

# 4. Асимптотические методы

Получение формул, описывающих качественное поведение решения на некотором интервале.

## 1. Метод малого параметра

### 1. Регулярные возмущения

Рассмотрим задачу Коши:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t, \mu), \quad y(0, \mu) = y^0 \quad (1)$$

Пусть параметр  $\mu$  изменяется в некоторой окрестности значения  $\mu=0$ . Предположим, что при  $\mu=0$  решение задачи (1) известно. Нас интересует решение при  $\mu \neq 0$ , но достаточно малых.

## Теорема

Если функции  $f, \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$  непрерывны по всем переменным  $y, t, \mu$  в  $D$ , где

$$D \equiv \left\{ t \leq a, |y - y^0| \leq b, |\mu| \leq c \right\},$$

то решение задачи (1) непрерывно по  $t$  и параметру  $\mu$  при  $t \in [0, T], |\mu| \leq c$ . Здесь  $T = \min \{a, (b/M)\}$ ,  $M : |f(y, t, \mu)| \leq M$ .

Рассмотрим задачу (1) при  $\mu=0$ :

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = f(\bar{y}, t, 0), \quad \bar{y}(0) = y^0. \quad (2)$$

Из теоремы следует, что при  $t \in [0, T]$

$$y(t, \mu) = \bar{y}(t) + \varepsilon(t, \mu), \quad (3)$$

где  $\varepsilon(t, \mu) \Rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$ .

**Формула (3) – асимптотическая формула (асимптотическое представление) решения  $y(t, \mu)$  по малому параметру  $\mu$ .**

**Асимптотическими формулами по малому параметру мы будем называть такие формулы, в которых некоторые члены, называемые **остаточными членами**, выписываются не точно, а указываются лишь их свойства при  $\mu \rightarrow 0$ , например порядок стремления к нулю при  $\mu \rightarrow 0$ . В реальных задачах  $\mu$  является малой, но не бесконечно малой величиной. Поэтому **асимптотические формулы произвольную степень точности обеспечить не могут и в этом их принципиальный недостаток**. Асимптотические формулы удобны тогда, когда нужно получить качественную картину**

Разложим функцию  $f(y, t, \mu)$  в ряд по степеням  $\mu$

(предполагая, что она обладает нужным числом производных по  $\mu$  и  $y$ ):

$$f(y, t, \mu) = f_0(y, t, 0) + \mu f_1(y, t, 0) + \mu^2 f_2(y, t, 0) + \dots, \quad (4)$$

где  $f_k(y, t, 0)$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) - тейлоровские коэффициенты.

Представим решение задачи (1) в виде **формального степенного ряда**:

$$y(t) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \mu^2 y_2(t) + \dots \quad (5)$$

(1),(4),(5) $\Rightarrow$

$$y_0' + \mu y_1' + \mu^2 y_2' + \dots = f_0(y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots, t, 0) + \mu f_1(y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots, t, 0) + \dots \quad (6)$$



Считая, что  $y, t$  изменяются в ограниченной области  $D$  и  $|\mu| \leq \mu_0$ , получим оценку приближенного решения, даваемого конечной суммой

$$s_K = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots + \mu^K y_K. \quad (9)$$

Пусть  $u = y - s_k \Rightarrow$

$$u' + s_k' = f(u + s_k, t, \mu) = f(s_k, t, \mu) + \frac{\partial f^*}{\partial y}(y^*, t, \mu)u \Rightarrow$$

$$u' - \frac{\partial f^*}{\partial y}u = -s_k' + f(s_k, t, \mu) \equiv -R_k, \quad (10)$$

где  $R_K = s_K' - f(y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots + \mu^K y_K, t, \mu) = \underline{\underline{O}}(\mu^{k+1})$ ,

так как все члены разложения  $f$  до  $\mu^k$  включительно учтены уравнениями (8) для  $y_i (i=0, 1, \dots, k) \Rightarrow$

$$\begin{cases} u' + p(t)u = \underline{O}(\mu^{k+1}), & t > 0, \\ u(0) = 0, \end{cases} \quad (11)$$

где  $p(t) = -(\partial f^* / \partial y)$ ,  $|p(t)| < K$ .

**Запишем и оценим решение задачи (11):**

$$u(t) = \int_0^t \underline{O}(\mu^{k+1}) e^{-\int_{\tau}^t p(\theta) d\theta} d\tau \Rightarrow \quad (12)$$

$$|u(t)| \leq C \mu^{k+1} \int_0^t e^{k|t-\tau|} d\tau \Rightarrow \quad (13)$$

$$\left| y - \sum_{i=0}^k \mu^i y_i \right| \leq A \mu^{k+1}, \quad (14)$$

**то есть получено решение с погрешностью  $\sim \mu^{k+1}$ .**

Ряд (5) называется асимптотическим рядом или асимптотическим разложением по малому параметру  $\mu$  для  $y(t, \mu)$ .

Подчеркнем, что  $\varepsilon_{k+1}(t, \mu) = \underset{=}{O}(\mu^{k+1})$  при фиксированном  $k$  и  $\mu \rightarrow 0$ . Если же  $\mu$  фиксировано, а  $k \rightarrow \infty$ , то  $\varepsilon_{k+1}(t, \mu)$  может предела не иметь, т.е. построенный ряд (5) сходящимся, вообще говоря, не является.

Малые члены, отбрасываемые в уравнении, называются возмущениями, уравнение (2) - невозмущенным уравнением, а уравнение (1) - возмущенным. Если  $\mu$  входит в  $f(y, t, \mu)$  регулярным (непрерывным) образом, то возмущения называются регулярными возмущениями.

## 2. Сингулярные возмущения

Уравнение движения маятника в среде с сопротивлением:

$$\begin{cases} \mu y'' + \alpha y' + ky = f(t), & t > 0, \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} y(0) = y_0^0; & y'(0) = y_1^0, \end{cases} \quad (16)$$

где  $\mu = I$  – момент инерции тела относительно оси вращения.

Если  $\mu=0$ , то порядок уравнения (15) меняется и оба условия (16) учесть уже нельзя. Поэтому в окрестности начальной точки правильной модели мы не получим.

В данном случае говорят о нерегулярной или сингулярной зависимости от  $\mu$  и о сингулярных возмущениях.

**Рассмотрим задачу Коши:**

$$\begin{cases} \mu \frac{dy}{dt} = f(y, t), & 0 < t \leq T, \\ y(0) = y^0, \end{cases} \quad (17)$$

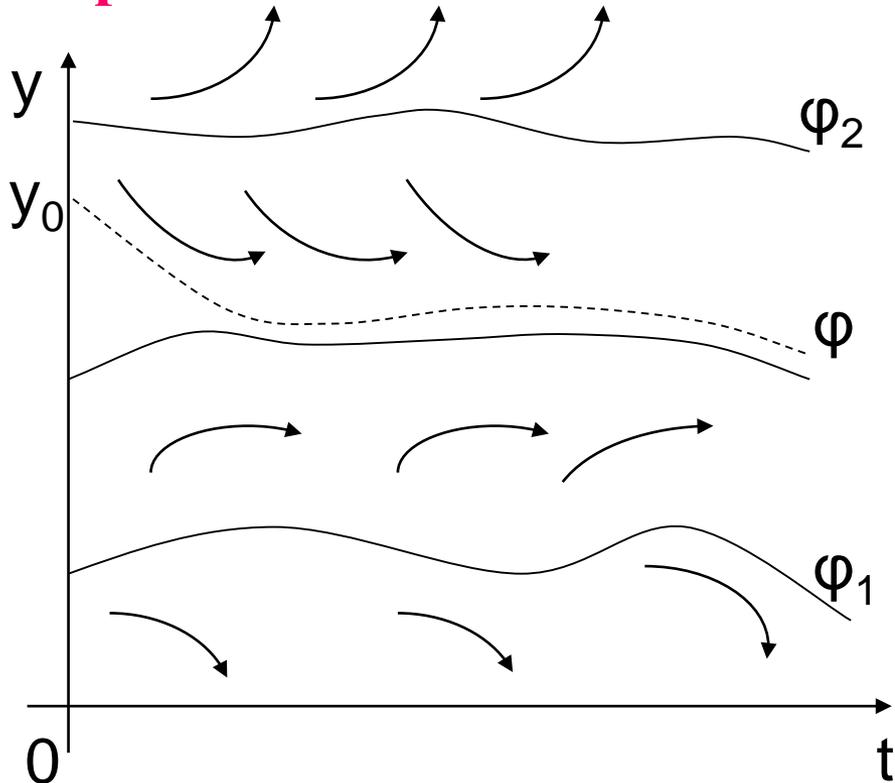
$$y(0) = y^0, \quad (18)$$

**Вырожденное уравнение ( $\mu=0$ ):**  $f(y, t) = 0$  (19)

**может иметь несколько решений  $\bar{y}_i = \phi_i(t)$ . К какому из них будет сходиться решение  $y(t)$  при  $\mu \rightarrow 0$  ?**

**Корень  $\bar{y} = \phi(t)$  называется устойчивым при  $0 \leq t \leq T$  если выполняется условие:**  $\frac{\partial f}{\partial \phi}(\phi(t), t) < 0$ .

**Областью влияния (притяжения) корня  $\phi$  называется область, в которой интегральные кривые направлены к корню.**



### Теорема

**Если  $\bar{y} = \phi(t)$  - устойчивый корень уравнения (19), а начальное значение лежит в его области влияния, то решение  $y(t, \mu)$  задачи (17),(18) существует на отрезке  $[0, T]$  и для него выполняется предельное**

**соотношение  $\lim_{\mu \rightarrow 0} y(t, \mu) = \phi$  при  $0 < t \leq T$ .**

Область, в которой решение задачи (17)-(18)  $y(t, \mu)$  сильно отличается от решения  $\bar{y} = \phi(t)$  вырожденного уравнения (19), называется пограничным слоем.

Асимптотическое представление для задачи (17)-(18) имеет вид:

$$y(t, \mu) = \bar{y}(t) + \varepsilon(t, \mu), \quad (20)$$

но в отличие от регулярного случая остаточный член  $\varepsilon(t, \mu)$  уже не является равномерно малой величиной.

При достаточной гладкости правых частей можно получить асимптотическое представление для решения задачи (17),(18) с остаточным членом  $\underline{O}(\mu^{k+1})$ , но кроме степенных по  $\mu$  регулярных членов оно будет содержать пограничные члены, зависящие от  $\mu$  не степенным образом.

**Пограничные члены имеют заметную величину при  $t=0$  и быстро убывают с ростом  $t$ :**

$$y(t, \mu) = y_0(t) + \mu y_1(t) + \dots + \Pi_0(\tau) + \mu \Pi_1(\tau) + \dots, \quad (21)$$

где  $\tau = t/\mu$ . Пусть  $f = F + \mathfrak{F}$ , где

$$F = f(y_0(t) + \mu y_1(t) + \dots, t),$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{F} = & f(y_0(\mu\tau) + \mu y_1(\mu\tau) + \dots + \Pi_0(\tau) + \mu \Pi_1(\tau) + \dots, \mu\tau) - \\ & - f(y_0(\mu\tau) + \mu y_1(\mu\tau) + \dots, \mu\tau), \end{aligned} \quad (22)$$

$$F = F_0(t) + \mu F_1(t) + \dots; \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0(\tau) + \mu \mathfrak{F}_1(\tau) + \dots \quad (23)$$

**(17),(23)=>**

$$\mu \frac{dy}{dt} = F + \mathfrak{S} \quad (24)$$

(21),(23),(24)=>

$$\begin{aligned} & \mu \frac{dy_0}{dt} + \mu^2 \frac{dy_1}{dt} + \dots + \frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} + \mu \frac{\partial \Pi_1}{\partial \tau} + \dots = \\ & = F_0 + \mu F_1 + \dots + \mathfrak{S}_0 + \mu \mathfrak{S}_1 + \dots \end{aligned} \quad (25)$$

(25)=>

$$F_0(t) = f(y_0(t), t) = 0 \quad (26) \qquad \frac{dy_0}{dt} = F_1(t) \quad (27)$$

$$\frac{d\Pi_0}{d\tau} = \mathfrak{S}_0(\tau) \quad (28) \qquad \frac{d\Pi_1}{d\tau} = \mathfrak{S}_1(\tau) \quad (29)$$

(28) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}_0(\tau) &= \mathfrak{S}|_{\mu=0} = f(y_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) - f(y_0(0), 0) = \\ &= f(y_0(0) + \Pi_0(\tau), 0)\end{aligned}\quad (30)$$

$$\begin{aligned}y(0, \mu) &= y_0(0) + \mu y_1(0) + \dots + \Pi_0(0) + \mu \Pi_1(0) + \dots = \\ &= y^0 = y_0^0 + \mu y_0^1 + \dots\end{aligned}\quad (31)$$

(31) $\Rightarrow$

$$\Pi_0(0) = y_0^0 - y_0(0)\quad (32)$$

(28),(30),(32) $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} &= f(y_0(0) + \Pi_0(\tau), 0), \quad \tau > 0, \\ \Pi_0(0) &= y_0^0 - y_0(0) \end{aligned} \right. \quad (33)$$

(34)

(27) $\Rightarrow$

$$\frac{dy_0}{dt} = f_y(y_0(t), t) \cdot y_1(t) \quad (35)$$

(29), (31)  $\Rightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \tau} = f_y(y_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) \cdot \Pi_1(\tau) + Q_1, \quad \tau > 0, \end{array} \right. \quad (36)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_1(0) = y_1^0 - y_1(0), \end{array} \right. \quad (37)$$

где

$$Q_1 = (f_y(y_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) - f_y(y_0(0), 0))(y_0'(0)\tau + y_1(0)) + (f_t(y_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) - f_t(y_0(0), 0))\tau.$$

(26) $\Rightarrow y_0(t) \Rightarrow$  (33), (34) $\Rightarrow \Pi_0(\tau)$ ; (35) $\Rightarrow y_1(t) \Rightarrow$  (36), (37) $\Rightarrow \Pi_1(\tau)$ .

**В общем случае получаем цепочку:**

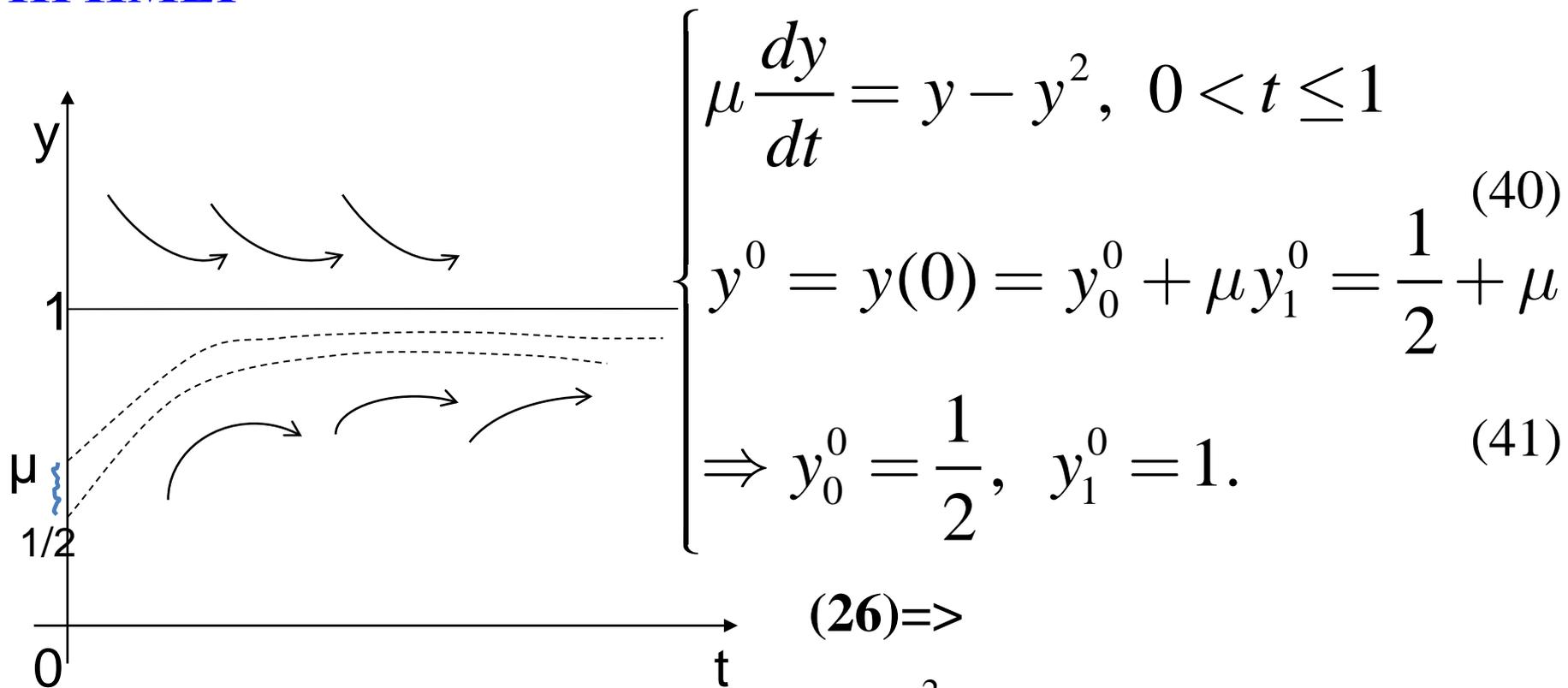
$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_i}{\partial \tau} = f_y(y_0(0) + \Pi_0(\tau), 0) \cdot \Pi_i(\tau) + Q_i, & \tau > 0, \\ \Pi_i(0) = y_i^0 - y_i(0), & i = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (38)$$

где  $Q_i$  - известные выражения, а  $y_i(t)$  определяются из алгебраических уравнений.

**В теории сингулярных уравнений доказывается, что ряд (21) является асимптотическим рядом и имеет место оценка:**

$$\left| y(t, \mu) - \sum_{i=0}^k \left( \mu^i y_i(t) + \mu^i \Pi_i(t/\mu) \right) \right| = \underset{=}{O}(\mu^{k+1}). \quad (39)$$

## ПРИМЕР



(26)  $\Rightarrow$

$$y - y^2 = 0 \Rightarrow \bar{y}_1 = 0, \bar{y}_2 = 1$$

$$f_y \Big|_{y=1} = 1 - 2y \Big|_{y=1} < 0 \Rightarrow \bar{y} = 1 \text{ - устойчивый корень } \Rightarrow$$

$$y_0(t) = 1.$$

**(33),(34)**=>

$$(41) \Rightarrow y_0^0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \tau} = (1 + \Pi_0) - (1 + \Pi_0)^2, \tau > 0, & (42) \\ \Pi_0(0) = y_0^0 - y_0(0) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}. & (43) \end{cases}$$

**(42),(43)**=>

$$\Pi_0(\tau) = -\frac{1}{1 + e^\tau} \Rightarrow y = 1 - \frac{1}{1 + e^{t/\mu}} + \underset{=}{O(\mu)}. \quad (44)$$

$$(35) \Rightarrow y_I(t) = 0, \quad (41) \Rightarrow y_I^0 = 1. \quad (45)$$

**(36),(37),(45)**=>

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Pi_1}{\partial \tau} = \left( 1 - 2 \cdot \left( 1 - \frac{1}{1 + e^\tau} \right) \right) \Pi_1, \quad \tau > 0, \\ \Pi_1(0) = 1. \end{array} \right. \quad (46)$$

(47)

**(46),(47)**=>

$$\Pi_1(\tau) = \frac{4e^\tau}{(1 + e^\tau)^2} \Rightarrow$$
$$y = 1 - \frac{1}{1 + e^{t/\mu}} + \mu \frac{4e^{t/\mu}}{\left( 1 + e^{t/\mu} \right)^2} + \underset{=}{O(\mu^2)} \quad (48)$$

### 3. Метод ВКБ (Венцеля, Крамерса, Бриллюэна)

В квантовой механике, теории колебаний и ряде других областей встречается сингулярно возмущенное уравнение вида:

$$\mu^2 y'' + Q^2(x)y = 0, \quad a < x < b, \quad (1)$$

где  $Q(x) \in C^{(2)}(a, b)$ . Решение уравнения (1) носит колебательный характер, причем при малых  $\mu$  частота колебаний будет очень большой, что качественно отличается от ранее рассмотренных явлений.

**Сделаем замену:**

$$y = \frac{\phi}{\sqrt{Q}} \quad (2)$$

**(1),(2)=>**

$$y'_x = \frac{\phi'_x}{Q^{1/2}} - \frac{\phi Q'}{2Q^{3/2}}, \quad (3)$$

$$y''_{xx} = \frac{\phi''_{xx}}{Q^{1/2}} - \frac{\phi'_x Q'}{Q^{3/2}} - \frac{\phi Q''}{2Q^{3/2}} + \frac{3}{4} \frac{\phi (Q')^2}{Q^{5/2}}.$$

**Перейдем к переменной  $t$ :**

$$t = \frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi \quad (4)$$

(4) $\Rightarrow$

$$\phi'_x = \phi'_t \frac{Q}{\mu}; \quad \phi''_{xx} = \phi''_{tt} \frac{Q^2}{\mu^2} + \phi'_t \frac{Q'}{\mu} \quad (5)$$

(3),(5) $\Rightarrow$

$$\mu^2 y''_{xx} = \left\{ \phi''_{tt} - \left( \frac{\phi Q''}{2Q^3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{\phi (Q')^2}{Q^4} \right) \mu^2 \right\} Q^{3/2} \quad (6)$$

(1),(6) $\Rightarrow$

$$\phi''_{tt} + \phi - \mu^2 P \phi = 0, \quad (7)$$

где  $P = \frac{Q''}{2Q^3} - \frac{3}{4} \cdot \frac{(Q')^2}{Q^4}$  - непрерывная функция.

## Вырожденное уравнение при $\mu=0$

$$\bar{\phi}_{tt}'' + \bar{\phi} = 0, \quad (8)$$

имеет решение

$$\bar{\phi} = A \sin t + B \cos t \quad (9)$$

Сравним решения  $\phi$  и  $\bar{\phi}$  уравнений (7) и (9), для которых

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{при } x=a.$$

Для  $r = \phi - \bar{\phi}$  получим уравнение

$$r'' + r = \mu^2 P r + \mu^2 P \bar{\phi}, \quad (10)$$

решение которого удовлетворяет уравнению:

$$r(t) = \mu^2 \int_0^t \sin(t - \tau) P(\tau) r(\tau) d\tau + F(t), \quad (11)$$

где

$$F(t) = \mu^2 \int_0^t \sin(t - \tau) P(\tau) \bar{\phi}(\tau) d\tau. \quad (12)$$

Решение (11) заведомо существует и единственно при  $\mu^2 t C < 1$ ,

где  $C = \sup_{x \in [a, b]} |P|$ .

Поскольку

$$t = \frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi \leq \frac{Q_0(b-a)}{\mu}, \quad (13)$$

где  $Q_0 = \sup_{x \in [a, b]} Q(x)$ , то решение (11) существует и единственно

при

$$\mu < \frac{1}{C Q_0(b-a)} \quad (14)$$

**При этом условии**

$$|F(t)| \leq \mu^2 t C \bar{\phi}_0 \leq \mu C_1, \quad (15)$$

**где**

$$\bar{\phi}_0 = \sup_{x \in [a, b]} |\bar{\phi}|.$$

**Для**  $r_0 = \sup_{x \in [a, b]} |r|$  **из (11) =>**

$$r_0 \leq \mu^2 t C r_0 + \mu C_1. \quad (16)$$

**(16) =>**

$$r_0 = \underline{\underline{O}}(\mu). \quad (17)$$

(2),(4),(9),(17)=>

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \left\{ \begin{aligned} & A \sin \left( \frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi \right) + \\ & + B \cos \left( \frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi \right) + \underline{O(\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

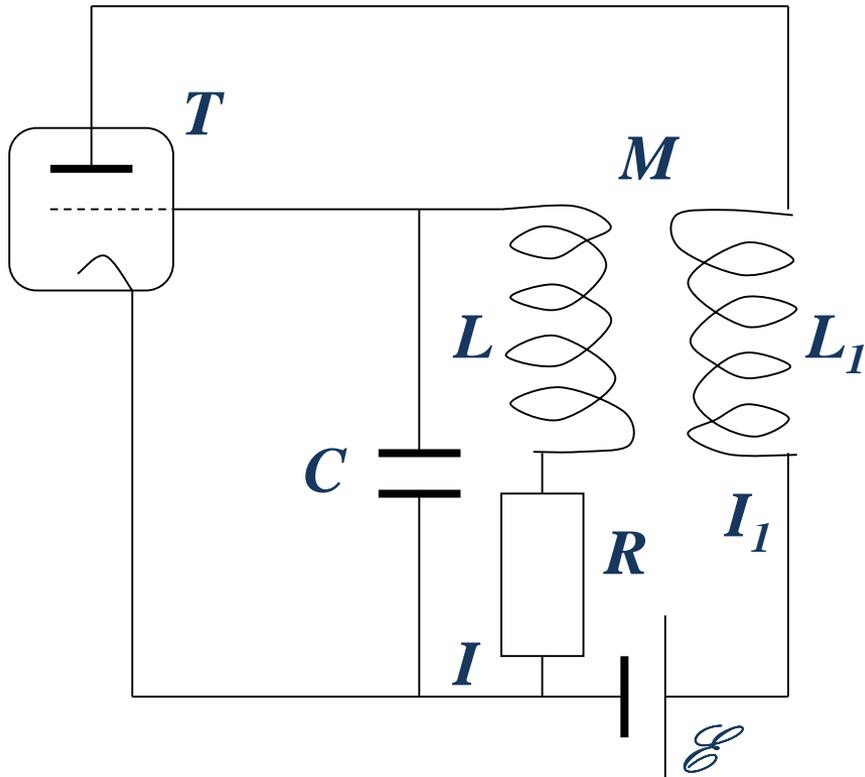
**Замечание.** Для уравнения

$$\mu^2 y'' - Q^2(x) y = 0, \quad a < x < b, \quad (19)$$

**аналогично получаем:**

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{Q(x)}} \left\{ \begin{aligned} & A e^{\frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi} + B e^{-\frac{1}{\mu} \int_a^x Q(\xi) d\xi} + \underline{O(\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

## 4. Метод усреднения Крылова-Боголюбова



Рассмотрим работу **лампового генератора с контуром в цепи сетки**. Если бы триод  $T$  отсутствовал, то в контуре **RLC** могли бы возникнуть **затухающие электромагнитные колебания**. Однако **благодаря связи между катушками  $L$  и  $L_1$  ( $M$ -коэффициент взаимной**

**индукции) в системе возникают автоколебания.**

**Автоколебаниями называются незатухающие колебания в диссипативно – нелинейных системах, которые поддерживаются за счет внешнего источника энергии. Характерной особенностью автоколебаний является отсутствие внешнего периодического воздействия.**

**Для напряжения  $U$  получается дифференциальное уравнение**

$$LC\ddot{U} - MS(U)\dot{U} + RC\dot{U} + U = 0, \quad (1)$$

**где  $S(U) \approx S_0 - S_2U^2$  - сеточная характеристика лампы.**

**Точка обозначает производную по времени.**

**Пусть**

$$\alpha = (MS_0 - RC) / LC, \quad \beta = MS_2 / (MS_0 - RC), \quad (2)$$
$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

$$(1),(2) \Rightarrow \quad \ddot{U} - \alpha(1 - \beta U^2)\dot{U} + \omega_0^2 U = 0 \quad (3)$$

**Введем новые переменные:**

$$\tau = \omega_0 t, \quad y = \sqrt{\beta} U, \quad \varepsilon = \frac{\alpha}{\omega_0} \text{ - малый параметр.} \quad (4)$$

$$(3),(4) \Rightarrow \quad \ddot{y} - \varepsilon(1 - y^2)\dot{y} + y = 0 \quad (5)$$

**Уравнение (5) называется уравнением Ван дер Поля.**

**Рассмотрим задачу Коши:**

$$\begin{cases} \ddot{y} - \varepsilon(1 - y^2)\dot{y} + y = 0, & t > 0, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

**Если искать решение задачи (6), (7) в виде**

$$y(t) = \bar{y}(t) + \varepsilon y_1(t) + \dots, \quad (8)$$

**то**

$$\bar{y}(t) = y_0 \cos t,$$

**а для  $y_1(t)$  получаем резонансный случай**

$$\begin{cases} \ddot{y}_1 + y_1 = -y_0 \left(1 - \frac{1}{4} y_0^2\right) \sin t + \frac{1}{4} y_0^3 \sin 3t, & t > 0, \\ y_1(0) = 0, \quad \dot{y}_1(0) = 0, \end{cases}$$

**и решение неограниченно возрастает по времени:**

$$y_1(t) = \frac{y_0}{2} \left( 1 - \frac{y_0^2}{4} \right) t \cos t - \frac{y_0^3}{32} \sin 3t - \frac{y_0}{2} \left( 1 - \frac{11}{16} y_0^2 \right) \sin t.$$

**Для решения задачи (6), (7) используем метод Н.М.Крылова – Н.Н.Боголюбова (1937г.).**

**Этот метод основан на принципе усреднения, заменяющем точное решение дифференциального уравнения усредненным.**

**Он особенно удобен для исследования нелинейных колебательных процессов.**

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = \varepsilon X(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (9)$$

где  $\varepsilon$  – малый параметр. Пусть  $X$  - достаточно гладкая функция по  $x$  и  $t$  и обладает свойством «возвращаемости» по  $t$ , т.е. существует среднее значение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T X(x, t) dt = \bar{X}(x), \quad (10)$$

например,  $X$  периодическая или почти периодическая функция  $t$ . Если  $X$  периодическая с периодом  $2\pi$  по  $t$  функция,

то (10) $\Rightarrow$

$$\bar{X}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(x, t) dt. \quad (11)$$

**Согласно методу Крылова – Боголюбова,  $m$ -е приближение к решению  $x(t)$  системы (9) имеет вид:**

$$x = \xi + \varepsilon u_1(\xi, t) + \dots + \varepsilon^m u_m(\xi, t), \quad (12)$$

**где  $\xi = \xi(t)$  - решение усредненного уравнения:**

$$\dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi) + \dots + \varepsilon^m A_m(\xi), \quad (13)$$

**а функции  $u_i(\xi, t)$  и  $A_i(\xi)$  подбираются из того условия, чтобы выражение (12) удовлетворяло уравнению (9) с точностью до членов порядка  $\varepsilon^{m+1}$  и чтобы  $u_i(\xi, t)$  обладали по  $t$  той же «возвращаемостью», что и  $X(x, t)$ . Функции  $u_i$  находятся элементарно, а функции  $A_i$  определяются в результате усреднения правой части системы (9) после подстановки в нее выражения (12)**

**Замечание.** При вычислении интегралов (10),(11)  $x$  рассматривается как параметр и усреднение происходит **по явно входящему  $t$** . Разложим правую часть (9) по  $\varepsilon$ :

$$X(x, t) = X_1(x, t) + \varepsilon X_2(x, t) + \dots \quad (14)$$

**Первое приближение:**

$$x_1 = \xi \quad (15)$$

$$\dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi) \quad (16)$$

Подставим (12) в (9) и **учтем члены первого** порядка:

$$\dot{x}_1 = \dot{\xi} + \varepsilon \frac{du_1}{dt} = \varepsilon X_1, \quad (17)$$

где

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial u_1}{\partial t} + \varepsilon A_1 \frac{\partial u_1}{\partial \xi}. \quad (18)$$

**Учитывая члены первого порядка (16) – (18)=>**

$$A_1(\xi) + \frac{\partial u_1}{\partial t} = X_1(\xi, t). \quad (19)$$

**Положим**

$$A_1(\xi) = \bar{X}_1(\xi) \quad (20)$$

**(19),(20)=>**

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = X_1(\xi, t) - \bar{X}_1(\xi) \quad (21)$$

**Второе приближение:**

$$x_2 = \xi + \varepsilon u_1(\xi, t), \quad (22)$$

$$\dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi) + \varepsilon^2 A_2(\xi). \quad (23)$$

Подставим (12) в (9) и учтем (23). Учитывая **члены второго порядка и формулу (22)**, получим:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + A_2(\xi) = F(\xi, t), \quad (24)$$

где

$$F(\xi, t) = X_2(\xi, t) + \frac{\partial X_1}{\partial \xi}(\xi, t)u_1(\xi, t) - A_1(\xi) \frac{\partial u_1(\xi, t)}{\partial \xi}. \quad (25)$$

**Положим**

$$A_2(\xi) = \bar{F}(\xi) \quad (26)$$

**(24)-(26)=>**

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = F(\xi, t) - \bar{F}(\xi). \quad (27)$$

Этот процесс можно продолжить, но обычно ограничиваются одним - двумя приближениями, так как быстро возрастает сложность вычисления  $F$ .

В теории метода Крылова – Боголюбова доказывается, что если  $X(x,t)$  обладает необходимой гладкостью и периодичностью по  $t$  при фиксированном  $x$ , то  $x - x_m = \underline{O}(\varepsilon^m)$  на участке  $0 \leq t \leq \underline{O}(1/\varepsilon)$ .

Запишем уравнение (6) в виде системы и поставим задачу

Коши:

$$\begin{cases} \dot{y} = u, & y(0) = y_0, \\ \dot{u} = \varepsilon(1 - y^2)u - y, & u(0) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

**Будем искать решение системы (28) в виде:**

$$\begin{aligned}y &= a \cos(t + \theta), \\ u &= -a \sin(t + \theta),\end{aligned}\tag{29}$$

где  $a(t)$  и  $\theta(t)$  – функции  $t$ .

**(28),(29) $\Rightarrow$**

$$\left\{ \begin{aligned}\dot{a} &= \varepsilon \left\{ \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{4} \right) - \frac{a}{2} \cos 2(t + \theta) + \frac{a^3}{8} \cos 4(t + \theta) \right\}, \\ \dot{\theta} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{2} \right) \sin 2(t + \theta) - \frac{a^2}{8} \sin 4(t + \theta) \right\}, \\ a(0) &= y_0, \quad \theta(0) = 0.\end{aligned} \right.\tag{30}$$

**Система (30) совпадает с (9), если положить**

$$x = (a, \theta)^T, \quad X(x, t) = X_1(x, t).$$

**Обозначим также**  $\xi = (\bar{a}, \bar{\theta})^T$ .

**Первое приближение:**

$$\dot{\xi} = \varepsilon A_1(\xi), \quad A_1(\xi) = \bar{X}_1(\xi),$$

$$\bar{X}_1(\xi) = \left( \frac{\bar{a}}{2} \left( 1 - \frac{\bar{a}^2}{4} \right), 0 \right)^T \Rightarrow (\dot{\bar{a}}, \dot{\bar{\theta}})^T = \varepsilon \left( \frac{\bar{a}}{2} \left( 1 - \frac{\bar{a}^2}{4} \right), 0 \right)^T \Rightarrow$$

**усредненная система имеет вид:**

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{a}} = \varepsilon \bar{X}(\bar{a}) = \varepsilon \frac{\bar{a}}{2} \left( 1 - \frac{\bar{a}^2}{4} \right), \quad \bar{a}(0) = y_0, \\ \dot{\bar{\theta}} = 0, \quad \bar{\theta}(0) = 0. \end{array} \right. \quad (31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{a}} = \varepsilon \bar{X}(\bar{a}) = \varepsilon \frac{\bar{a}}{2} \left( 1 - \frac{\bar{a}^2}{4} \right), \quad \bar{a}(0) = y_0, \\ \dot{\bar{\theta}} = 0, \quad \bar{\theta}(0) = 0. \end{array} \right. \quad (32)$$

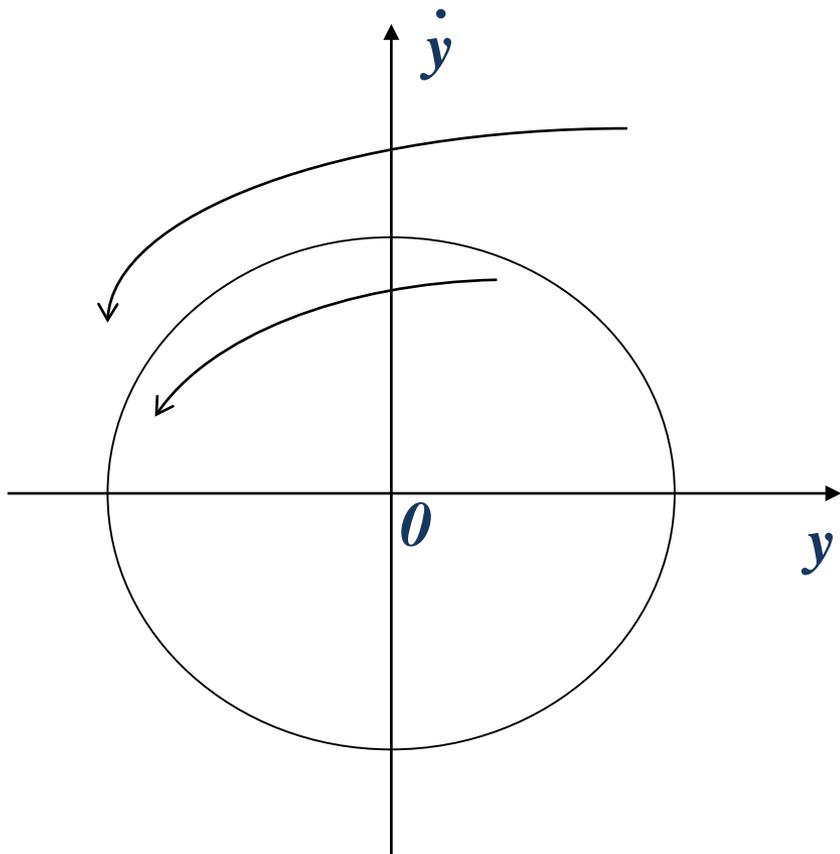
Полагая  $x_I = \xi$ , получим:

$$a = \frac{2y_0}{\sqrt{y_0^2 + (4 - y_0^2)e^{-\varepsilon t}}}, \quad \theta = 0. \quad (33)$$

При  $t \rightarrow \infty$  решение выходит на стационарный режим:

$$y(t) = 2 \cos t.$$

На фазовой плоскости  $(y, \dot{y})$  автоколебаниям соответствует предельный цикл – замкнутая траектория, на которую накладываются все фазовые траектории из некоторой окрестности. Множество, к которому сходятся фазовые кривые, называется аттрактором.



**В рассматриваемом случае аттрактором является окружность радиуса 2.**

**Точки покоя уравнения (31)**

$$\bar{a} = 0 \text{ и } \bar{a} = 2.$$

**Первый корень неустойчивый:  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{a}}(0) > 0$  , а**

**второй - устойчивый:  $\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{a}}(2) < 0$ .**

**Уравнение (21) принимает вид:**

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = \left[ \begin{array}{l} -\frac{\bar{a}}{2} \cos 2(t + \bar{\theta}) + \frac{\bar{a}^3}{8} \cos 4(t + \bar{\theta}) \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\bar{a}^2}{2} \right) \sin 2(t + \bar{\theta}) - \frac{\bar{a}^2}{8} \sin 4(t + \bar{\theta}) \end{array} \right] = X(\xi, t) - \bar{X}(\xi) \quad (34)$$

**Второе приближение:**  $x_2 = \xi + \varepsilon u_1(\xi, t)$ .

**Усредненная система: (23), (25), (26) =>**

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{a}} = \varepsilon \frac{\bar{a}}{2} \left( 1 - \frac{\bar{a}^2}{4} \right), \end{array} \right. \quad (35)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\bar{\theta}} = -\varepsilon^2 \left( \frac{1}{8} - \frac{\bar{a}^2}{8} + \frac{7\bar{a}^4}{256} \right). \end{array} \right. \quad (36)$$

Уравнений (35) совпадает с (31)  $\Rightarrow$  при  $t \rightarrow \infty$   $\bar{a} \rightarrow 2$ . При этом, следовательно,  $\dot{\bar{\theta}} = -\frac{\varepsilon^2}{16}$ ,  $\bar{\theta} \rightarrow -\frac{\varepsilon^2}{16}t + \theta_0$ .

**Второе приближение имеет вид:**

$$\begin{aligned} a &= \bar{a} + \varepsilon \left( \frac{\bar{a}^3}{32} \sin 4(t + \bar{\theta}) - \frac{\bar{a}}{4} \sin 2(t + \bar{\theta}) \right), \\ \theta &= \bar{\theta} + \varepsilon \left( \frac{\bar{a}^2}{32} \cos 4(t + \bar{\theta}) - \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{\bar{a}^2}{4} \right) \cos 2(t + \bar{\theta}) \right), \end{aligned} \tag{37}$$

где  $\bar{a}$  и  $\bar{\theta}$  определяются из (35), (36).

Для стационарного решения получаем  $(\bar{a} = 2, \bar{\theta} = -\frac{\varepsilon^2}{16}t + \theta_0)$ :

$$a_{CT} = 2 - \frac{\varepsilon}{2} \sin 2(\omega t + \theta_0) + \frac{\varepsilon}{4} \sin 4(\omega t + \theta_0), \quad (38)$$

$$\theta_{CT} = (\theta_0 - \frac{\varepsilon^2}{16}t) + \frac{\varepsilon}{4} \cos 2(\omega t + \theta_0) + \frac{\varepsilon}{8} \cos 4(\omega t + \theta_0),$$

где  $\omega = 1 - (\varepsilon^2/16)$ .

Подставляя (38) в формулу  $y(t) = a_{CT} \cdot \cos(t + \theta_{CT})$

и удерживая члены порядка  $\varepsilon$ , получаем второе приближенное стационарное колебательное решение уравнения Ван дер Поля:

$$y(t) = 2 \cos(\omega t + \theta_0) - \frac{\varepsilon}{4} \sin 3(\omega t + \theta_0). \quad (39)$$

На фазовой плоскости траектория второго приближения отклоняется от окружности на величину порядка  $\varepsilon$ .