

ЗАДАЧИ К ОБЩЕМУ ЗАЧЕТУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ, I СЕМЕСТР.

Предел последовательности

1. Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} (0.8)^n = 0$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n^2}{n+1} = 0$; г) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

2. Докажите, что:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$; в) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5} = 1$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

3. Докажите, что последовательности являются бесконечно большими:

а) $a_n = \sqrt{n}$; б) $a_n = (-1)^n \cdot n$; в) $a_n = n^2 \sin \frac{1}{n}$; г) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

4. Докажите, что последовательность $x_n = \left(1 + (-1)^n\right)n$ неограниченная.

5. Докажите, что последовательность $x_n = \left(1 + (-1)^n\right)n$ не является бесконечно большой.

6. Докажите сходимость последовательности x_n и найдите ее предел, если она определяется рекуррентным соотношением:

а) x_1 - произвольное положительное число, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, $n \geq 1$, $a > 0$.

б) $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$.

7. Найдите все предельные точки последовательностей x_n , а также $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$:

а) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$; б) $x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2\pi n}{3}$; в) $x_n = \cos^n \frac{2\pi n}{3}$.

8. Исследуйте сходимость последовательности $x_n = \frac{n^\alpha - 1}{2n^2 + n + 1}$ в зависимости от параметра α .

9. Найдите: а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}}{n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{3n}$;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3+n)^{\frac{2}{n}}$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3n \sin \frac{1}{2n}$.

Предел и непрерывность функции.

10. Пусть $R(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0}$, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, $m > 0$, $n > 0$. Докажите, что:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \infty$ при $n > m$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \frac{a_n}{b_m}$ при $n = m$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0$ при $n < m$.

11. Найдите: а) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1}$.

12. Найдите: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{(x-2)(x+1)}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-3)^{40} (5x+1)^{10}}{(3x^2-2)^{25}}$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4 + 2x^2 + 3x} - \sqrt{x^4 - 3x^2 + 5x} \right)$.

13. Докажите, что не существует: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} x \operatorname{sgn}(x-1)$; г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$;

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$.

14. Докажите, что функция Дирихле $D(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ — иррац.} \\ 1, & x \text{ — рац.} \end{cases}$ не имеет предела ни в одной точке.

15. Найдите: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x}$.

16. Докажите, что: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > 0$.

17. Укажите все значения $\beta > 0$, для которых верно равенство $f(x) = o(x^\beta)$ при $x \rightarrow +0$:

а) $f(x) = x^2 + x^3$; б) $f(x) = \sin x - x$; в) $f(x) = \cos x - 1$; г) $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$;

д) $f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}$; е) $f(x) = \ln(1+x) - x$; ж) $f(x) = \sqrt{1+x} - 1 - x$.

18. Пользуясь свойствами символа "о — малое", укажите все значения $\beta \geq 0$, для которых верно равенство $f(x) = o\left((x-a)^\beta\right)$:

а) $f(x) = o\left(-5x + x^2 + o(-5x + x^2)\right)$ при $x \rightarrow +0$;

б) $f(x) = (x-1)o\left((x-1)^2 + o(x-1)\right)$ при $x \rightarrow 1+0$;

в) $f(x) = \frac{1}{3x}o(5x + x^2)$ при $x \rightarrow +0$;

г) $f(x) = \frac{1}{x^2}o\left(2x^4 + o\left(x^4 + 2x^2\right)\right)$ при $x \rightarrow +0$;

д) $f(x) = \frac{o\left(2(x+2)^3\right)}{(x+2)^2} + \frac{o\left(4(x+2)^5\right)}{(x+2)^4}$ при $x \rightarrow -2+0$.

19. Укажите все значения $k \geq 0$, при которых верно равенство $f(x) = o\left(\frac{1}{x^k}\right)$ при $x \rightarrow +\infty$:

а) $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}$; б) $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$; в) $f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$;

г) $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; д) $f(x) = x \cdot o\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$; е) $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$;

ж) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x} - x$; з) $f(x) = \ln \cos\left(\frac{2}{x}\right)$; и) $f(x) = e^{1/\sqrt{x}} - 1$.

20. Напишите формулу Тейлора с центром разложения $x_0 = 0$ и остаточным членом $o(x^n)$ для указанных функций и указанных n : а) $\sin^2(5x + x^2)$, $n = 4$; б) $\cos(4x^2 + x)$, $n = 4$; в) $\ln(1 - x^2 + x)$, $n = 2$; г) $\ln(\cos 2x)$, $n = 2$; д) $\ln(e^{x^2} + x)$, $n = 2$; е) $\sin(\sqrt{\cos x} - 1)$, $n = 2$.
21. Найдите: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{\sin(x - \pi/3)}{1 - 2 \cos x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$;
22. Найдите: г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1 + ax} - \sqrt[n]{1 + bx}}{x}$, $m, n \in \mathbb{N}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2})$;
- е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$.
23. Найдите: а) $\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x$; б) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{\ln x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$.
24. Найдите: а) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.
25. Найдите: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} 2x}{\ln \cos 3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(\pi \sqrt{x^2 + x})$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \log_x 2$.
26. Найдите: а) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})$, $a > 0$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$; в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}$.
27. Найдите точки разрыва функций и укажите их тип: а) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$; б) $f(x) = \frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 5x + 6}$;
- в) $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$; г) $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$; д) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{\ln|x|}$; е) $f(x) = x \ln|x|$.

Дифференцирование

28. Пользуясь определением производной, найдите производную функции $f(x)$ в точке x_0 :
- а) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 4$; б) $f(x) = x|x|$, $x_0 = 0$; в) $f(x) = x^2 \ln|x|$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, $x_0 = 0$.
29. Найдите левую и правую производные функций:
- а) $y = |x|$ в точке $x = 0$; б) $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & \text{при } x \geq 0, \\ e^x & \text{при } x < 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$;
- в) $f(x) = |x - 1|e^x$ в точке $x = 1$; г) $f(x) = \begin{cases} x(1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$;
- д) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$.
30. Найдите производную и дифференциал функции $f(x)$:
- а) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$; б) $f(x) = \sin^2(\cos x) + \cos^2(\sin x)$; в) $f(x) = e^{x^2} \cos 2x$;

г) $f(x) = x^{\sin x}$; д) $f(x) = e^{e^x} + x^{e^x}$; е) $f(x) = \ln^3(\ln^2(\ln x))$;

ж) $f(x) = \arctg(x + \sqrt{1+x^2})$;

з) $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}$; и) $f(x) = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}})$; к) $f(x) = \sin x^{\cos x}$.

31. Найдите производную функции $f(x)$ в точке x_0 . Найдите значение дифференциала функции $f(x)$ в точке x_0 для указанного значения dx :

а) $f(x) = \arctg \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $dx = \frac{1}{2}$; б) $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$, $x_0 = \frac{3}{4}$, $dx = \frac{1}{4}$.

32. Найдите первую и вторую производные функции $f(x)$ в точке x_0 . Найдите значения первого и второго дифференциалов функции $f(x)$ в точке x_0 для указанного значения dx :

а) $f(x) = \arctg x$, $x_0 = 1$, $dx = \frac{1}{2}$; б) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $dx = \frac{1}{2}$;

в) $f(x) = \ln(1+x)$, $x_0 = 0$, $dx = \frac{1}{2}$; г) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 16$, $dx = 9$;

д) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x_0 = 0$, $dx = \frac{\pi}{4}$; е) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$, $dx = -\frac{\pi}{2}$.

33. Пусть $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq x_0, \\ px + q, & x > x_0, \end{cases}$ причем функция $f(x)$ имеет левую производную в точке x_0 .

При каком выборе коэффициентов p и q функция $F(x)$ будет: а) непрерывной в точке x_0 ? б) дифференцируемой в точке x_0 ?

34. Пусть $F(x) = \begin{cases} px^2 + q, & x \leq 2, \\ \frac{4}{x}, & x > 2. \end{cases}$ При каком выборе коэффициентов p и q функция $F(x)$

будет: а) непрерывной; б) дифференцируемой на промежутке $(-\infty, +\infty)$?

35. Заменяя функцию (подберите ее самостоятельно) многочленом Тейлора $P_n(x, x_0)$, найдите приближенное значение числа A без калькулятора: а) $A = \sqrt[3]{1,01}$, $n = 2$;

б) $A = \arctg \frac{11}{10}$, $n = 2$; в) $A = e^{\frac{1}{5}}$, $n = 2$.

36. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, заданной параметрически

уравнениями $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $0 \leq t \leq \pi$, при: а) $t = \frac{\pi}{4}$; б) $t = \frac{\pi}{2}$.

37. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, заданной параметрически

уравнениями $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $-\infty < t < +\infty$, при: а) $t = \frac{\pi}{4}$; б) $t = \frac{\pi}{2}$.

38. Найдите дифференциал n -го порядка функции $f(x)$: а) $f(x) = \ln(1+x)$; б) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$;

в) $f(x) = x^{n-1} + x^n + x^{n+1}$; г) $f(x) = e^{3x+2}$.

39. Найдите дифференциал n -го порядка функции $f(x)$ для указанного n :

а) $f(x) = x^2 \sin 2x$, $n = 20$; б) $f(x) = xe^{5x}$, $n = 11$; в) $f(x) = x^2 \ln(1+x)$, $n = 12$.

40. Найдите точку c в формуле конечных приращений Лагранжа $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ для

$$\text{функции } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(3 - x^2), & 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & 1 \leq x \leq \infty \end{cases} \quad \text{на сегменте } [0; 2].$$

41. Используя правило Лопиталя, найдите: а) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$; б) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{ctg} 2x$; д) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(\sin \alpha x)}{\ln(\sin \beta x)}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

42. Напишите формулу Тейлора с многочленом Тейлора порядка n и остаточным членом в форме Пеано с центром разложения в точке x_0 для функций:

а) $f(x) = (2 + x)^3$, $x_0 = 1$, $n = 3$; б) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $n = 3$;

в) $f(x) = \sqrt{1 - x}$, $x_0 = 0,36$; $n = 2$; г) $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$, $n = 3$;

д) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $n = 4$; е) $f(x) = \frac{1}{1 + x}$, $x_0 = 1$, $n = 4$.

43. Разложите по формуле Маклорена до члена указанного порядка n включительно следующие функции: а) $f(x) = \sin(\sin x)$, $n = 3$; б) $f(x) = \ln \cos x$, $n = 4$; в) $f(x) = e^{2x - x^2}$, $n = 3$;

г) $f(x) = \ln \frac{\sin x}{x}$, $n = 4$; д) $\sqrt{4 + x}$, $n = 2$.

44. Найдите значение многочлена Тейлора $P_n(x, x_0)$ функции $f(x)$ для указанных значений x_0 , x и n :

а) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, $x = 9$, $n = 2$;

б) $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$, $x = \frac{1}{10}$, $n = 3$;

в) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $x = 1$, $n = 4$;

г) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $x = 2$, $n = 5$.

45. Напишите выражение остаточного члена $R_{n+1}(x, x_0)$ в форме Лагранжа формулы Тейлора для функции $f(x)$ для указанных значений x_0 , x и n :

а) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $x = 1$, $n = 3$;

б) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $x = 2$, $n = 5$;

в) $f(x) = \ln(1 + x)$, $x_0 = 0$, $x = \frac{1}{10}$, $n = 3$.

46. Найдите: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x^e}{(x - e)^2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \operatorname{tg} x}{\ln(1 + x^3)}$;

д) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{2x^2}$; ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$;

з) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right)$.

Исследование поведения функций и построение графиков

47. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$, точки локального экстремума, промежутки сохранения направления выпуклости, точки перегиба. Нарисуйте эскиз графика

функции: а) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9$; б) $f(x) = x \ln x$; в) $f(x) = x^2 \ln x$; г) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$;

д) $f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$; е) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$; ж) $f(x) = x^2(5-x)^3$.

48. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)$, точки локального экстремума.

Найдите наклонные асимптоты графика функции. Нарисуйте эскиз графика функции:

а) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$; б) $f(x) = x \ln \frac{x+1}{x}$; в) $f(x) = x^2 \ln \frac{x+1}{x}$; г) $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$;

д) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; е) $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$; ж) $f(x) = x \cos \frac{1}{\sqrt{x}}$; з) $f(x) = \sqrt[3]{x^2(5-x)^3}$;

и) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{(x-3)^5}{x^2}}$.

Интегрирование.

49. Найдите: а) $\int (x^3 + 1)x^2 dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$; в) $\int \frac{x^2 dx}{1+x^2}$; г) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+8x^2}}$;

д) $\int \sin^3 x dx$; е) $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$; ж) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$; з) $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}$.

50. Найдите: а) $\int_0^1 x(1-x)^{10} dx$; б) $\int_0^3 x^7(3-x)^5 dx$; в) $\int_0^1 \frac{dx}{3+x^2}$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin^2 x dx$;

д) $\int_0^{\pi} \cos^4 x dx$; е) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$; ж) $\int_1^2 \frac{dx}{e^x - 1}$; з) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$; и) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

51. Найдите: а) $\int (x+1) \cos 2x dx$; б) $\int x e^{-x} dx$; в) $\int x^5 e^{x^3} dx$; г) $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$;

д) $\int e^x \cos x dx$; е) $\int \cos \ln x dx$; ж) $\int x \sin \ln x dx$.

52. Найдите: а) $\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$; б) $\int_0^{\pi/6} e^{2x} \cos 3x dx$; в) $\int_1^e \ln x dx$; г) $\int_0^2 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$.

53. Найдите: а) $\int_1^e \frac{d}{dx}(x^2 \ln x) dx$; б) $\int_{\pi}^{2\pi} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx$.

54. Найдите: а) $\int_{-1}^1 |x| dx$; б) $\int_{-1}^1 \operatorname{sign} x dx$; в) $\int_{-2}^2 f(x) dx$, если $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{при } x \geq 0 \\ -2-x & \text{при } x < 0 \end{cases}$.

55. Найдите: а) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; б) $\int \frac{(x-1)dx}{x^2+x-2}$; в) $\int \frac{x^2 dx}{x^2+x-2}$.

56. Найдите: а) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-1)} dx$; б) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

57. Найдите: а) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$; б) $\int_0^1 \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1}$; в) $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}$; г) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3-8}$.

58. Найдите: а) $\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}$; б) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$.

59. Найдите: а) $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x dx$, б) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$;

60. Найдите: а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$; б) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - x}}$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

61. Найдите: а) $\frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx$; б) $\frac{d}{dt} \int_{\sqrt{t}}^0 e^{-x^2} dx$; в) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$; г) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$;

д) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{t dt}{\sqrt{1+t^2}}$.