\}$ расходится и последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n + y_n\}$? Ответ обоснуйте.

4.16. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ - расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n \cdot y_n\}$? Ответ обоснуйте.

4.17. Пусть последовательность $\{x_n\}$ расходится и последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n \cdot y_n\}$? Ответ обоснуйте.

4.18. Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится, а последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n/y_n\}$? Ответ обоснуйте.

4.19. Пусть последовательность $\{x_n\}$ расходится и последовательность $\{y_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательности $\{x_n/y_n\}$? Ответ обоснуйте.

4.20. Докажите, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$.

4.21. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n) = 0$.

4.22. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} (x_{n+1} - x_n)^n = 0$.

4.23. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = a^2$.

4.24. Пусть, начиная с некоторого номера, $x_n \geq y_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

4.25. Пользуясь определением предела последовательности, докажите что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} (0.8)^n = 0$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1} = 0.$

4.26. Исследуйте вопрос о сходимости последовательности $x_n = \dfrac{n^\alpha - 1}{2n^2 + n + 1}$ в зависимости от параметра α.

4.27. Найдите: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}}{n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{2}{n}\right)^{3n}$.

4.28. Докажите, что последовательности являются бесконечно большими:

а) $a_n = \sqrt{n}$; б) $a_n = (-1)^n \cdot n$

4.29. Докажите, что последовательность $\left\{\left(1+(-1)^n\right)n\right\}$ неограниченная, однако не является бесконечно большой.

4.30. Сформулируйте отрицание к определению "Число b называется предельной точкой последовательности", используя понятие подпоследовательности.

4.31. Сформулируйте отрицание к определению "Число b называется предельной точкой последовательности", используя понятие окрестности.

4.32. Приведите пример последовательности, у которой есть одна предельная точка, но последовательность не является сходящейся.

4.33. Приведите пример последовательности, у которой ровно две предельные точки.

4.34. Докажите, что монотонная неограниченная последовательность не имеет предельной точки.

4.35. Найдите все предельные точки данной последовательности $\{x_n\}$, а также $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$:

а) $x_n = (-1)^n$;

б) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

в) $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2\pi n}{3}$;

г) $x_n = \cos^n \dfrac{2\pi n}{3}$;

д) $x_n = \sin\left(\pi n/2 + 1/n\right)$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что из любой неограниченной последовательности можно выделить бесконечно большую подпоследовательность.

5.2. Докажите сходимость последовательности $\{x_n\}$ и вычислите ее предел, если

а) x_1 - произвольное положительное число, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right) \quad \forall n \geq 1, \quad a > 0$.

б) $x_1 = \dfrac{3}{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$.

5.3. Найдите все предельные точки последовательности $1; 1/2; 1; 1/2; 1/3; 1; 1/2; 1/3; 1/4 \ldots$ (обоснуйте ответ).

5.4. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность $x_n = \dfrac{\ln n}{n^\alpha}$ при $\alpha > 1$ является бесконечно малой.

5.5. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность $x_n = \dfrac{n^a}{b^n}$ при любом a и $b > 1$ является бесконечно малой.

5.6. Докажите, что $\forall b \ \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b^n}{n!} = 0$.

5.7. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

5.8. Докажите, что последовательность $x_n = \dfrac{b^n}{n^a}$ при любом α и при $b > 1$ является бесконечно большой.

5.9. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$.

5.10. Докажите, что последовательность $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ является бесконечно малой.

5.11. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

5.12. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $b_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

5.13. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

5.14. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

5.15. Приведите пример последовательности с бесконечным числом предельных точек.

Тема 2. Предел и непрерывность функции.

1. Определения.

Сформулируйте определение:

1.1. ограниченной на множестве *X* функции;
1.2. ограниченной сверху на множестве *X* функции;
1.3. ограниченной снизу на множестве *X* функции;
1.4. неограниченной на множестве *X* функции;
1.5. неограниченной сверху на множестве *X* функции;
1.6. неограниченной снизу на множестве *X* функции;
1.7. верхней грани функции на множестве *X;*
1.8. нижней грани функции на множестве *X;*
1.9. точной верхней грани функции на множестве *X;*
1.10. точной нижней грани функции на множестве *X;*
1.11. монотонной на промежутке функции;
1.12. предела функции $f(x)$ в точке $x=a$ “по Коши”;
1.13. предела функции $f(x)$ при $x\to a+0$ “по Коши”;
1.14. предела функции $f(x)$ при $x\to a-0$ “по Коши”;
1.15. предела функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ “по Коши”;
1.16. предела функции $f(x)$ при $x\to-\infty$ “по Коши”;
1.17. предела функции $f(x)$ в точке $x=a$ “по Гейне”;
1.18. предела функции $f(x)$ при $x\to+\infty$ “по Гейне”;
1.19. предела функции $f(x)$ при $x\to-\infty$ “по Гейне”;
1.20. $f(x)\to+\infty$ при $x\to a$ "по Коши";
1.21. $f(x)\to+\infty$ при $x\to a-0$ "по Коши";
1.22. $f(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$ "по Коши";
1.23. $f(x)\to+\infty$ при $x\to-\infty$;"по Коши";
1.24. $f(x)\to-\infty$ при $x\to-\infty$ "по Коши";
1.25. $f(x)\to-\infty$ при $x\to a$ "по Коши";
1.26. $f(x)\to-\infty$ при $x\to a+0$ "по Коши";
1.27. $f(x)\to-\infty$ при $x\to+\infty$ "по Коши";
1.28. "Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$ "по Коши";
1.29. "Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x\to+\infty$ "по Коши";
1.30. $f(x)\to+\infty$ при $x\to a$ "по Гейне";
1.31. $f(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$ "по Гейне";
1.32. $f(x)\to+\infty$ при $x\to-\infty$ "по Гейне";
1.33. функции, непрерывной в точке;
1.34. непрерывной на промежутке функции;
1.35. точки разрыва функции $f(x)$;
1.36. точки устранимого разрыва функции $f(x)$;
1.37. точки разрыва первого рода функции $f(x)$;
1.38. точки разрыва второго рода функции $f(x)$;
1.39. обратной функции.

2. Основные теоремы (без доказательства).

2.1. Сформулируйте критерий Коши существования предела функции при $x\to a$.
2.2. Сформулируйте критерий Коши существования предела функции при $x\to+\infty$.

Сформулируйте теорему:

2.3. о пределах суммы, разности, произведения и частного двух функций;
2.4. о связи предела функции в данной точке с односторонними пределами в этой точке;
2.5. о первом замечательном пределе;
2.6. о втором замечательном пределе;
2.7. о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных функций;
2.8. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции;
2.9. Сформулируйте теорему о существовании, монотонности и непрерывности обратной функции.

3. Теоремы с доказательством.

3.1. Докажите, что сумма двух бесконечно малых функций в точке a является бесконечно малой функцией в точке a.

3.2. Докажите, что произведение бесконечно малой в точке a функции на ограниченную функцию является бесконечно малой функцией в точке a.

Докажите теорему

3.3. о пределах суммы, разности, произведения и частного двух функций;

3.4. о связи предела функции в данной точке с односторонними пределами в этой точке;

3.5. о пределе монотонной ограниченной функции.

3.6. Докажите эквивалентность определений по Гейне и по Коши предела функции $f(x)$ при $x \to a$.

3.7. Сформулируйте критерий Коши существования $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Докажите необходимость.

3.8. Сформулируйте критерий Коши существования $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Докажите достаточность.

Докажите теорему:

3.9. о непрерывности суммы, разности, произведения и частного двух непрерывных функций;

3.10. о непрерывности сложной функции;

3.11. о прохождении непрерывной на сегменте функции через любое промежуточное значение;

3.12. о существовании, монотонности и непрерывности обратной функции;

3.13. о первом замечательном пределе;

3.14. о втором замечательном пределе.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Сформулируйте определение “по Коши” того, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке $x = a$.

Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению

4.2. "$f(x) \to b$ при $x \to a$".
4.3. "$f(x) \to b$ при $x \to \infty$";
4.4. "$f(x) \to b$ при $x \to -\infty$";
4.5. "$f(x) \to +\infty$ при $x \to a$";
4.6. "$f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$";
4.7. "$f(x) \to -\infty$ при $x \to a-0$";
4.8. "$f(x) \to +\infty$ при $x \to a+0$".

4.9. Докажите, что сумма бесконечно малой в точке a функции и ограниченной в окрестности точки a функции является ограниченной функцией в некоторой окрестности точки a.

4.10. Пусть функция $f(x)$ имеет предел в точке a, а $g(x)$ не имеет предела в этой точке. Что можно сказать о существовании пределов суммы $f(x)+g(x)$ и разности $f(x)-g(x)$ в точке a? Ответ обоснуйте.

4.11. Дайте определение функции, не являющейся непрерывной в точке a. Приведите пример разрывной функции.

4.12. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке a. Что можно сказать о непрерывности суммы $f(x)+g(x)$ в этой точке? Ответ обоснуйте.

4.13. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке a. Что можно сказать о непрерывности произведения $f(x)\cdot g(x)$ в этой точке? Ответ обоснуйте.

4.14. Пусть существует предел $f(x)$ в точке a и не существует предел $g(x)$ в точке a. Что можно сказать о пределе отношения $f(x)/g(x)$ в этой точке? Ответ обоснуйте.

4.15. Докажите, что если $f(x)$ непрерывна в точке a, то и $|f(x)|$ – непрерывная функция в точке a.

4.16. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной в некоторой точке функции есть функция, разрывная в этой точке? Ответ обоснуйте.

4.17. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a, $g(x)$ – разрывна в точке a. Что можно сказать о непрерывности суммы $f(x)+g(x)$ и разности $f(x)-g(x)$ в этой точке? Ответ обоснуйте.

4.18. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке a, $g(x)$ – разрывна в точке a. Что можно сказать о непрерывности произведения $f(x)\cdot g(x)$ в точке a? Ответ обоснуйте.

4.19. Пусть $R(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m},\ a_0\neq 0,\ b_0\neq 0$. Докажите, что

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, & n>m,\\ a_0/b_0, & n=m,\\ 0, & n<m.\end{cases}$$

4.20. Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ не существует.

4.21. Существует ли $\lim\limits_{x\to 1}x\operatorname{sgn}(x-1)$?. Обоснуйте ответ.

4.22. Вычислите: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

4.23. Докажите, что: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$, если $a>0$.

4.24. Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to a$ функции. Докажите справедливость следующих равенств при $x\to a$:

$o(\beta)+o(\beta)=o(\beta)$;

$o(\beta)-o(\beta)=o(\beta)$;

$o(c\beta)=o(\beta), \forall c\neq 0, c=const$;

$co(\beta)=o(\beta), \forall c\neq 0, c=const.$;

$\left(o(\beta)\right)^n=o(\beta^n), \quad \forall n\in\mathbb{N}$;

$\beta^n o(\beta)=o\left(\beta^{n+1}\right), \quad \forall n\in\mathbb{N}$;

$\dfrac{o(\beta^n)}{\beta}=o\left(\beta^{n-1}\right), \quad \forall n\in\mathbb{N}$;

$o\left(o(\beta)\right)=o(\beta)$;

$o\left(\beta+o(\beta)\right)=o(\beta)$;

$\alpha\beta=o(\alpha),\ \alpha\beta=o(\beta)$;

если $\alpha\sim\beta$, то $\alpha-\beta=o(\alpha)$

и $\alpha-\beta=o(\beta)$.

4.25. Пользуясь свойствами символа "$o-$малое", запишите для функции $\alpha(x)$ равенство вида $\alpha(x)=o(1)$ или $\alpha(x)=o\left((x-a)^k\right)$ при $x\to a$ (k-натуральное число):

4.25.1. $\alpha(x)=o(-5x+x^2-x^3+o(-5x+x^2-x^3)),\ x\to 0$;

4.25.2. $\alpha(x)=(x-1)\cdot o((x-1)^2+o(x-1)),\ x\to 1$;

4.25.3. $\alpha(x)=\dfrac{1}{3x}\cdot o(5x+x^2),\ x\to 0$.

4.25.4. $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^2}\cdot o\left(2x^4+o\left(x^4+2x^2\right)\right),\ x\to 0$;

4.25.5. $\alpha(x)=\dfrac{o\left(2(x+2)^3\right)}{(x+2)^2}+\dfrac{o\left(4(x+2)^5\right)}{(x+2)^4},\ x\to -2$.

4.26. Пользуясь свойствами символа "$o-$малое", запишите для функции $\alpha(x)$ равенство вида $\alpha(x)=o(1)$ или $\alpha(x)=o\left(\dfrac{1}{x^k}\right)$ при $x\to\infty$ (k-натуральное число):

4.26.1. $\alpha(x)=o\left(\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$;

4.26.2. $\alpha(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}$;

4.26.3. $\alpha(x)=x^2\cdot o\left(\dfrac{1}{x^3}+o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\right)$;

4.26.4. $\alpha(x)=x\left(o\left(\frac{1}{x^2}\right)-o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$;

4.26.5. $\alpha(x)=5x\cdot o\left(\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

4.27. Напишите асимптотическое разложение функции при $x\to 0$ с остаточным членом $o(x^{\alpha})$, где $\alpha\ge 0$:

а) $\sin^2(5\sqrt{x}+x)$; б) $\cos(4x^2+x)$; в) $\ln(1-x^2+x)$; г) $\ln(\cos 2x)$;д) $\ln\left(e^x+\sqrt{x}\right)$; е) $\cos\sqrt{\sin x}$, $x>0$.

4.28. Напишите асимптотическое разложение функции при $x\to\infty$ с остаточным членом $o(1/x^{\alpha})$, где $\alpha\ge 0$:

а) $\sqrt{x^2+x}-x$; б) $\sqrt[3]{x^3+x}-x$; в) $\ln\cos\left(\frac{2}{x}\right)$; г) $e^{1/\sqrt{x}}-1$, $x>0$.

4.29. Вычислите пределы

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{(x-2)(x+1)}$;

$\lim\limits_{x\to -8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-3)^{40}(5x+1)^{10}}{(3x-2)^{25}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

$\lim\limits_{x\to\pi/3}\frac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$;

$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+ax}-\sqrt[n]{1+bx}}{x}$, $m,n\in\mathbb{N}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$;

$\lim\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$ при $x\to+0$, $x\to 1$, $x\to+\infty$;

$\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{tgx}$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{ch}2x}{\ln\cos 3x}$;

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$;

$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$;

$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a}\right)$, $a>0$;

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$;

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+e^x\right)}{\ln\left(x^4+e^{2x}\right)}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right)}{\sin bx}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{(a-1)+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0,\, b>0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi\cdot 2^x)}{\ln\left(\cos(\pi\cdot 2^x)\right)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\left(\frac{2\pi n}{3n+1}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^x$, $a,c>0$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln(\operatorname{ch}x)\right)$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)$

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$, $a>0$

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}, a>0, b>0, c>0$

$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x}-1),\ x>0$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\operatorname{ch}\frac{\pi}{n}\right)^{n^2}}{\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n^2}}$

$\lim_{x\to\infty} x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$

$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{1-\cos x}$

4.30. Найдите все точки разрыва функции $f(x)$ и определите их тип: $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}$; $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$; $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$; $f(x)=\frac{x^2-1}{\ln|x|}$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что если $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ "по Гейне", то $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ "по Коши".

5.2. Докажите, что если $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ "по Коши", то $\lim_{x\to+\infty} f(x)=b$ "по Гейне".

5.3. Докажите, что если $f(x)\to+\infty$ при $x\to a$ "по Гейне", то $f(x)\to+\infty$ при $x\to a$ "по Коши".

5.4. Докажите, что если $\lim_{x\to a+0} f(x)=b$ "по Гейне", то $\lim_{x\to a+0} f(x)=b$ "по Коши".

5.5. Пусть функция $y=f(x)$ возрастает и ограничена на промежутке $x\in(a;b)$. Докажите, что $\forall c\in(a;b)\ \exists\lim_{x\to c-0} f(x)$.

5.6. Пусть функция $f(x)$ возрастает и ограничена на промежутке $(a;+\infty)$. Докажите, что $\exists\lim_{x\to\infty} f(x)$.

5.7. Пусть функция $f(x)$ убывает и ограничена на интервале $(a;b)$. Докажите, что $\exists\lim_{x\to b-0} f(x)$.

5.8. Сформулируйте критерий Коши существования $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Докажите необходимость.

5.9. Сформулируйте критерий Коши существования $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Докажите достаточность.

5.10. Докажите, что функция Дирихле $D(x)=\begin{cases}0, & x\text{ –иррац.}\\ 1, & x\text{ –рац.}\end{cases}$ не имеет предела ни в одной точке.

5.11. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$, $f(a)\cdot f(b)<0$ и уравнение $f(x)=0$ не имеет корней на (a,b). Докажите, что функция $f(x)$ не является непрерывной на $[a;b]$

5.12. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$ и $\exists c\in\left(f(a);f(b)\right)$ такое, что уравнение $f(x)=c$ не имеет корней на (a,b). Докажите, что функция $f(x)$ не является непрерывной на $[a;b]$.

5.13. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, и в любой окрестности точки a найдутся точки x_1 и x_2 такие, что $f(x_1)\cdot f(x_2)<0$, то $f(a)=0$.

5.14. Докажите, что если $f(a)>0$ и $\forall\delta>0\ \exists x$ такое, что $0<|x-a|<\delta$ и $f(x)<0$, то функция $f(x)$ разрывна в точке $x=a$.

5.15. Приведите пример функций $f(x)$ и $g(x)$, для которых $\nexists\lim_{x\to a} f(x)$ и $\nexists\lim_{x\to a} g(x)$, но $\exists\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)$.

5.16. Пусть функция $y=f(x)$ определена и монотонна на некотором промежутке и пусть для любой точки c из этого промежутка $\exists\lim_{x\to c-0} f(x)$, $\exists\lim_{x\to c+0} f(x)$, причем эти пределы равны друг другу. Докажите, что функция $f(x)$ непрерывна на указанном промежутке.

Тема 3. Производные и дифференциалы функции.

1. Определения.

Сформулируйте определение:

1.1. производной функции $f(x)$ в данной точке;

1.2. правой производной функции $f(x)$ в данной точке;

1.3. левой производной функции $f(x)$ в данной точке;

1.4. производной вектор-функции в данной точке;

1.5. дифференцируемой в данной точке функции;

1.6. функции $f(x)$, дифференцируемой на множестве;

1.7. касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ и запишите уравнение касательной;

1.8. дифференциала функции в данной точке;

1.9. n-ной производной функции $f(x)$ в данной точке;

1.10. n раз дифференцируемой функции $f(x)$ в данной точке;

1.11. бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ в данной точке;

1.12. n-ной производной вектор-функции в данной точке;

1.13. n-ного дифференциала функции в данной точке.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства)

Сформулируйте:

2.1. достаточное условие существования касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$;

2.2. теорему о производных суммы, разности, произведения и частного двух функций;

2.3. теорему о производной сложной функции;

2.4. теорему о производной обратной функции.

Запишите:

2.5. формулы дифференциалов суммы, разности, произведения и частного двух функций;

2.6. формулу для производной функции, заданной параметрически;

2.7. формулу n-ной производной произведения двух функций.

3. Теоремы с доказательством.

Докажите теорему

3.1. о производных суммы, разности, произведения и частного двух функций;

3.2. о производной сложной функции;

3.3. о производной обратной функции.

3.4. Выведите формулу производной функции, заданной параметрически.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Докажите, что если $\exists f'\left(x_0\right)$, то $f\left(x_0 + \Delta x\right) = f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\Delta x + o\left(\Delta x\right)$ при $\Delta x \to 0$.

4.2. Докажите, что если существует число A такое, что $f\left(x_0 + \Delta x\right) = f\left(x_0\right) + A \cdot \Delta x + o\left(\Delta x\right)$ при $\Delta x \to 0$, то $\exists f'\left(x_0\right)$ и $f'\left(x_0\right) = A$.

4.3. Пользуясь определением производной, выведите формулы производных функций:
а) $x^n, n \in \mathbb{N}$; б) $\sin x$; в) $\cos x$; г) $\log_a x$; д) a^x.

4.4. Пользуясь теоремой о производных суммы, разности, произведения и частного двух функций выведите формулы для производных функций:
а) $\operatorname{tg} x$; б) $\operatorname{ctg} x$; в) $\operatorname{sh} x$; г) $\operatorname{ch} x$; д) $\operatorname{th} x$; е) $\operatorname{cth} x$.

4.5. Пользуясь теоремой о производной сложной функции, выведите формулу для производной функции x^α, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.6. Пользуясь определением производной, найдите производную функции в данной точке:
а) $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 4$; б) $y = x|x|$ в точке $x = 0$.

4.7. Найдите односторонние производные $f'\left(x_0 + 0\right)$ и $f'\left(x_0 - 0\right)$ функции:

а) $f(x) = |x|,\ x_0 = 0;\ x_0 = 1$; б) $f(x) = x \operatorname{sgn} x,\ x_0 = 0$; в) $f(x) = x^2 \operatorname{sgn} x,\ x_0 = 0$;

г) $f(x) = |x - 1| e^x,\ \ x_0 = 1$.

4.8. Найдите первые производные и первые дифференциалы функций:

а) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$; б) $y = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x)$

в) $y = e^{x^2}\cos 2x$;

г) $y = x^{\sin x}$;

д) $y = e^{e^x} + x^{e^x}$;

е) $y = \ln^3\left(\ln^2(\ln x)\right)$;

ж) $y = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;

з) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$;

и) $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)$;

к) $y = \sin x^{\cos x}$.

4.9. Пусть $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \le x_0 \\ ax+b, & x > x_0 \end{cases}$, где функция $f(x)$ дифференцируема слева в точке $x = x_0$. При каком выборе коэффициентов a и b функция $F(x)$ будет дифференцируемой в точке x_0?

4.10. При каких значениях a и b функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|}, & |x| > 2, \\ a + bx^2, & |x| < 2 \end{cases}$ является дифференцируемой на всей числовой прямой?

4.11. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0, то $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \ne 0$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

4.12. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, то существует число A такое, что $\dfrac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \ne 0$, где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

4.13. Найдите дифференциалы n-го порядка функции $f(x)$:

а) $f(x) = \ln(x^2 + x)$;

б) $f(x) = x^2 \sin 2x$, $n = 20$;

в) $f(x) = xe^{5x}$, $n = 11$;

г) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $n = 8$.

4.14. Используя теорему о производной обратной функции, выведите формулу для производной функции $f(x)$:

а) $f(x) = \arcsin x$; б) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; в) $f(x) = \ln x$.

4.15. Найдите производную n-го порядка функции $f(x)$:

а) $f(x) = x\ln x, n = 20$;

б) $f(x) = \sqrt{x}, n = 30$;

в) $f(x) = xe^x, n = 30$;

г) $f(x) = 1/\sqrt{x}, n = 40$;

д) $f(x) = x\sin x, n = 12$;

е) $f(x) = x^2e^x, n = 100$;

ж) $f(x) = x^2\sin x, n = 200$;

з) $f(x) = x\cos x, n = 60$;

и) $f(x) = x^2\cos x, n = 71$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Используя теорему о производной сложной функции и тождество $f(f^{-1}(x)) = x$, выведите формулу производной обратной функции.

5.2. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x\cdot(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x \ne 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ имеет производную в точке $x = 0$ и найдите её значение.

5.3. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{x+1}, & x > 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите её значение.

5.4. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x\cdot\left(1-x^2\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ имеет производную в точке $x=0$ и найдите её значение.

5.5. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x^{1-2x}, & x>0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x=0$ и найдите её значение.

5.6. Докажите, что функция $f(x)=\begin{cases} x^{1+\sqrt{2x}}, & x>0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x=0$ и найдите её значение.

5.7. Пусть $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$. Докажите, что $\exists\ f'(x)$ при $x\neq 0$, $\exists\ f'(0)$, но $\nexists\ \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

5.8. Пусть $f(x)=\begin{cases} x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$. Докажите, что $\exists\ f'(x)$ при $x\neq 0$, $\exists\ f'(0)$, но $\nexists\ \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

5.9. Пусть $f(x)=\begin{cases} x^3\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$. Докажите, что $\exists\ f'(x)$ при $x\neq 0$, $\exists\ f'(0)$, но $\nexists\ \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

5.10. Пусть $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$. Докажите, что $\exists\ f'(x)$ при $x\neq 0$, $\exists\ f'(0)$, но $\nexists\ \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

5.11. Пусть $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(e^{-\frac{1}{x}}\right), & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$. Докажите, что $\forall x\ \exists\ f'(x)$, $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f'(x)$. Найдите $f'(0)$.

5.12. Пусть $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$. Найдите $f'(0)$.

5.13. Пусть $f(x)=\begin{cases} e^{-\left|\frac{1}{x^3}\right|}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$. Найдите $f'(0)$.

Тема 4. Неопределенный и определенный интегралы.

1. Определения.

Сформулируйте определение:

1.1. первообразной данной функции;
1.2. неопределенного интеграла данной функции;
1.3. интегральной суммы для данной функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$;
1.4. предела интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю;
1.5. определенного интеграла от функции $f(x)$ по сегменту $[a,b]$;
1.6. нижней суммы (Дарбу);
1.7. верхней суммы (Дарбу);
1.8. предела верхних (нижних) сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю;
1.9. верхнего (нижнего) интеграла Дарбу.

2. Основные теоремы и формулы (без доказательства)

2.1. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям для неопределенного интеграла.
2.2. Сформулируйте теорему об интегрировании методом замены переменной для неопределенного

интеграла.

2.3. Перечислите свойства сумм Дарбу.

2.4. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ в терминах нижнего и верхнего интегралов Дарбу.

2.5. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$ в терминах нижних и верхних сумм.

2.6. Перечислите известные Вам классы интегрируемых функций.

2.7. Перечислите свойства определенного интеграла.

2.8. Запишите формулу среднего значения для определенного интеграла и сформулируйте достаточные условия ее применимости.

2.9. Запишите формулу Ньютона – Лейбница и сформулируйте достаточные условия ее применимости.

2.10. Запишите формулу замены переменной для определенного интеграла и сформулируйте достаточные условия ее применимости.

2.11. Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла и сформулируйте достаточные условия ее применимости.

3. **Теоремы с доказательством**.

3.1. Докажите теорему об интегрировании методом замены переменной для неопределенного интеграла.

3.2. Докажите теорему об интегрировании по частям для неопределенного интеграла.

3.3. Докажите, что для данного разбиения отрезка нижняя (верхняя) сумма является точной нижней (верхней) гранью множества интегральных сумм.

3.4. Пусть разбиение T' отрезка $[a;b]$ получено из разбиения T путем добавления к нему новых точек. Докажите, что нижняя сумма функции $f(x)$ для разбиения T' не меньше, чем нижняя сумма для разбиения *T*. Получите оценку разности нижних сумм этих разбиений.

3.5. Пусть разбиение T' отрезка $[a;b]$ получено из разбиения *T* путем добавления к нему новых точек. Докажите, что верхняя сумма функции $f(x)$ для разбиения T' не больше, чем верхняя сумма для разбиения T. Получите оценку разности верхних сумм этих разбиений.

3.6. Докажите, что нижняя сумма функции $f(x)$ для любого разбиения отрезка $[a;b]$ не превосходит верхней суммы той же функции $f(x)$ для любого другого разбиения *T'* отрезка $[a;b]$.

3.7. Докажите, что множество нижних сумм функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a;b]$ ограничено сверху.

3.8. Докажите, что множество верхних сумм функции $f(x)$ для всевозможных разбиений отрезка $[a;b]$ ограничено снизу.

3.9. Докажите, что нижний интеграл Дарбу не превосходит верхнего интеграла.

3.10. Докажите лемму Дарбу.

3.11. Докажите теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a;b]$ в терминах нижнего и верхнего интегралов Дарбу.

3.12. Докажите теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a;b]$ в терминах нижних и верхних сумм.

3.13. Докажите теорему об интегрируемости непрерывной на сегменте функции.

3.14. Докажите теорему об интегрируемости некоторых разрывных на сегменте функций.

3.15. Докажите теорему об интегрируемости монотонной на сегменте функции.

3.16. Докажите теорему об интегрируемости суммы и разности двух интегрируемых функций.

3.17. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a;b]$. Докажите, что $cf(x)$, где $c = const.$, тоже интегрируема на $[a;b]$, причем $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$.

3.18. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a;b]$. Докажите, что эта функция интегрируема на любом сегменте $[c,d]$, содержащемся в сегменте $[a;b]$.

3.19. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на сегментах $[a;c]$ и $[c;b]$, $a < c < b$. Докажите, что эта функция интегрируема на сегменте $[a,b]$, причем $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

3.20. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$. Докажите, что $|f(x)|$ тоже интегрируема на $[a,b]$.

3.21. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, $a < b$. Докажите, что $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

3.22. Докажите теорему о формуле среднего значения для определенного интеграла.

3.23. Докажите теорему о существовании первообразной непрерывной функции.

3.24. Докажите теорему о формуле Ньютона – Лейбница.

3.25. Докажите теорему об интегрировании методом замены переменной для определенного интеграла.

3.26. Докажите теорему об интегрировании по частям для определенного интеграла.

4. **Вопросы и задачи**.

4.1. Вычислите интегралы:

$\int (x^3+1)x^2dx$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$;

$\int \frac{x^2dx}{1+x^2}$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{3+8x^2}}$;

$\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$;

$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$;

$\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x-2}$;

$\int \frac{x^2dx}{x^2+x-2}$;

$\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)}dx$;

$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}dx$;

$\int \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}$;

$\int \sin^3 x dx$;

$\int (x+1)\cos 2x dx$;

$\int xe^{-x}dx$;

$\int x^5 e^{x^3}dx$;

$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$;

$\int e^x \cos x dx$;

$\int \sqrt{x}\ln x dx$;

$\int x\ln\sqrt{x}dx$;

$\int \sin(\ln x)\,dx$;

$\int \ln\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)dx$;

$\int \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)dx$;

$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$;

$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$.

4.2. Вычислите интегралы:

$\int\limits_0^1 \frac{dx}{3+x^2}$;

$\int\limits_0^1 x(1-x)^{10}\,dx$;

$\int\limits_1^2 \frac{dx}{e^x-1}$;

$\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$;

$\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\left(x^2+x+1\right)(x-1)}$;

$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^3-8}$;

$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$;

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$;

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{3/2}};$$

$$\int_1^{e} \ln x dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-x}};$$

$$\int_0^{2} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx;$$

$$\int_1^{e} \frac{\sin(\ln x)}{x}dx \;;$$

$$\int_0^{\pi} \cos^4 x dx;$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2-\sin x};$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx;$$

$$\int_0^{\pi/6} e^{2x}\cos 3x dx;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\cdot\sin^2 x dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}};$$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}};$$

$$\int_0^{\pi/8} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x};$$

4.3. Следует ли из интегрируемости суммы двух функций $f(x)+g(x)$ (разности двух функций $f(x)-g(x)$) интегрируемость $f(x)$ и $g(x)$? Ответ обоснуйте.

4.4. Следует ли из интегрируемости произведения двух функций $f(x)\cdot g(x)$ интегрируемость $f(x)$ и $g(x)$? Ответ обоснуйте.

4.5. Пусть $f(x)$ интегрируема, а $g(x)$ неинтегрируема. Что можно сказать об интегрируемости $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$? Ответы обоснуйте.

4.6. Пусть $f(x)$ неинтегрируема и $g(x)$ неинтегрируема. Что можно сказать об интегрируемости $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$? Ответы обоснуйте.

4.7. Вычислите производные:

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x} \sin\left(t^2\right)dt;$$

$$\frac{d}{dx}\int_a^{b} \sin\left(x^2\right)dx;$$

$$\frac{d}{dx}\int_x^{1} \arcsin\sqrt{t}dt;$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt;$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \ln\left(\frac{2t^2}{1+\operatorname{arctg}^2 t+\sin^4 t}\right)dt;$$

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\operatorname{arctg} x}^{\cos x} e^{-t^2}dt.$$

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Вычислите интегралы: $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$; $\int \frac{\cos(\ln x)dx}{x^2}$; $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$; $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+0,5\cos x}$.

5.2. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом сегменте.

5.3. Приведите пример функции $f(x)$, такой, что $\int\limits_a^b |f(x)|dx$ существует, а $\int\limits_a^b f(x)dx$ не существует.

5.4. Докажите интегрируемость произведения интегрируемых функций.

5.5. Известно, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, $a < b$ и $f(x) \geq 0$. Докажите, что $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$.

5.6. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, $a < b$ и $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$. Докажите, что $\int\limits_a^b f(x)dx > \int\limits_a^b g(x)dx$.

5.7. Известно, что $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$ и $a < b$. Следует ли отсюда, что $f(x) \geq 0$? Ответ обоснуйте.

5.8. Известно, что $\int\limits_a^b f(x)dx > \int\limits_a^b g(x)dx$ и $a < b$. Следует ли отсюда, что $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a,b]$? Ответ обоснуйте.

5.9. Докажите, что если функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a,b]$ и $\inf\limits_{[a,b]} f(x) > 0$, то функция $1/f(x)$ также интегрируема на этом сегменте.

Тема 5. Основные теоремы о непрерывных и дифференцируемых функциях.

1. Определения.

Сформулируйте определение:

1.1. ограниченной на заданном множестве функции;

1.2. точной верхней (точной нижней) грани функции на заданном множестве;

1.3. равномерно непрерывной на промежутке X функции;

1.4. функции, возрастающей (убывающей) в данной точке.

2. Основные теоремы (без доказательства)

Сформулируйте:

2.1. теорему о локальной ограниченности функции, непрерывной в данной точке;

2.2. теорему об устойчивости знака функции, непрерывной в данной точке;

2.3. первую теорему Вейерштрасса;

2.4. вторую теорему Вейерштрасса;

2.5. теорему Кантора;

2.6. достаточное условие возрастания (убывания) дифференцируемой функции в точке;

2.7. теорему Ролля;

2.8. теорему о формуле конечных приращений Лагранжа;

2.9. необходимое и достаточное условие невозрастания (неубывания) дифференцируемой функции на интервале (a,b);

2.10. достаточное условие возрастания (убывания) дифференцируемой функции на интервале (a,b);

2.11. теорему о формуле Коши;

2.12. теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.

2.13. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

2.14. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

3. Теоремы с доказательством.

Докажите теорему:

3.1. о локальной ограниченности функции, имеющей предел в точке;

3.2. об устойчивости знака непрерывной функции;

3.3. о непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах отрезка;

3.4. первую теорему Вейерштрасса;
3.5. вторую теорему Вейерштрасса;

3.6. Кантора;

3.7. о достаточном условии возрастания (убывания) в точке x_0 функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0;

3.8. Ролля;

3.9. о формуле конечных приращений Лагранжа;

3.10. о необходимом и достаточном условии невозрастания (неубывания) дифференцируемой функции на интервале (a,b);

3.11. о достаточном условии возрастания (убывания) дифференцируемой функции на интервале (a,b);

3.12. о формуле Коши;
3.13. о формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме.
3.14. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.
3.15. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

3.16. Докажите теорему о правиле Лопиталя вычисления $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Найдите точку c в формуле конечных приращений Лагранжа для функции $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(3-x^2\right), & 0\le x\le 1,\\ \dfrac{1}{x}, & 1\le x\le 2\end{cases}$ на сегменте $[0;2]$.

4.2. Используя правило Лопиталя, вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$;

б) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-\cos x}{x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}2x$;

д) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(\sin\alpha x)}{\ln(\sin\beta x)}$, $\alpha>0,\ \beta>0$.

4.3. Запишите разложение функции $f(x)$ по формуле Маклорена с остаточным членом $o(x^n)$:

а) $f(x)=\cos x$;

б) $f(x)=e^x$;

в) $f(x)=e^{-x}$;

г) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$;

д) $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$;

е) $f(x)=-\ln(1-x)$;

ж) $f(x)=\ln(1+x)$;

з) $f(x)=\sin x$.

4.4. Разложите функцию $f(x)$ по формуле Маклорена до члена порядка x^n:

а) $f(x)=\sin(\sin x)$, $n=3$;

б) $f(x)=\ln\cos x$, $n=4$;

в) $f(x)=e^{2x-x^2}$, $n=3$;

г) $f(x)=\ln\dfrac{\sin x}{x}$, $n=4$;

д) $\sqrt[n]{a^n+x}$, $n=2$.

4.5. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\operatorname{tg}x}{\ln\left(1+x^3\right)}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что многочлен Тейлора $P_n(x)$ дифференцируемой *n* раз в точке x_0 функции $f(x)$ и все его производные $P_n^{(k)}(x)$ до *n* -го порядка включительно в точке x_0 равны соответственно $f(x_0)$ и $f^{(k)}(x_0)$, $k=1,2,...n$.

5.2. Докажите, что если $\exists f''(0)$, то $f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\dfrac{1}{2}f''(0)\cdot x^2+o\left(x^2\right)$ при $x\to 0$.

5.3. Докажите, что если $\exists f'''(0)$, то $f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\dfrac{1}{2}f''(0)\cdot x^2+\dfrac{1}{6}f'''(0)\cdot x^3+o\left(x^3\right)$ при $x\to 0$.

5.4. Пусть $P_n(x)$ - многочлен Тейлора дифференцируемой *n* раз в точке x_0 функции $f(x)$. Докажите, что $f(x_0+\Delta x)=P_n(x_0)+o\left((\Delta x)^n\right)$.

5.5. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, $f(x_0)=0,\ g(x_0)=0,\ g'(x_0)\neq 0$, то $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

5.6. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дважды дифференцируемы в точке x_0, $f(x_0)=0,\ g(x_0)=0,\ f'(x_0)=0,\ g'(x_0)=0,\ g''(x_0)\neq 0$, то $\exists\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f''(x_0)}{g''(x_0)}$.

5.7. Объясните, в каком месте нарушится ход доказательства первой теоремы Вейерштрасса, если в условии теоремы заменить "сегмент" на "интервал".

5.8. Приведите пример функции $f(x)$, непрерывной и ограниченной на промежутке $[a;+\infty)$, которая не достигает своей точной верхней грани на этом промежутке.

5.9. Докажите, что функция $f(x)=\sqrt{x}$ равномерно непрерывна на полупрямой $(0;+\infty)$.

5.10. Докажите, что функция $f(x)=\operatorname{arctg}\sqrt[3]{x}$ равномерно непрерывна на полупрямой $(0;+\infty)$.

5.11. Докажите, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна на полупрямой $[0;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на этой полупрямой.

5.12. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на полупрямой $[a;+\infty)$, $\exists\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ и $f(a)=b$. Докажите, что функция достигает своих точных граней на этой полупрямой.

Тема 6. Исследование поведения функций и построение их графиков.

1. Определения.

Сформулируйте определение:

1.1. точки локального максимума (минимума) функции $f(x)$;

1.2. направления выпуклости графика функции $y=f(x)$;

1.3. точки перегиба графика функции $y=f(x)$;

1.4. наклонной асимптоты графика функции $y=f(x)$;

1.5. вертикальной асимптоты графика функции $y=f(x)$.

2. Основные теоремы (без доказательства)

Сформулируйте теорему:

2.1. о необходимом условии локального экстремума дифференцируемой функции в данной точке;

2.2. о достаточных условиях локального экстремума дифференцируемой функции в окрестности данной точки;

2.3. о достаточных условиях локального экстремума дважды дифференцируемой функции в данной точке;

2.4. о необходимых и достаточных условиях существования наклонной асимптоты графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$;

2.5. о необходимом условии перегиба графика дважды непрерывно дифференцируемой функции в данной точке;

2.6. о достаточных условиях перегиба графика функции в данной точке, использующих вторую производную функции;

2.7. о достаточных условиях перегиба графика функции в данной точке, использующих третью производную функции.

3. Теоремы с доказательством.

Докажите теорему:

3.1. о необходимом условии локального экстремума дифференцируемой функции в данной точке;

3.2. о достаточных условиях локального экстремума дифференцируемой функции в окрестности данной точки;

3.3. о достаточных условиях локального экстремума дважды дифференцируемой функции в данной точке.

3.4. Докажите, что если $f''(x) < 0$ на интервале $(a;b)$, то график функции $y = f(x)$ на этом интервале направлен выпуклостью вверх.

3.5. Докажите, что если $f''(x) > 0$ на интервале $(a;b)$, то график функции $y = f(x)$ на этом интервале направлен выпуклостью вниз.

Докажите теорему:

3.6. о необходимом условии перегиба графика дважды непрерывно дифференцируемой функции в данной точке;

3.7. о достаточных условиях перегиба графика функции в данной точке, использующих вторую производную функции;

3.8. о достаточных условиях перегиба графика функции в данной точке, использующих третью производную функции;.

4. Вопросы и задачи.

4.1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции, точки локального экстремума, промежутки сохранения направления выпуклости, точки перегиба графика функции $f(x)$, а также нарисуйте эскиз графика функции $f(x)$:

а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$;

б) $f(x) = x \ln x$;

в) $f(x) = \sqrt{x} e^{-x}$;

г) $f(x) = x/(1 - x^2)$.

4.2. Найдите наклонные асимптоты графика функции $f(x)$:

а) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$;

б) $f(x) = x \ln \dfrac{x+1}{x}$;

в) $f(x) = x^2 \ln \dfrac{x+1}{x}$;

г) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$;

д) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

4.3. Для функции $y = f(x)$, заданной параметрически уравнениями $x = a\cos t, \quad y = b \sin t$, $0 \le t \le \pi$, запишите уравнения касательной и нормали к графику функции в точке, соответствующей: а) $t = \dfrac{\pi}{4}$; б) $t = \dfrac{\pi}{2}$.

4.4. Для функции $y = f(x)$, заданной параметрически уравнениями $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 2\pi$, запишите уравнения касательной и нормали к графику функции при: а) $t = \dfrac{\pi}{4}$; б) $t = \pi$.

5. Задачи повышенной трудности.

5.1. Докажите, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна на полупрямой $[0;+\infty)$ и её график имеет наклонную асимптоту при $x \to +\infty$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на этой полупрямой.