Конспект лекции 9

ТЕОРЕМА О БАЗИСНОМ МИНОРЕ

§ 0. План лекции

Лекция Теорема о базисном миноре.

1. Две вспомогательные теоремы из теории определителей.

1.1. НИДУ равенства нулю определителя: $\det A = 0$;

1.2. Явное выражение для обратной матрицы.

2. Ранг матрицы.

2.1. Элементарные преобразования первых трёх типов;

2.2. Теорема о равенстве линейных оболочек $L(A_1', \ldots, A_n') = L(A_1, \ldots, A_n)$;

2.3. Определение ранга матрицы;

2.4. Теорема о равенстве $\dim L(A_1, \ldots, A_n) = \dim L(A^1, \ldots, A^m)$;

2.5. Следствие $\operatorname{rang} A \leqslant \min(m, n)$;

2.6. Теорема Кронекера–Капелли;

2.7. Теорема о неравенстве $\operatorname{rang}(AB) \leqslant \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B)$.

3. Теорема о базисном миноре.

3.1. Определение минора и дополнительного минора;

3.2. Определение базисного минора;

3.3. Определение окаймления матрицы;

3.4. Теорема о базисном миноре.

4. Фундаментальное Семейство Решений.

4.1. Выделение базисных строк матрицы системы уравнений;

4.2. Базисные и свободные переменные. Дальнейшее преобразование;

4.3. Построение общего решения;

4.4. ФСР.

§ 1. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ следующего общего вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \cdots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & a_2^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} = \|A_1, A_2, \dots, A_n\| = \left\| \begin{matrix} A^1 \\ A^2 \\ \vdots \\ A^m \end{matrix} \right\|,$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \cdots, A_n = \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^m \end{pmatrix},$$

$$A^1 = \left(a_1^1, a_2^1, \cdots, a_n^1\right), \dots, A^m = \left(a_1^m, a_2^m, \cdots, a_n^m\right).$$

Рассмотрим линейные оболочки столбцов и строк матрицы A:

$$L(A_1, ..., A_n) \subset \mathbb{K}^m, \quad L(A^1, ..., A^m) \subset \mathbb{K}_n.$$

Пусть A' — это матрица, полученная из матрицы A первыми тремя элементарными преобразованиями строк.

Теорема 1. *Имеют место следующие равенства*:

$$\dim L(A_1', A_2', \dots, A_n') = \dim L(A_1, A_2, \dots, A_n),$$
$$\dim L(A'^1, A'^2, \dots, A'^m) = \dim L(A^1, A^2, \dots, A^m).$$

Доказательство.

Докажем, например, равенство $L(A'^1, A'^2, \dots, A'^m) = L(A^1, A^2, \dots, A^m)$.

$$A' = P \cdot A \Rightarrow A'^j = P^j \cdot A = \sum_{k=1}^{m} P_k^j A^k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(A'^1, A'^2, \dots, A'^m) \subset L(A^1, A^2, \dots, A^m);$$

$$A = P^{-1} \cdot A' \Rightarrow A^j = (P^{-1})^j \cdot A' = \sum_{k=1}^{m} (P^{-1})_k^j A'^k \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(A^1, A^2, \dots, A^m) \subset L(A'^1, A'^2, \dots, A'^m).$$

Теорема доказана.

Определение 2. *Размерность линейной оболочки $L(A_1, ..., A_n)$ столбцов матрицы $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ называется рангом матрицы A.*

Обозначение. $\mathrm{rk}\, A$, $\mathrm{rank}\, A$, $\mathrm{rg}\, A$, $\mathrm{rang}\, A$, $\mathrm{r}(A)$.

Теорема 2. *Для любой матрицы A размерность линейной оболочки её столбцов равна размерности линейной оболочки её строк*:

$$\dim L(A_1, ..., A_n) = \dim L(A^1, ..., A^m).$$

Доказательство.

Используя метод Гаусса–Жордана элементарными преобразованиями первых трёх типов как со строчками матрицы A, так и со столбцами матрицы A её можно преобразовать либо к нулевой матрице

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

либо к блочным матрицам одного из следующих трёх видов:

$$\left\| \begin{array}{c|c} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{array} \right\|, \quad 1 \leqslant r < \min\{m, n\};$$

$$\left\| I_m | O_{m\times(n-m)} \right\| \quad \text{при} \quad n > m;$$

$$\left\| \begin{array}{c} I_n \\ O_{(m-n)\times n} \end{array} \right\| \quad \text{при} \quad m > n,$$

где

$$O_{r\times(n-r)}, \quad O_{(m-r)\times r}, \quad O_{(m-r)\times(n-r)}, \quad O_{m\times(n-m)}$$

— это нулевые матрицы соответствующих размеров, а I_r, I_m, I_n — это единичные (квадратные) матрицы соответствующего порядка. В силу теоремы 8 мы в первом случае получаем, что

$$\dim L(A_1, ..., A_n) = \dim L(A^1, ..., A^m) = 0.$$

Во втором случае

$$\dim L(A_1, ..., A_n) = \dim L(A^1, ..., A^m) = r;$$

в третьем случае

$$\dim L(A_1, ..., A_n) = \dim L(A^1, ..., A^m) = m, \quad m < n;$$

в четвертом случае

$$\dim L(A_1, ..., A_n) = \dim L(A^1, ..., A^m) = n, \quad n < m.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Для ранга $\operatorname{rang} A$ матрицы A имеет место следующее неравенство*:

$$\operatorname{rang} A \leqslant \min\{m, n\}.$$

Доказательство. Независимое доказательство основано на следующих неравенствах:

$$L(A_1, ..., A_n) \subset \mathbb{K}^m \Rightarrow \dim L(A_1, ..., A_n) \leqslant m;$$
$$L(A^1, \dots, A^m) \subset \mathbb{K}_n \Rightarrow \dim L(A^1, ..., A^m) \leqslant n.$$

Следствие доказано.

Теорема Кронекера–Капелли:

Теорема 3. *Неоднородная система $AX = B$ совместна тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rang} \|A\| = \operatorname{rang} \|A \mid B\|.$$

Доказательство.

Шаг 1. Необходимость. Пусть система $AX = B$ совместна. Тогда найдутся такие числа $c^1, \dots, c^n \in \mathbb{K}$, что

$$B = c^1 A_1 + \dots + c^n A_n \Rightarrow B \subset L(A_1, ..., A_n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L(A_1, ..., A_n, B) \subset L(A_1, ..., A_n).$$

Обратное вложение очевидно. Таким образом,

$$L(A_1, ..., A_n) = L(A_1, ..., A_n, B) \Rightarrow \operatorname{rang} \|A\| = \operatorname{rang} \|A \mid B\|.$$

Шаг 2. Достаточность. Пусть

$$\dim\|A\| = \dim\|A \mid B\|.$$

Вложение

$$L(A_1, ..., A_n) \subset L(A_1, ..., A_n, B)$$

очевидно, поэтому в силу доказанной ранее теореме о монотонности размерности имеем

$$L(A_1, ..., A_n) = L(A_1, ..., A_n, B) \Rightarrow \ \exists\, c^1, \dots, c^n, \quad B = c^1 A_1 + \dots + c^n A_n.$$

Система $AX = B$ совместна, поскольку имеет решение

$$X = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^n \end{pmatrix}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Если существует произведение матриц A и B, то*

$$\operatorname{rang}(AB) \leqslant \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\}. \tag{1.1}$$

Доказательство.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{m\times p}$ и $B \in \mathbb{K}^{p\times n}$. Обозначим через $C \in \mathbb{K}^{m\times n}$ произведение $A \cdot B$. Поэтому

$$C_k = A \cdot B_k = \sum_{l=1}^{p} A_l b_k^l,\ k = \overline{1, n} \Rightarrow \operatorname{rang} C \leqslant \operatorname{rang} A,$$

$$C^j = A^j \cdot B = \sum_{l=1}^{p} a_l^j B^l,\ j = \overline{1, m} \Rightarrow \operatorname{rang} C \leqslant \operatorname{rang} B.$$

Теорема доказана.

§ 2. Теорема о базисном миноре

Рассмотрим матрицу $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Выберем в этой матрице произвольные k строк с номерами $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ и k столбцов с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$.

$$\begin{pmatrix}
a_1^1 & \cdots & a_{i_1}^1 & \cdots & a_{i_2}^1 & \cdots & a_{i_k}^1 & \cdots & a_n^1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_1} & \cdots & a_{i_1}^{j_1} & \cdots & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} & \cdots & a_n^{j_1} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_2} & \cdots & a_{i_1}^{j_2} & \cdots & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} & \cdots & a_n^{j_2} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^{j_k} & \cdots & a_{i_1}^{j_k} & \cdots & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k} & \cdots & a_n^{j_k} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_1^m & \cdots & a_{i_1}^m & \cdots & a_{i_2}^m & \cdots & a_{i_k}^m & \cdots & a_n^m
\end{pmatrix}
\Rightarrow
\begin{pmatrix}
a_{i_1}^{j_1} & a_{i_2}^{j_1} & \cdots & a_{i_k}^{j_1} \\
a_{i_1}^{j_2} & a_{i_2}^{j_2} & \cdots & a_{i_k}^{j_2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{i_1}^{j_k} & a_{i_2}^{j_k} & \cdots & a_{i_k}^{j_k}
\end{pmatrix}.$$

Построенную матрицу будем называть подматрицей матрицы A и обозначать следующим образом:

$$A\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{k\times k}.$$

Определение 3. *Определитель матрицы*

$$A\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

называется минором порядка k матрицы A.

Матрицу, из которой удалили указанные строки и столбцы, будем обозначать следующим образом:

$$\overline{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{(m-k)\times(n-k)}.$$

О п р е д е л е н и е 4. *Если $m = n$, то определитель матрицы*

$$\overline{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$$

называется дополнительным минором порядка $n-k$ квадратной матрицы A.

О б о з н а ч е н и е. При этом в литературе используются следующие обозначения:

$$M_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{j_1 j_2 \cdots j_k} := \det A\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix},$$

$$\overline{M}_{i_1 i_2 \cdots i_k}^{j_1 j_2 \cdots j_k} := \det \overline{A}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}.$$

О п р е д е л е н и е 5. *Минор порядка $k \leqslant \min\{m, n\}$ матрицы $A \in$ $\in \mathbb{K}^{m \times n}$ называется базисным, если он отличен от нуля, а любой минор большего порядка, если он существует, равен нулю.*

П р и м е р 1. У матрицы может быть не один базисный минор. Действительно, у матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

имеется три базисных минора второго порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2.$$

О п р е д е л е н и е 6. *Будем говорить, что подматрица $\widehat{\widehat{A}}$ матрицы A окаймляет подматрицу $\widehat{A}$ матрицы A, если $\widehat{A}$ получается из матрицы $\widehat{\widehat{A}}$ вычеркиванием последнего столбца и последней строчки.*

Например, матрица

$$\widehat{\widehat{A}} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 7 \\ \hline 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \quad \text{окаймляет матрицу} \quad \widehat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Т е о р е м а о б а з и с н о м м и н о р е.

Т е о р е м а 5. *Справедливы следующие свойства:*

1. *Столбцы (строки) матрицы, образующие её базисный минор, линейно независимы.*
2. *Любой столбец (строка) матрицы является линейной комбинацией столбцов (строк), образующих базисный минор.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что базисный минор матрицы A порядка r расположен в левом верхнем угле матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_{r+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_{r+1}^r & \cdots & a_n^r \\ a_1^{r+1} & \cdots & a_r^{r+1} & a_{r+1}^{r+1} & \cdots & a_n^{r+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & a_{r+1}^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Шаг 1. Поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0,$$

то столбцы матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{pmatrix}$$

линейно независимы. Но тогда тем более линейно независимыми будут столбцы

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^r \\ a_1^{r+1} \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix}, \quad A_r = \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^r \\ a_r^{r+1} \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix}$$

исходной матрицы A.

Шаг 2. Пусть A_k — это произвольный столбец матрицы. Если $k \leqslant r$, то имеет место равенство

$$A_k = 0 \cdot A_1 + \cdots + 0 \cdot A_{k-1} + 1 \cdot A_k + 0 \cdot A_{k+1} + \cdots + 0 \cdot A_r$$

и, следовательно, столбец A_k линейно выражается через базисные столбцы. Если же $k > r$, то рассмотрим минор порядка $r+1$, полученный окаймлением базисного минора столбцом A_k и какой либо строчкой A^s:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & a_k^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & a_k^r \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & a_k^s \end{vmatrix}$$

Нужно рассмотреть два случая: $s \in \overline{1, r}$ и $s \in \overline{r+1, m}$. В первом случае у этого определителя заведомо две одинаковые строчки. Поэтому он равен нулю. Во втором случае указанный минор $r+1$–го порядка составлен из элементов, находящихся на пересечении первых r строк и s–ой строчки и первых r столбцов и k–го столбца:

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 & \cdots & a_k^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r & \cdots & a_k^r & \cdots & a_n^r \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^s & \cdots & a_r^s & \cdots & a_k^s & \cdots & a_n^s \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_r^m & \cdots & a_k^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix}.$$

Соответствующий минор $r+1$–го порядка равен нулю по определению базисного минора.

Теперь мы можем разложить этот определитель по s–й строчке и получить следующее равенство:

$$0 = a_1^s \mathcal{M}_1 + \cdots + a_r^s \mathcal{M}_r + a_k^s \mathcal{M}, \quad s = \overline{1, m},$$

причём $\mathcal{M} \neq 0$, а $\mathcal{M}_1, ..., \mathcal{M}_r$ — это алгебраические дополнения элементов последней строчки. Итак, имеем

$$a_k^s = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} a_1^s - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} a_r^s, \quad s = \overline{1, m}.$$

Отсюда получаем

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^s \\ \vdots \\ a_k^m \end{pmatrix} = -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_1^1 \\ \vdots \\ a_1^s \\ \vdots \\ a_1^m \end{pmatrix} - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} a_r^1 \\ \vdots \\ a_r^s \\ \vdots \\ a_r^m \end{pmatrix} = $$

$$= -\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}} A_1 - \cdots - \frac{\mathcal{M}_r}{\mathcal{M}} A_r.$$

Теорема доказана.

§ 3. Фундаментальное Семейство Решений

Применим теорему о базисном миноре к решению однородных систем линейных алгебраических уравнений. Рассмотрим следующую систему

$$A \cdot X = O,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \cdots & a_n^m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times 1}.$$

Пусть $\operatorname{rang} A = r \leqslant \min\{m, n\}$.

1. Перестановками строк и перестановками столбцов, что соответствует переобозначению переменных, можно добиться, чтобы базисный минор (если он существует) матрицы системы A расположился на пересечении первых r строк и первых r столбцов.

2. Согласно теореме о базисном миноре последние $n-r$ строк матрицы A линейно выражаются через первые r строк. Но тогда применяя к каждой из последних $n-r$ строк элементарное преобразование третьего типа, а именно вычитая соответствующую линейную комбинацию первых r строк, мы приведём последние $n-r$ строк к следующему тривиальному виду:

$$0\cdot x^1 + \cdots + 0\cdot x^r + 0\cdot x^{r+1} + \cdots + 0\cdot x^n = 0.$$

Таким образом, используя элементарное преобразование 4–го типа — вычёркивание нулевых строк матрицы системы мы приходим к следующей системе из r уравнений относительно n неизвестных:

$$\begin{gathered} a_1^1x^1 + \cdots + a_r^1x^r + a_{r+1}^1x^{r+1} + \cdots + a_n^1x^n = 0, \\ a_1^2x^1 + \cdots + a_r^2x^r + a_{r+1}^2x^{r+1} + \cdots + a_n^2x^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^rx^1 + \cdots + a_r^rx^r + a_{r+1}^rx^{r+1} + \cdots + a_n^rx^n = 0. \end{gathered}$$

3. Поскольку

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_r^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^r & \cdots & a_r^r \end{vmatrix} \neq 0,$$

то используя алгоритм Гаусса–Жордана элементарными преобразованиями первых трех типов и, если нужно, переобозначениями переменных $x^1, \ldots, x^r$, мы можем привести эту систему к следующему эквивалентному виду:

$$\begin{gathered} x^1 + \overline{a}_{r+1}^1x^{r+1} + \cdots + \overline{a}_n^1x^n = 0, \\ x^2 + \overline{a}_{r+1}^2x^{r+1} + \cdots + \overline{a}_n^2x^n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^r + \overline{a}_{r+1}^rx^{r+1} + \cdots + \overline{a}_n^rx^n = 0. \end{gathered}$$

Система уравнений приняла упрощенный вид. Выберем переменные $x^1, \dots, x^r$ как базисные, а переменные $x^{r+1}, \dots, x^n$ как свободные. Положим

$$x^{r+1} = c_1, \quad x^{r+2} = c_2, \dots, x^{n-r} = c_{n-r}.$$

Тогда общее решение последней системы уравнений, а значит, в силу эквивалентных преобразований и исходной системы уравнений можно представить в следующем виде:

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^r \\ x^{r+1} \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_{r+1} c_1 - \dots - \overline{a}^1_n c_{n-r} \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_{r+1} c_1 - \dots - \overline{a}^r_n c_{n-r} \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 X_1 + \dots + c_{n-r} X_{n-r},$$

где

$$X_1 = \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_{r+1} \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_{r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, X_{n-r} = \begin{pmatrix} -\overline{a}^1_n \\ \vdots \\ -\overline{a}^r_n \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Нетрудно убедиться в том, что столбцы $X_1, \dots, X_{n-r}$ являются линейно независимыми, а по построению произвольное решение X исходной системы уравнений линейно выражается через эти столбцы. Следовательно, эти столбцы образуют базис пространства решений исходной однородной системы уравнений.