

3. Метод конечных разностей

1. Основные понятия

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} L u(x) = f(x), & x \in D, \\ l u(x) = \mu(x), & x \in \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

где L - линейный дифференциальный оператор, l - оператор дополнительных (начальных, граничных) условий, $\bar{D} = D + \Gamma$.

\bar{D} заменяем на $\bar{\omega}_h$ - дискретное множество узлов - **сетка**,
 $u(x)$, $x \in \bar{D}$ заменяем на $y_h(x_n)$ - сеточные функции (зависят от параметра h), $x_n \in \bar{\omega}_h$.

$u(x) \in H_0$, $y_h(x_n) \in H_h$. Пространство H_0 отображается на пространство H_h : $u(x) \in H_0 \sim u_h(x) = P_h u(x)$, $u_h \in H_h$, где P_h - линейный оператор из H_0 в H_h .

На линейном пространстве H_h вводятся сеточные нормы $\|y_h\|_h$ - аналоги норм в пространстве H_0 .

Условие согласования норм:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u_h\|_h = \|u\|_0 \quad , \text{ где } u_h = P_h u \text{ , } \|u\|_0 \text{ - норма в пространстве } H_0.$$

Пусть $\phi_h(x) = P_h f(x)$, $x \in \omega_h$, $\chi_h(x) = P_h \mu(x)$, $x \in \gamma_h$, где $\bar{\omega}_h = \omega_h + \gamma_h$, ω_h множество внутренних узлов, γ_h - множество граничных узлов.

Перейдем от дифференциальных операторов к разностным:

$$L \rightarrow L_h, \quad l \rightarrow l_h.$$

Будем говорить, что L_h аппроксимирует L с порядком $m > 0$ в точке x , если

$$\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x) = \underline{\underline{O}}(|h|^m). \quad (3)$$

Задаче (1) – (2) ставится в соответствие система алгебраических (разностных) уравнений

$$\begin{cases} L_h y_h(x) = \phi_h(x), & x \in \omega_h, \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} l_h y_h(x) = \chi_h(x), & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (5)$$

Семейство уравнений (4), (5), зависящих от параметра h , называется разностной схемой.

Пусть $z_h = y_h - u_h$, где $u_h = P_h u$. Так как L_h и l_h - линейные операторы, то получаем задачу:

$$\begin{cases} L_h z_h(x) = \psi_h, & x \in \omega_h, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} l_h z_h(x) = \nu_h, & x \in \gamma_h, \end{cases} \quad (7)$$

где ψ_h и ν_h - погрешности аппроксимации на решении $u(x)$ разностной схемой уравнения (1) и дополнительного условия (2). Схема (4)- (5):

1) аппроксимирует задачу(1)-(2) и имеет m -й порядок аппроксимации, если

$$\|\psi_h\|_{(2h)} = \underline{\underline{O}}(|h|^m), \quad \|\nu_h\|_{(3h)} = \underline{\underline{O}}(|h|^m); \quad (8)$$

2) сходится и имеет m – й порядок точности, если

$$\|y_h - u_h\|_{(1h)} = \underline{\underline{O}}(|h|^m). \quad (9)$$

Схема (4)-(5) корректна (разностная задача поставлена корректно), если при всех достаточно малых $|h| \leq h_0$:

- 1) разностная задача однозначно разрешима при любых входных данных ϕ_h, χ_h ;**
- 2) решение y_h равномерно по h непрерывно зависит от входных данных (свойство устойчивости).**

Если L_h и l_h - линейные операторы, то при $|h| \leq h_0$

$$\|y_h\|_{(1h)} \leq M_1 \|\phi_h\|_{(2h)} + M_2 \|\chi_h\|_{(3h)}, \quad (10)$$

где $M_1 > 0, M_2 > 0$ - постоянные, не зависящие от h и выбора входных данных ϕ_h, χ_h .

Если схема (4)-(5) устойчива, а z_h – решение задачи (6)-(7),

то (10) \Rightarrow

$$\|y_h - u_h\|_{(1h)} = \|z_h\|_{(1h)} \leq M_1 \|\psi_h\|_{(2h)} + M_2 \|v_h\|_{(3h)} \quad (11)$$

Из равенства (11) следует утверждение:

Если линейная схема (4)-(5) устойчива и аппроксимирует задачу (1)-(2), то она сходится (из устойчивости и аппроксимации линейной схемы следует ее сходимость).

Порядок точности схемы (4)-(5) определяется порядком аппроксимации.

2. Разностная задача для уравнения теплопроводности на отрезке.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad (12) \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (13) \\ u(0, t) = \mu_0, \quad u(1, t) = \mu_1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (14) \end{array} \right.$$

Разностная аппроксимация оператора $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

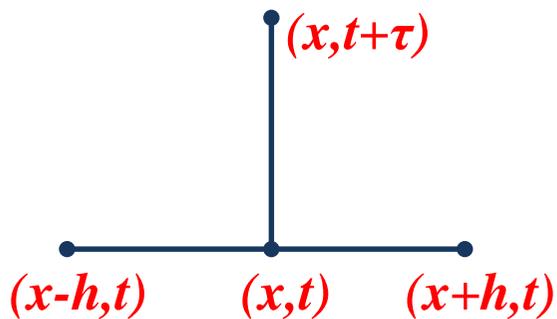
Введем равномерные сетки :

$$\bar{\omega}_h \equiv \{x_n = nh ; \quad n = 0, 1, \dots, N; \quad hN = 1\},$$

$$\bar{\omega}_\tau \equiv \{t_s = s\tau ; \quad s = 0, 1, \dots, S; \quad \tau S = T\},$$

$$\bar{\omega}_{h\tau} \equiv \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_n, t_s) \in \bar{D}\},$$

$$\bar{D} \equiv \{0 \leq x \leq 1 ; \quad 0 \leq t \leq T\}.$$



Назовем **шаблоном**
множество узлов, на котором
записывается оператор

$$L_{h\tau}^{(0)} w = \frac{w(x, t + \tau) - w(x, t)}{\tau} - \frac{w(x + h, t) - 2w(x, t) + w(x - h, t)}{h^2} \quad (15)$$

$$w = w(x, t), \quad \hat{w} = w(x, t + \tau)$$

$$w_t = \frac{\hat{w} - w}{\tau} \quad (16)$$

$$v_{\bar{x}} = (v(x) - v(x - h)) \frac{1}{h}$$

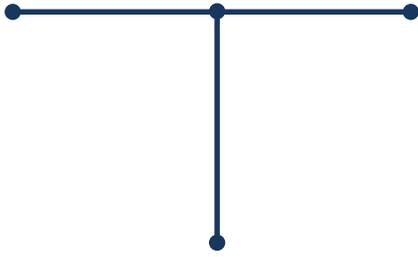
$$v_x = (v(x + h) - v(x)) \frac{1}{h}$$

$$v_{\bar{x}x} = (v_x - v_{\bar{x}}) \frac{1}{h}$$

$$w_{\bar{x}x} = \frac{w(x + h, t) - 2w(x, t) + w(x - h, t)}{h^2}$$

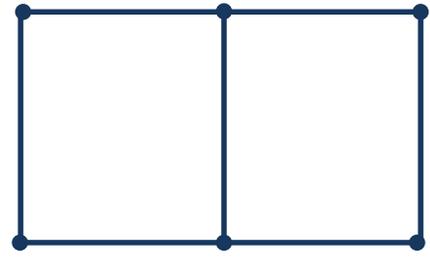
$$L_{h\tau}^{(0)} w = w_t - w_{\bar{x}x} \quad (17)$$

$(x-h, t+\tau)$ $(x, t+\tau)$ $(x+h, t+\tau)$



(x, t)

$(x-h, t+\tau)$ $(x, t+\tau)$ $(x+h, t+\tau)$



$(x-h, t)$

(x, t)

$(x+h, t)$

$$L_{h\tau}^{(1)} w = w_t - \hat{w}_{\bar{x}x} \quad (18)$$

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} w = w_t - (\sigma \hat{w}_{\bar{x}x} + (1-\sigma) w_{\bar{x}x}) \quad (19)$$

$$w_t = \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) + \underline{\underline{O(\tau^2)}} \quad (20)$$

$$w_{\bar{x}x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \underline{\underline{O(h^4)}}$$

Подставляя (20) в (17), (18), получим

$$\psi^{(0)} = L_{h\tau}^{(0)} w - Lw(x, t) = \underset{=}{O}(h^2 + \tau) \quad (21)$$

$$\psi^{(1)} = L_{h\tau}^{(1)} w - Lw(x, t) = \underset{=}{O}(h^2 + \tau) \quad (22)$$

При $\sigma=0,5$ («симметричная схема») получаем

$$\psi^{(0,5)} = L_{h\tau}^{(0,5)} w - Lw\left(x, t + \frac{\tau}{2}\right) = \underset{=}{O}(h^2 + \tau^2), \quad (23)$$

где ψ - погрешность аппроксимации оператора L соответствующим разностным оператором $L_{h\tau}$.

Добавляя к разностному уравнению разностные начальные и граничные условия (13), (14), получим разностную начально – краевую задачу (схему):

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{h\tau}^{(\sigma)} y \equiv y_t - (\sigma \hat{y}_{\bar{x}x} + (1-\sigma) y_{\bar{x}x}) = \phi, \quad (x_n, t_s) \in \omega_{h\tau}, \end{array} \right. \quad (24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(x, 0) = u_0(x), \quad x = x_n \in \bar{\omega}_h, \end{array} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(0, t) = \mu_0, \quad y(1, t) = \mu_1, \quad t = t_s \in \bar{\omega}_\tau, \end{array} \right. \quad (26)$$

где $\phi = \phi_n^s = \phi(x_n, t_s)$.

Схема (24)-(26) аппроксимирует задачу (12)-(14) с порядком $\underline{\underline{O}}(h^2 + \tau)$ при $\sigma = 0, \sigma = 1$ и $\underline{\underline{O}}(h^2 + \tau^2)$ при $\sigma = 0,5$.

Схема называется явной, если $\sigma=0$.

При $\sigma \neq 0$ схема называется неявной (при $\sigma=1$ – чисто неявной).

Явная схема ($\sigma=0$):

$$y_n^{s+1} = y_n^s + \frac{\tau}{h^2} (y_{n-1}^s - 2y_n^s + y_{n+1}^s) + \tau \phi_n^s \quad (27)$$
$$n = 1, 2, \dots, N-1; \quad s = 0, 1, \dots, M.$$

Чисто неявная схема ($\sigma=1$):

$$\frac{1}{h^2} y_{n-1}^{s+1} - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{\tau} \right) y_n^{s+1} + \frac{1}{h^2} y_{n+1}^{s+1} = - \left(\frac{1}{\tau} y_n^s + \phi_n^s \right) \quad (28)$$
$$n = 1, 2, \dots, N-1; \quad s = 0, 1, \dots, M.$$

Теорема

Для устойчивости разностной схемы (24)-(26) достаточно, чтобы существовали такие не зависящие от h и τ постоянные $C_1 \geq 0$ и $C_2 > 0$, при которых имеет место оценка

$$\|y^{s+1}\| \leq (1 + C_1\tau) \|y^s\| + C_2\tau \|\phi\| \quad (29)$$

Замечание. В (29) введены нормы:

равномерная (чебышевская): $\|y\| = \max_{n,s} |y_n^s| \quad (30)$

на s-м слое: $\|y^s\| = \max_n |y_n^s| \quad (31)$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \|y^{s+1}\| &\leq (1 + C_1\tau) \|y^s\| + C_2\tau \|\phi\| \leq (1 + C_1\tau) \left\{ (1 + C_1\tau) \|y^{s-1}\| + C_2\tau \|\phi\| \right\} + C_2\tau \|\phi\| = \\ &= (1 + C_1\tau)^2 \|y^{s-1}\| + C_2\tau \|\phi\| \{1 + (1 + C_1\tau)\} \leq \dots \leq (1 + C_1\tau)^{s+1} \|y^0\| + C_2\tau \|\phi\| \{1 + \\ &+ (1 + C_1\tau) + \dots + (1 + C_1\tau)^s\} \leq (1 + C_1\tau)^{m+1} \|u_0\| + C_2\tau(m+1)(1 + C_1\tau)^m \|\phi\|, \quad s \leq m, \end{aligned} \quad (32)$$

Так как

$$(1 + C_1\tau)^m \leq (1 + C_1\tau)^M \leq e^{C_1\tau M} = e^{C_1T} \quad (33)$$

при $m \leq M$, то полагая $M_1 = e^{C_1T}$, $M_2 = C_2TM_1 \Rightarrow$

$$\|y\| \leq M_1 \|u_0\| + M_2 \|\phi\|. \quad (34)$$

Рассмотрим устойчивость **чисто неявной схемы**

($\sigma=1$)

$$(28) \Rightarrow y_n^{s+1} = y_n^s - \gamma \left\{ 2y_n^{s+1} - y_{n+1}^{s+1} - y_{n-1}^{s+1} \right\} + \tau\phi_n^s, \quad \gamma = \frac{\tau}{h^2} \quad (35)$$

$$y_{k_0}^{s+1} = \max_n y_n^{s+1} \geq y_n^{s+1} \Rightarrow \quad (36)$$

$$2y_{k_0}^{s+1} - y_{k_0+1}^{s+1} - y_{k_0-1}^{s+1} \geq 0 \Rightarrow \quad (37)$$

$$y_{k_0}^{s+1} \leq y_{k_0}^s + \tau\phi_{k_0}^s \quad (38)$$

$$y_{\ell_0}^{s+1} = \min_n y_n^{s+1} \leq y_n^{s+1} \Rightarrow \quad (39)$$

$$2y_{\ell_0}^{s+1} - y_{\ell_0+1}^{s+1} - y_{\ell_0-1}^{s+1} \leq 0 \Rightarrow \quad (40)$$

$$y_{\ell_0}^{s+1} \geq y_{\ell_0}^s + \tau \phi_{\ell_0}^s \quad (41)$$

(38), (41) \Rightarrow

$$y_{\ell_0}^s + \tau \phi_{\ell_0}^s \leq y_{\ell_0}^{s+1} \leq y_n^{s+1} \leq y_{k_0}^{s+1} \leq y_{k_0}^s + \tau \phi_{k_0}^s \quad (42)$$

(42) \Rightarrow

$$\left| y_n^{s+1} \right| \leq \left\| y^s \right\| + \tau \left\| \phi \right\| \quad (43)$$

(43) \Rightarrow

$$\left\| y^{s+1} \right\| \leq \left\| y^s \right\| + \tau \left\| \phi \right\| \quad (44)$$

Рассмотрим устойчивость явной схемы ($\sigma=0$)

(27) \Rightarrow

$$y_n^{s+1} = (1 - 2\gamma)y_n^s + \gamma y_{n+1}^s + \gamma y_{n-1}^s + \tau \phi_n^s \quad (45)$$

Пусть $\gamma < \frac{1}{2}$. Тогда $1 - 2\gamma > 0$ и получим

$$\begin{aligned} |y_n^{s+1}| &\leq (1 - 2\gamma)|y_n^s| + \gamma|y_{n+1}^s| + \gamma|y_{n-1}^s| + \tau|\phi_n^s| \leq \\ &\leq (1 - 2\gamma + \gamma + \gamma)\|y^s\| + \tau\|\phi\| = \|y^s\| + \tau\|\phi\| \end{aligned} \quad (46)$$

(46) \Rightarrow

$$\|y^{s+1}\| \leq \|y^s\| + \tau\|\phi\| \quad (47)$$

Пусть $\delta y_n^s = (-1)^n \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ - **ошибка на s -м слое.**

$$\begin{aligned} \delta y_n^{s+1} &= (1-2\gamma)\delta y_n^s + \gamma\delta y_{n+1}^s + \gamma\delta y_{n-1}^s = \\ &= (-1)^n \varepsilon(1-2\gamma-\gamma-\gamma) = (-1)^{n+1}(4\gamma-1)\varepsilon \\ \gamma > \frac{1}{2} &\Rightarrow \left| \delta y_n^{s+k} \right| = (4\gamma-1)^k \varepsilon, \quad 4\gamma-1 > 1 \Rightarrow \end{aligned} \quad (48)$$

ошибка неограниченно возрастает, причем с уменьшением шага сетки ошибка нарастает (увеличивается число шагов).

Выводы. Чисто неявная схема является безусловно

устойчивой. Явная схема является условно

устойчивой при выполнении условия $\gamma < \frac{1}{2}$ или

$$\tau < \frac{h^2}{2} \quad \text{(условие Куранта)}. \quad (49)$$

3. Метод прогонки.

$$\begin{cases} A_n y_{n-1} - C_n y_n + B_n y_{n+1} = -F_n, & n = 1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (50)$$

$$\begin{cases} y_0 = \alpha_1 y_1 + \mu_1, & y_N = \alpha_2 y_{N-1} + \mu_2 \end{cases} \quad (51)$$

$$A_n \neq 0, \quad B_n \neq 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1.$$

$$y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (52)$$

(52) \Rightarrow

$$y_{n-1} = \alpha_n y_n + \beta_n = \alpha_n \alpha_{n+1} y_{n+1} + \alpha_n \beta_{n+1} + \beta_n \quad (53)$$

(50),(52),(53) \Rightarrow

$$\begin{aligned} & (\alpha_{n+1} (\alpha_n A_n - C_n) + B_n) y_{n+1} + \\ & + (\beta_{n+1} (\alpha_n A_n - C_n) + \beta_n A_n + F_n) = 0 \end{aligned} \quad (54)$$

(54) =>

$$\alpha_{n+1} = \frac{B_n}{C_n - \alpha_n A_n} \quad (55)$$

Прямой ход:

$$\beta_{n+1} = \frac{A_n \beta_n + F_n}{C_n - \alpha_n A_n} \quad n = 1, 2, \dots, N - 1$$

(51),(52) $n=0$ =>

$$\alpha_1 = \alpha_1, \beta_1 = \mu_1 \quad (56)$$

(51),(52) $n=N-1$ =>

$$y_N = \frac{\mu_2 + \beta_N \alpha_2}{1 - \alpha_N \alpha_2} \quad (57)$$

Обратный ход:

$$y_n = \alpha_{n+1} y_{n+1} + \beta_{n+1}, \quad n = N - 1, N - 2, \dots, 0 \quad (58)$$

Достаточные условия устойчивости:

$$\begin{aligned} |C_n| &\geq |A_n| + |B_n|, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ |\alpha_\alpha| &\leq 1, \quad \alpha = 1, 2, \quad |\alpha_1| + |\alpha_2| < 2 \end{aligned} \quad (59)$$

Число арифметических операций прогонки $O(N)$.

Покажем, что (59) $\Rightarrow |\alpha_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, N$

Индукция: а) $|\alpha_1| = |\alpha_1| \leq 1$; б) $|\alpha_i| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_{i+1}| \leq 1$.

$$(59) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| - |B_i| \geq |C_i| - |\alpha_i| |A_i| - |B_i| \geq |A_i| (1 - |\alpha_i|) \geq 0 \quad (59a)$$

$$B_i \neq 0 \quad , \quad (59a) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| > 0$$

$$(59a) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| \geq |B_i| \Rightarrow |\alpha_{i+1}| = \frac{|B_i|}{|C_i - \alpha_i A_i|} \leq 1.$$

Покажем, что $|\alpha_i| < 1 \Rightarrow |\alpha_{i+1}| < 1$

Если $|\alpha_1| < 1$, то $A_i \neq 0, (59a) \Rightarrow |C_i - \alpha_i A_i| > |B_i| \Rightarrow |\alpha_{i+1}| < 1$

Покажем, что (59) $\Rightarrow 1 - \alpha_n \varkappa_2 \neq 0$.

$$\text{а) } |\varkappa_2| < 1 \Rightarrow |\varkappa_1| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_1| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_N| \leq 1 \Rightarrow \\ |1 - \alpha_N \varkappa_2| \geq 1 - |\alpha_N| |\varkappa_2| \geq 1 - |\varkappa_2| > 0.$$

$$\text{б) } |\varkappa_2| \leq 1 \Rightarrow |\varkappa_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_N| < 1 \Rightarrow \\ |1 - \alpha_N \varkappa_2| \geq 1 - |\alpha_N| |\varkappa_2| \geq 1 - |\alpha_N| > 0.$$

При $|\alpha_i| \leq 1$ **ошибка** $\delta y_{i+1} = \tilde{y}_{i+1} - y_{i+1}$ **не нарастает:**

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad \tilde{y}_i = \alpha_{i+1} \tilde{y}_{i+1} + \beta_{i+1} \Rightarrow \delta y_i = \alpha_{i+1} \delta y_{i+1} \Rightarrow$$

$$|\delta y_i| = |\alpha_{i+1}| |\delta y_{i+1}| \leq |\delta y_{i+1}|$$

Если $\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}$ **возмущаются, то** $\max_{1 \leq i \leq N} |\delta y_i| \approx \varepsilon_0 N^2$,

где ε_0 **- ошибка округления.**