

КОМПАКТНОСТЬ. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ**§ 1. Топологическое определение компактности**

Начнём со следующего предварительного понятия.

Определение 0. *Непустая система замкнутых множеств называется центрированной, если любая её конечная подсистема имеет непустое пересечение.*

Примером центрированной системы замкнутых множеств может служить система вложенных замкнутых шаров в \mathbb{R}^n или система лучей $\{[n; +\infty)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Напомним (см. лекции 4, 5) следующее основное определение.

Определение 1. *Топологическое пространство T называется компактным, если из любого его покрытия открытыми множествами (говорят: открытого покрытия) можно извлечь конечное подпокрытие.*

Имеет место следующая важная теорема:

Теорема 1. *Топологическое пространство T компактно тогда и только тогда, когда любая центрированная система его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.*

Прежде чем доказывать теорему, заметим, что в общем случае центрированная система замкнутых множеств может иметь пустое пересечение: например, так будет для системы $\{[n; +\infty)\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Доказательство. Необходимость.

1. Пусть пространство T компактно. Рассмотрим центрированную систему замкнутых множеств $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Предположим, что её пересечение пусто: $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = \emptyset$. Тогда в силу формул де Моргана (см. § 2 семинара-лекции 1) для $G_\alpha \equiv T \setminus F_\alpha$ имеем

$$\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha = \bigcup_{\alpha \in A} T \setminus F_\alpha = T \setminus \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha = T \setminus \emptyset = T.$$

2. Итак, $\{G_\alpha\}$ есть открытое покрытие пространства T . Но тогда по условию оно содержит конечное подпокрытие $\{G_{\alpha_k}\}_{k=1}^n$ и в силу формул де Моргана получим

$$T = \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k} \implies \bigcap_{k=1}^n F_{\alpha_k} = \bigcap_{k=1}^n T \setminus G_{\alpha_k} = T \setminus \bigcup_{k=1}^n G_{\alpha_k} = \emptyset,$$

что противоречит условию центрированности.

Достаточность.

1. Пусть произвольная центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Вновь привлекая формулы де Моргана, имеем $\bigcap_{\alpha \in A} (T \setminus O_\alpha) = \emptyset$.

2. Тогда система замкнутых множеств $\{T \setminus O_\alpha\}_{\alpha \in A}$, имея пустое пересечение, не является центрированной, т. е. существует подмножество индексов $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A$ такое, что $\bigcap_{k=1}^n (T \setminus O_{\alpha_k}) = \emptyset$, откуда $\bigcup_{k=1}^n O_{\alpha_k} = T$. Таким образом, мы извлекли конечное подпокрытие данного покрытия.

Теорема доказана.

Теперь условие непустоты пересечения любой центрированной системы замкнутых множеств в топологическом пространстве можно считать новым определением компактности. Будем условно называть его определением 1а.

Сделаем важное для дальнейшего

Замечание 1. Если в определении 1 заменить слова «из любого покрытия» на «из любого счётного покрытия», то получится определение счётной компактности. Совершенно аналогично предыдущему случаю, но ограничиваясь только счётными множествами индексов A , можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Топологическое пространство T счётно-компактно тогда и только тогда, когда в нём любая счётная центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение.

Определения, получающиеся из определений 1 и 1а добавлением требования счётности, назовём определениями 1' и 1а'.

§ 2. Компактные метрические пространства. Определение

К метрическому пространству, естественно, можно применить топологическое определение компактности. Однако в случае метрических пространств удобно пользоваться другими определениями (= критериями) компактности. Постепенно мы установим равносильность для метрических пространств всех приводимых нами определений (критериев) компактности.

Определение 2. Метрическое пространство X называется компактным, если любое его бесконечное подмножество имеет предельную точку.

Замечание 2. Метрическое пространство, состоящее из конечного числа точек, следует считать компактным: в нём нет бесконечных подмножеств, а стало быть, для всякого его бесконечного подмножества условие существования предельной точки выполнено. (Для несуществующего объекта верно всё что угодно.)

Определение 2а. Метрическое пространство X называется компактным, если любая последовательность его точек имеет предельную точку (= содержит сходящуюся подпоследовательность).

Предостережение. Обращаем внимание читателя на различия понятий предельной точки последовательности и множества. Так, предельная точка последовательности может не быть предельной точкой множества её значений. (Почему? Приведите примеры.)

□ Докажем равносильность этих определений.

$2 \Rightarrow 2а$.

1. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset X$. Покажем, что из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

2. Если из неё можно извлечь стационарную подпоследовательность, утверждение тривиально. В противном случае можно утверждать, что множество значений последовательности бесконечно.

3. По условию оно имеет предельную точку $x \in X$. Таким образом, в любой окрестности точки x найдётся элемент последовательности, отличный от x . Уменьшая размеры окрестностей, мы получим, что в любой окрестности таких элементов даже бесконечно много. Тем самым, x — предельная точка последовательности $\{x_n\}$.

$2а \Rightarrow 2$.

1. Пусть $Y \subset X$ — бесконечное множество. Построим последовательность $\{x_n\}$ его элементов так, чтобы среди её членов не было равных. По условию она имеет предельную точку x .

2. Легко видеть, что x является также предельной точкой множества X . В самом деле, по определению предельной точки последовательности в каждой окрестности точки x найдётся бесконечно много членов последовательности.

3. Но в силу нашего выбора они суть различные точки множества X . Они не могут все совпадать с x . Тем самым, в любой окрестности точки x имеется хотя бы одна точка $x_n \in X$, отличная от x . □

ПРИМЕР 1. Пользуясь определением 2а, нетрудно заметить, что бесконечномерное гильбертово пространство l^2 не является локально компактным¹⁾. Действительно, для элементов стандартного базиса верно $\|e_k - e_l\| = \sqrt{2}$, а следовательно, из $\{e_n\} \subset l^2$ нельзя извлечь сходящуюся подпоследовательность.

§ 3. Компактность и полная ограниченность

Обсудим теперь другой подход к понятию компактности. Для этого нам потребуется ввести ещё некоторые понятия.

¹⁾ Векторное топологическое пространство называется локально компактным, если каждая его точка имеет окрестность, замыкание которой компактно.

Определение 3. Назовём множество A ε -сетью в метрическом пространстве X , если $X = \bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x)$, где $B_\varepsilon(x)$ — замкнутый шар радиуса ε с центром в точке x .

Определение 4. Назовём метрическое пространство X вполне ограниченным, если в нём для любого $\varepsilon > 0$ найдётся некоторая конечная ε -сеть. (Более новый термин: сверхограниченное. Мы будем пользоваться традиционным.)

Нетрудно привести примеры вполне ограниченных множеств: отрезок на прямой или шар в \mathbb{R}^3 . ε -сети в них можно построить на основе координатной сетки.

Теорема 3. Метрическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда оно одновременно полно и вполне ограничено.

Доказательство. Необходимость.

1. Необходимость полноты очевидна: иначе мы могли бы взять фундаментальную последовательность, не имеющую предела, — и никакая её подпоследовательность не была бы сходящейся. (Поскольку если сходится некоторая подпоследовательность фундаментальной последовательности, то сходится и вся последовательность — см. задачу 3 к дополнительной лекции 1.)

2. Нетрудно доказать и полную ограниченность. В самом деле, пусть для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ конечной ε_0 -сети не существует. Это значит, что можно построить последовательность $\{x_n\} \subset X$, каждый последующий член которой удалён от каждого из предыдущих более чем на ε_0 . Но такая последовательность, очевидно, не имеет сходящихся подпоследовательностей.

Достаточность.

1. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ в пространстве X существует конечная ε -сеть. Пусть $Y \subset X$ — бесконечное множество. Построим в X 1 -, $\frac{1}{2}$ -, $\frac{1}{4}$ -, ..., $\frac{1}{2^n}$ -, ... сети и рассмотрим соответствующие шары.

2. Поскольку число шаров каждого радиуса конечно, то найдётся шар радиуса 1, содержащий бесконечно много элементов множества Y . Назовём его B_0 и положим $Y_1 = Y \cap B_0$ (Y_1 бесконечно).

3. Далее, найдётся шар радиуса $1/2$ с центром в элементе $\frac{1}{2}$ -сети, содержащий бесконечно много элементов множества Y_1 . Обозначим этот шар через B_1 и положим $Y_2 = Y_1 \cap B_1$.

4. Продолжая указанную процедуру, получим последовательность шаров $\{B_k\}$ радиусов $\frac{1}{2^k}$ (с центрами в точках $\frac{1}{2^k}$ -сетей), где каждый шар содержит бесконечно много элементов множества Y .

5. Увеличив радиусы шаров в 4 раза (\tilde{B}_k), получим последовательность вложенных (докажем ниже) замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю. В силу полноты пространства X эти шары содержат общую точку x , которая, очевидно, и будет предельной для Y .

6. Осталось доказать, что шары \tilde{B}_k вложены друг в друга. В самом деле, пусть z_k — центр k -го шара. Поскольку $B_k \cap B_{k+1}$ непусто (именно, $B_k \cap B_{k+1} \supset Y_k$), имеем $\rho(z_k, z_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{3}{2} / 2^k$. После

увеличения радиусов в 4 раза будем иметь тем самым, что все точки шара \tilde{B}_{k+1} удалены от z_k не более чем на $\frac{3}{2}/2^k + \frac{1}{2^{k-1}} = (\frac{3}{2} + 2)/2^k < 4/2^k$. Поэтому $\tilde{B}_{k+1} \subset \tilde{B}_k$.

Теорема доказана.

Теперь мы можем считать требование полноты и полной ограниченности третьим определением компактности (для метрического пространства).

Определение 5. Метрическое пространство X называется компактным, если оно полно и вполне ограничено.

ПРИМЕР 2. Гильбертов кирпич. Рассмотрим в пространстве l^2 множество

$$Q = \{x \in l^2 \mid |x_0| \leq 1, |x_1| \leq \frac{1}{2}, \dots, |x_k| \leq \frac{1}{2^k}, \dots\}. \quad (3.1)$$

Оно является компактным.

□ Прежде всего заметим, что множество Q замкнуто. Действительно, из сходимости в l^2 вытекает покоординатная сходимость. А условия в (3.1) замкнуты относительно покоординатной сходимости.

Теперь покажем, как построить для каждого $\varepsilon > 0$ конечную ε -сеть в Q . Заметим сначала, что если для произвольных $x = (x_0, x_1, x_2, \dots) \in \in l^2$ и $n \in \mathbb{N}$ положить $[x]_n = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$, то

$$\|x - [x]_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2. \quad (3.2)$$

В случае $x \in Q$ в силу (3.1) и (3.2) имеем

$$\|x - [x]_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k}\right)^2 = \frac{1}{3 \cdot 4^n}.$$

Выберем теперь такое n , что $\frac{1}{3 \cdot 4^n} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Осталось лишь «построить сеть по оставшимся координатам». Положим

$$R = \left\{x \in l^2 \mid x_0 = k_0 \frac{\varepsilon}{\sqrt{2(n+1)}}, \right. \\ \left. x_1 = k_1 \frac{\varepsilon}{\sqrt{2(n+1)}}, \dots, x_n = k_n \frac{\varepsilon}{\sqrt{2(n+1)}}, 0, 0, \dots\right\},$$

где целые числа k_i ($i = \overline{0, n}$) пробегают все значения, при которых

$$\left| k_i \frac{\varepsilon}{\sqrt{2(n+1)}} \right| \leq \frac{1}{2^i}.$$

Тогда, если $x \in Q$, то расстояние от $[x]_n$ до ближайшего элемента сети будет не больше

$$\sqrt{(n+1) \cdot \frac{\varepsilon^2}{2(n+1)}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}};$$

с учётом оценки

$$\|x - [x]_n\|^2 \leq \frac{1}{3 \cdot 4^n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

и теоремы Пифагора получаем требуемое. \square

§ 4. Связь между метрическим и топологическим определениями компактности

Установим теперь связь между топологическими и метрическими определениями компактности для метрического пространства.

Для этого нам потребуются три вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Вполне ограниченное метрическое пространство сепарабельно.*

Доказательство. Очевидно: достаточно взять конечные 1 -, $\frac{1}{2}$ -, $\frac{1}{4}$ - и т. д. сети.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Сепарабельное метрическое пространство имеет счётную базу.*

Лемма 3. *Пусть топологическое пространство T имеет счётную базу. Тогда из любого его открытого покрытия можно извлечь счётное подпокрытие.*

Доказательства лемм 2 и 3 во избежание перегрузки текста вынесены в приложение.

Теперь мы в состоянии доказать, пожалуй, самую интересную теорему данной лекции.

Теорема 4. *«Топологические» и «метрические» определения компактности равносильны (разумеется, в своей общей области применимости — для метрических пространств).*

Доказательство.

$1a \Rightarrow 2$.

1. Пусть X — метрическое пространство, в котором любая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение. Пусть Y — произвольное бесконечное множество в X . Докажем, что оно имеет предельную точку.

2. Образует последовательность различных точек множества Y :

$$\{x_1, x_2, x_3, \dots\}. \quad (4.1)$$

Построим множества

$$X_1 = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}, X_2 = \{x_2, x_3, x_4, \dots\}, X_3 = \{x_3, x_4, x_5, \dots\}, \dots \quad (4.2)$$

4. Связь между метрическим и топологическим определениями компактности

Тогда, очевидно, их замыкания образуют центрированную систему замкнутых множеств.

3. В силу компактности в смысле «топологического определения» $1a$ она имеет непустое пересечение. Обозначим через x некоторую точку из указанного пересечения. Значит, x является точкой касания для каждого из множеств (4.2).

4. Если x не совпадает ни с одной из точек (4.1), то, очевидно, x является предельной точкой для всех X_n (как точка касания, не принадлежащая множеству), а следовательно, и для Y , т. к. $X_n \subset Y$. Если же имеет место совпадение $x = x_{n_0}$, то в силу попарной различности точек (4.1) такое совпадение не имеет места больше ни при каком n и для всех X_n , $n > n_0$, $x \notin X_n$.

5. Тогда аналогично предыдущему случаю получаем, что точка x является предельной по крайней мере для X_n , $n > n_0$ (на самом деле всё же для всех, но это не важно), а поэтому и для Y .

З а м е ч а н и е 3. На самом деле, как нетрудно заметить, нам достаточно было потребовать счётную компактность ($1a'$ вместо $1a$): мы использовали лишь счётную центрированную систему замкнутых множеств.

$2a \Rightarrow 1$.

1. Итак, пусть в данном метрическом пространстве из любой последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.

2. Докажем сначала, что в этом случае любая счётная центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение ($2a \Rightarrow 1a'$). Пусть Φ_n , $n \in \mathbb{N}$, — замкнутые множества. Рассмотрим множества

$$\Psi_n = \bigcap_{k=1}^n \Phi_k. \quad (4.3)$$

Их непустота гарантируется центрированностью системы.

3. Выберем в каждом из них произвольным образом по точке $x_n \in \Psi_n$. По условию последовательность $\{x_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \rightarrow x$.

4. Докажем, что точка x принадлежит всем Φ_n . Поскольку последние замкнуты, достаточно доказать, что x является точкой касания для каждого из множеств Φ_n , т. е. что в любой её ε -окрестности найдётся хотя бы одна точка из Φ_n . Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу сходимости $x_{n_k} \rightarrow x$ при всех k , больших некоторого $K(\varepsilon)$, получим $\rho(x, x_{n_k}) < \varepsilon$. Но в силу (4.3) точка x_{n_k} принадлежит всем множествам Φ_n , где $n \leq n_k$.

5. С другой стороны, условие $\rho(x, x_{n_k}) < \varepsilon$ выполнено также при всех $k > K(\varepsilon)$, а для любого N найдётся k , при котором $N \leq n_k$. Тем самым показано, что в ε -окрестности точки x найдутся точки всех множеств Φ_n , что и требовалось.

6. Осталось доказать равносильность компактности и счётной компактности (применительно к метрическим пространствам; в общем случае это неверно!). Но из определения $2a$ следует 3 , поэтому пространство будет сепарабельным, а тем самым (в силу леммы 2) будет

иметь счётную базу. Тогда по лемме 3 любое открытое покрытие такого пространства содержит счётное подпокрытие, и мы можем применить предыдущие рассуждения.

Теорема доказана.

Для удобства читателей приведём здесь логическую схему проведённых выше рассуждений.

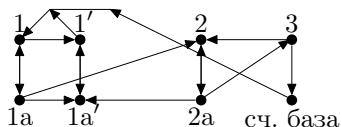


Рис. 1. Логическая схема.

§ 5. Компактные множества в метрических пространствах

До сих пор мы говорили лишь о компактных пространствах. Дадим теперь определение компактного множества.

Определение 6. *Множество A в метрическом пространстве X называется компактным, если оно компактно как метрическое пространство (с прежней метрикой ¹⁾).*

Поскольку компактность в метрических пространствах может быть определена в чисто метрических терминах (обсуждением чего мы занимались выше), то свойство множества (метрического пространства) быть компактным никак не зависит от «вложения» в другие метрические пространства, существенно лишь условие неизменности расстояния. (В случае общих топологических пространств ситуация меняется.)

Поскольку компактное пространство обязано быть полным, то компактное множество A с необходимостью замкнуто. (Очевидно, однако, что замкнутости ещё недостаточно для компактности множества.)

Однако нередко приходится рассматривать множества, единственным «препятствием» для которых к тому, чтобы быть компактными, является незамкнутость.

Определение 7. *Множество A в метрическом пространстве X называется предкомпактным, если его замыкание в X компактно.*

Так, например, в \mathbb{R} предкомпактны любой конечный интервал, $[0; 1] \cap \mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Внимание! В отличие от свойства компактности, свойство предкомпактности зависит от пространства, содержащего данное множество,

¹⁾ Метрика в пространстве A , «унаследованная» от содержащего его пространства X , называется индуцированной.

что легко проиллюстрировать примером множества $(0; 1)$ в пространствах \mathbb{R} и $(0; +\infty)$.

§ 6. Некоторые простые факты

Теорема Вейерштрасса. *Непрерывный образ компактного топологического пространства есть компактное топологическое пространство.*

Доказательство. Пусть отображение $f : T_1 \rightarrow T_2$ непрерывно, причём образом пространства T_1 является всё T_2 . Пусть $\{O_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие пространства T_2 . Тогда множества $f^{-1}(O_\alpha)$ открыты в силу непрерывности отображения f и вместе образуют покрытие пространства T_1 (почему?). В силу компактности последнего из покрытия $\{f^{-1}(O_\alpha)\}$ можно извлечь конечное подпокрытие, но тогда его образ будет покрытием T_2 (почему?). Тем самым мы извлекли из $\{O_\alpha\}$ конечное подпокрытие.

Теорема доказана.

Следствие. Непрерывный образ компактного множества в метрическом пространстве есть компактное множество в метрическом пространстве образов. В частности, оно ограничено (см. задачу 2) и замкнуто (см. § 5).

Теорема Кантора. *Функция, непрерывная на компактном метрическом пространстве, равномерно непрерывна.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть выполнено отрицание определения равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, \tilde{x} \in X \quad (\rho(x, \tilde{x}) < \delta, \rho(f(x), f(\tilde{x})) \geq \varepsilon).$$

Взяв, например, при всех $n \in \mathbb{N}$ $\delta_n = \frac{1}{n}$ и построив соответствующие последовательности x_n, \tilde{x}_n , получим для некоторой сходящейся подпоследовательности $x_{n_k} \rightarrow x$:

$$x_{n_k} \rightarrow x, \quad \tilde{x}_{n_k} \rightarrow x \quad (\text{в силу } \rho(x_n, \tilde{x}_n) \rightarrow 0),$$

$$f(x_{n_k}) \rightarrow f(x), \quad f(\tilde{x}_{n_k}) \rightarrow f(x).$$

Тогда в силу непрерывности расстояния по обоим аргументам в совокупности (см. дополнительную лекцию 1) и теоремы о предельном переходе в числовом неравенстве имеем

$$\rho(f(x), f(x)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \rho(f(x_{n_k}), f(\tilde{x}_{n_k})) \geq \varepsilon,$$

что невозможно.

Теорема доказана.

§ 7. Эквивалентность норм в конечномерном линейном пространстве

Утверждение 1. В любом конечномерном нормированном пространстве L^n все нормы эквивалентны, т. е. связаны соотношением

$$\exists \alpha_1, \alpha_2 > 0 \quad \forall x \in L^n \quad \alpha_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq \alpha_2 \|x\|.$$

Доказательство.

1. Ясно, что достаточно доказать эквивалентность какой-либо фиксированной нормы всем остальным.

2. Сделаем это для евклидовой нормы $\|x\|_2$. Прежде всего заметим, что произвольная норма $\|x\|$ непрерывна как функция своего аргумента относительно евклидовой нормы: $\lim_{\|x\|_2 \rightarrow 0} \|x\| \rightarrow 0$. В самом деле, если e_1, \dots, e_n — элементы ортонормированного базиса, x_1, \dots, x_n — координаты элемента x в этом базисе, то $\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \rightarrow 0$ при $\|x\|_2 \rightarrow 0$ в силу очевидной оценки $|x_i| \leq \|x\|_2$.

3. В силу теоремы Больцано–Вейерштрасса о компактности ограниченных замкнутых множеств в \mathbb{R}^n единичная сфера $\{x \in L^n \mid \|x\|_2 = 1\}$ компактна (см. также задачу 3), а в силу теоремы Вейерштрасса о непрерывном образе компактного пространства множество N значений, которые принимает норма $\|x\|$ на единичной относительно $\|x\|_2$ сфере, есть компактное множество действительных чисел. Следовательно, N замкнуто и ограничено.

4. Но тогда, во-первых, N ограничено сверху, а во-вторых, «ограничено» от нуля, поскольку норма ненулевого элемента отлична от нуля. Итак, на единичной относительно евклидовой нормы сфере имеем

$$0 < \beta_1 \leq \|x\| \leq \beta_2,$$

или

$$\alpha_1 \|x\| \leq 1 \leq \alpha_2 \|x\| \tag{7.1}$$

с $\alpha_1 = 1/\beta_2$, $\alpha_2 = 1/\beta_1$, откуда для произвольного $x \in L^n$ имеем

$$\alpha_1 \|x\| \leq \|x\|_2 \leq \alpha_2 \|x\|.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. В конечномерном нормированном пространстве сходимость по норме влечёт сходимость по любой другой норме, которую можно ввести в данном линейном пространстве.

Следствие 2. Из предыдущего следствия вытекает, что сходимость по норме в конечномерном пространстве эквивалентна по координатной сходимости. В самом деле: это верно для евклидовой нормы (которая может быть введена так, что используемый базис окажется ортонормированным).

Утверждение 2. В произвольном банаховом пространстве X любое конечномерное линейное подпространство (многообразие) L^m замкнуто (является подпространством).

Доказательство.

1. Требуется лишь доказать, что если некоторая последовательность $\{x_n\} \subset L^m$ сходится по норме X , то её предел принадлежит L^m .

2. Для доказательства этого факта рассмотрим сначала L^m как линейное пространство (линейное многообразие). Легко убедиться, что индуцированная из пространства X норма будет нормой и в L^m . Следовательно, (в силу утверждения об эквивалентности норм) фундаментальная по норме пространства X последовательность будет фундаментальной и по какой-либо евклидовой норме в L^m . Введём в L^m ортонормированный базис $\{e_i\}_{i=1, \dots, m}$.

3. Тогда последовательности координат элементов x_n тоже будут фундаментальными, а следовательно, сходящимися. Задаваемый соответствующими пределами элемент $x \in L^m$ будет пределом $\{x_n\}$ в евклидовой норме, а следовательно, и в исходной норме, совпадающей с нормой X . В силу единственности предела имеем $x_n \rightarrow x \in L^m$, что и требовалось.

Утверждение доказано.

§ 8. Теорема Арцела

Теорема Арцела. Пусть заданы функции $f_n : K_1 \rightarrow K_2$ и

- 1) K_1, K_2 — компактные метрические пространства;
- 2) последовательность функций $\{f_n\}$ является равностепенно непрерывной (или, выражаясь точнее, равномерно равностепенно непрерывной):

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, \tilde{x} \in K_1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\rho_1(x, \tilde{x}) \leq \delta \Rightarrow \rho_2(f_n(x), f_n(\tilde{x})) \leq \varepsilon). \quad (8.1)$$

Тогда из последовательности $\{f_n\}$ можно извлечь подпоследовательность, равномерно сходящуюся к некоторой функции $f \in C(K_1, K_2)$.

Доказательство.

1. Построим (это возможно в силу компактности K_1) конечные 1 -, $\frac{1}{2}$ -, $\frac{1}{4}$ - и т. д. сети. Упорядочив совокупность этих сетей в порядке перечисления и выбрасывая из последовательности повторяющиеся точки, получим счётное всюду плотное в K_1 множество $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_l, \dots\}$.

2. Для каждого фиксированного l рассмотрим последовательности $\{f_n(x_l)\}$. В силу компактности множества значений K_2 с помощью «диагональной процедуры» (см. приложение в конце данной лекции)

можно выделить такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, которая будет сходиться в каждой точке $x_l \in X$:

$$f(x_l) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x_l), \quad l \in \mathbb{N}.$$

Для сокращения записи будем далее обозначать полученную подпоследовательность функций $\{f_{n_k}\}$ одним индексом: $f_k \equiv f_{n_k}$, не смешивая её с исходной последовательностью.

3. Докажем, что полученная функциональная подпоследовательность сходится поточечно при всех $x \in K_1$, а не только при $x_l \in X$, и, более того, сходимость равномерна на K_1 . Пусть задано $\varepsilon > 0$. Пользуясь неравенством треугольника, запишем для произвольного $x \in K_1$:

$$\begin{aligned} \rho_2(f_k(x), f_m(x)) &\leq \\ &\leq \rho_2(f_k(x), f_k(x_l)) + \rho_2(f_k(x_l), f_m(x_l)) + \rho_2(f_m(x_l), f_m(x)), \end{aligned} \quad (8.2)$$

где x_l будет определено ниже.

4. Пользуясь равностепенной непрерывностью исходной функциональной последовательности (а значит, и выбранной подпоследовательности), найдём такое $\delta > 0$, что для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\rho_1(\bar{x}, \bar{x}') < \delta$ будет выполнено $\rho_2(f_k(\bar{x}), f_k(\bar{x}')) < \frac{\varepsilon}{3}$.

5. Найдём первое среди чисел 2^{-j} , $j \in \mathbb{N}$, меньшее δ . Рассмотрим конечное множество $X_j \subset X$, состоящее из всех элементов выбранных ранее 1 -, $\frac{1}{2}$ -, ..., $\frac{1}{2^j}$ -сетей в K_1 . (Легко видеть, что тогда для каждого $x \in X$ ближайший к нему элемент $x_l \in X_j$ находится на расстоянии меньше δ .)

6. В силу сходимости последовательности $\{f_k\}$ во всех точках множества X_j (поскольку она по построению сходится всюду на X) существует такое $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ (зависящее только от ε , но не от $x!$), что для любых $k, m > N$ и для любого $x_l \in X_j$ верно неравенство

$$\rho_2(f_k(x_l), f_m(x_l)) < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8.3)$$

Поскольку ближайший к произвольному фиксированному элементу $x \in K_1$ элемент $x_l \in X_j$ находится на расстоянии ближе δ , то с учётом выбора δ и два остальных слагаемых в (8.2) меньше $\frac{\varepsilon}{3}$, откуда мы получаем

$$\rho_2(f_k(x), f_m(x)) < \varepsilon \quad (8.4)$$

при всех $x \in K_1$ и всех $k, m > N(\varepsilon)$.

7. Тем самым установлена «равномерная фундаментальность» последовательности $\{f_k\}$ на K_1 . Из этого факта следует сходимость в каждой точке, а также равномерность этой сходимости: для доказательства последней достаточно перейти в (8.4) к пределу при $m \rightarrow \infty$ (уже зная, что он существует поточечно).

8. Итак, мы доказали, что из данной последовательности можно извлечь равномерно сходящуюся последовательность, предел которой —

как равномерный предел непрерывных функций — сам является непрерывной функцией.

Теорема доказана.

Следствие. Семейство функций из $C(K_1, K_2)$, обладающее свойством равномерной равностепенной непрерывности (как в условии теоремы) с конкретными $\delta(\varepsilon)$, является компактным (в индуцированной из $C(K_1, K_2)$ метрике).

□ В самом деле, мы показали, что любая последовательность элементов этого семейства содержит сходящуюся в $C(K_1, K_2)$ подпоследовательность. Осталось доказать, что предел лежит в рассматриваемом семействе. Но это легко следует из предельного перехода в неравенстве $\rho_2(f_n(x), f_n(\tilde{x})) \leq \varepsilon$. ▣

Замечание 4. Если бы мы использовали в условии теоремы неравенство $\rho_2(f_n(x), f_n(\tilde{x})) < \varepsilon$, то смогли бы гарантировать лишь предкомпактность соответствующего семейства функций, т. к. неравенство при предельном переходе может стать нестрогим.

§ 9. Теорема Пеано

В качестве примера использования теоремы Арцела докажем теорему Пеано о существовании (локальном) решении задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения. Эта теорема не гарантирует единственности, но зато верна в более слабых предположениях относительно правой части уравнения; при этом вместо теоремы о неподвижной точке в доказательстве используется более изощрённая техника, основанная на идее компактности.

Теорема Пеано. Рассмотрим дифференциальное уравнение

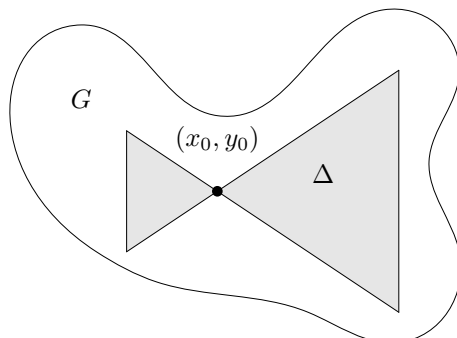
$$y' = f(x, y). \quad (9.1)$$

Если правая часть $f(x, y)$ непрерывна в некоторой ограниченной замкнутой области G , то через каждую внутреннюю точку (x_0, y_0) этой области проходит хотя бы одна интегральная кривая этого уравнения.

Доказательство. 1. Заметим прежде всего (см. теорему Вейерштрасса, § 6, и задачи 2, 3), что функция $f(x, y)$, как непрерывная на компактном множестве G , ограничена. Пусть $M > 0$ таково, что всюду в G верно $|f(x, y)| < M$.

2. Построим фигуру $\Delta \subset G$ следующим образом. Проведём через точку (x_0, y_0) прямые с угловыми коэффициентами $\pm M$ и возьмём $a < x_0$, $b > x_0$ так, чтобы затuşёванные треугольники лежали целиком в G . Это возможно, т. к. (x_0, y_0) — внутренняя точка области G .

3. Построим последовательность ломаных Эйлера, лежащих в Δ . Именно, из точки (x_0, y_0) проведём отрезок с угловым коэффициентом $f(x_0, y_0)$ до точки (x_1, y_1) (здесь, очевидно, $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$). Затем проведём отрезок с угловым коэффициентом $f(x_1, y_1)$ из

Рис. 2. Фигура Δ

точки (x_1, y_1) в точку (x_2, y_2) . Важно, что каждое следующее звено не может «вылезти» за верхнюю и нижнюю наклонные границы фигуры Δ (почему?). При этом каждый раз будем брать приращение по x «не слишком маленьким» (чтобы достичь абсциссы b за конечное число шагов) и «не слишком большим» (меньше некоторого δ , своего для каждой конкретной ломаной). Аналогично построим часть ломаной и «назад» до абсциссы a . Описанным способом построим бесконечную последовательность ломаных L_n , где $\delta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим через $\varphi_n(x)$ функции (определённые на $[a; b]$), графиками которых являются ломаные L_n .

Заметим, что эти ломаные лежат целиком в пределах фигуры $\Delta \subset G$, «не вылезая» вверх или вниз и даже не соприкасаясь с её наклонными границами (почему?). Тем самым, каждая вершина ломаной оказывается строго внутри углов, образованных этими границами. Более того, функции φ_n являются липшиц-непрерывными с общей константой Липшица M (докажите это аккуратно!).

4. Таким образом, функции $\{\varphi_n(x)\}$ обладают следующими свойствами:

- 1) они определены на $[a; b]$;
- 2) они равномерно ограничены;
- 3) они равномерно непрерывны.

(Свойства 2), 3) следуют из сказанного в последнем абзаце этапа 3 доказательства.)

В силу теоремы Арцела из последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ можно выделить сходящуюся равномерно на $[a; b]$ подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}(x)\}$. Обозначим её для простоты $\{\psi_k(x)\}$ и положим

$$\psi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi_k(x). \quad (9.2)$$

Докажем, что эта функция является решением уравнения (9.1), проходящим через точку (x_0, y_0) (и, тем самым, решением соответствующей задачи Коши).

5. Надо доказать фактически:

$$\forall x' \in (a; b), \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x'' \in [a; b] \cap ((x' - \delta; x') \cup (x'; x' + \delta))$$

$$\left| \frac{\psi(x'') - \psi(x')}{x'' - x'} - f(x', \psi(x')) \right| < 2\varepsilon.$$

Зафиксируем произвольные $x' \in [a; b]$ и $\varepsilon > 0$. В силу непрерывности $f(x, y)$ и предельного соотношения (9.2) достаточно доказать, что

$$\exists \delta > 0, \exists K > 0 \forall k > K, \forall x'' \in [a; b] \cap ((x' - \delta; x') \cup (x'; x' + \delta))$$

$$\left| \frac{\psi_k(x'') - \psi_k(x')}{x'' - x'} - f(x', \psi_k(x')) \right| < \varepsilon. \quad (9.3)$$

Поскольку f непрерывна в области G , то $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0$ такое, что при

$$|x - x'| < 2\eta, \quad |y - y'| < 4M\eta \quad (9.4)$$

(где $y' = \psi(x')$) верно

$$f(x', y') - \varepsilon < f(x, y) < f(x', y') + \varepsilon. \quad (9.5)$$

Условия (9.4) задают открытый прямоугольник, который мы обозначим Q . При достаточно малом $\eta > 0$ он лежит целиком в Δ .

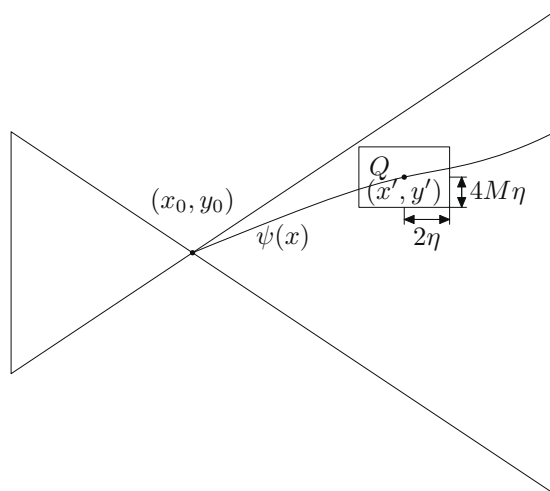


Рис. 3. Прямоугольник Q

Выберем теперь $K \in \mathbb{N}$ такое, что при всех $k > K$:

- 1) верно неравенство $|\psi(x) - \psi_k(x)| < 2M\eta$ для всех $x \in [a; b]$,
 - 2) звенья ломаных L_k имеют длины меньше η по координате x .
- Тогда при $|x - x'| < 2\eta$ все ломаные L_k с $k > K$ лежат внутри Q (почему?), а следовательно, для любой точки (x, y) , лежащей на любой из этих ломаных при $|x - x'| < 2\eta$, выполнено (9.5).

Рассмотрим теперь конкретную ломаную с некоторым $k > K$. Пусть точки $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_{n+1}, b_{n+1})$ — её вершины, причём

$$a_0 \leq x' < a_1 < \dots < x'' \leq a_{n+1} \quad (9.6)$$

(для определённости считаем, что $x'' > x'$; случай $x'' < x'$ рассматривается аналогично). Для функции $\psi_k(x)$ имеем

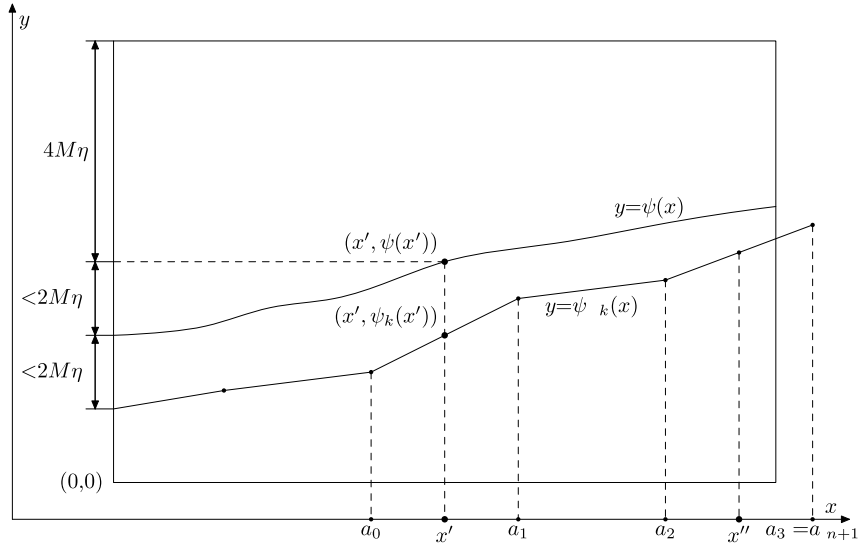


Рис. 4. Ломаная $y = \psi_k(x)$

$$\psi_k(a_1) - \psi_k(x') = f(a_0, b_0)(a_1 - x');$$

$$\psi_k(a_{i+1}) - \psi_k(a_i) = f(a_i, b_i)(a_{i+1} - a_i), \quad i = \overline{1, n-1};$$

$$\psi_k(x'') - \psi_k(a_n) = f(a_n, b_n)(x'' - a_n).$$

Тогда при $|x' - x''| < \eta$ в силу (9.5) и того факта, что все вершины $(a_0, b_0), (a_1, b_1), \dots, (a_{n+1}, b_{n+1})$ лежат в прямоугольнике Q , имеем

$$[f(x', y') - \varepsilon](a_1 - x') < \psi_k(a_1) - \psi_k(x') < [f(x', y') + \varepsilon](a_1 - x');$$

$$[f(x', y') - \varepsilon](a_{i+1} - a_i) < \psi_k(a_{i+1}) - \psi_k(a_i) < [f(x', y') + \varepsilon](a_{i+1} - a_i);$$

$$[f(x', y') - \varepsilon](x'' - a_n) < \psi_k(x'') - \psi_k(a_n) < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - a_n).$$

Сложив эти равенства, получаем:

$$[f(x', y') - \varepsilon](x'' - x') < \psi_k(x'') - \psi_k(x') < [f(x', y') + \varepsilon](x'' - x'),$$

откуда и следует (9.3).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 5. Разные последовательности ломаных Эйлера могут сходиться к разным решениям уравнения (9.1), и, таким образом, решение может быть не единственно. Рассмотрите пример задачи Коши

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

§ 10. Приложение

Доказательство леммы 2.

1. Достаточно доказать, что базу стандартной метрической топологии в сепарабельном метрическом пространстве X образуют шары B_{nk} с центрами в точках всюду плотной счётной системы $\{x_n\}$ и всевозможными рациональными радиусами r_k , $k \in \mathbb{N}$.

2. С учётом теоремы 2 из лекции 5б и поскольку всякое открытое множество в метрическом пространстве вместе с каждой своей точкой содержит (по определению) некоторый открытый шар, достаточно доказать, что для произвольного открытого шара B и произвольной точки y в нём найдётся шар из рассматриваемого семейства, содержащий точку y и целиком содержащийся в шаре B .

3. Пусть $B \equiv B_R(x) \subset X$ — шар радиуса R с центром в точке x ; пусть y — произвольная точка в этом шаре. Пусть $r = \frac{R - \rho(x, y)}{3}$, тогда:
1) в шаре радиуса r с центром в точке y найдётся точка x_n из счётной системы (поскольку последняя всюду плотна в X);
2) шар с центром в точке x_n радиуса r_k , где $r_k \in \mathbb{Q}$, $r < r_k < 2r$, содержит точку y и лежит целиком в шаре B (докажите самостоятельно!).

4. Проведя для каждой точки шара B аналогичное построение, мы представим его в виде объединения шаров из системы $\{B_{nk}\}$, что и доказывает, что последняя образует базу (очевидно, счётную).

Лемма доказана.

Доказательство леммы 3.

1. Пусть $\{G_n\}$ — счётная база пространства T . Пусть $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — некоторое его открытое покрытие. Тогда для каждого O_α из покрытия существует (по определению базы топологии) представление

$$O_\alpha = \cup_{k \in K_\alpha} G_k, \quad K_\alpha \subset \mathbb{N}. \quad (10.1)$$

2. Обозначим $K = \cup_{\alpha \in A} K_\alpha \subset \mathbb{N}$. Поскольку $\{O_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — покрытие, то

$$T = \cup_{\alpha \in A} O_\alpha = \cup_{\alpha \in A} \cup_{k \in K_\alpha} G_k = \cup_{k \in K} G_k, \quad K \subset \mathbb{N}. \quad (10.2)$$

Тем самым, подсемейство $\{G_k\}_{k \in K}$ базы топологии является покрытием. Но в силу (10.1) и равенства $K = \cup_{\alpha \in A} K_\alpha$ для каждого $k \in K$ найдётся хотя бы одно такое α_k , что $G_k \subset O_{\alpha_k}$.

3. Следовательно,

$$T = \cup_{k \in K} G_k \subset \cup_{k \in K} O_{\alpha_k} \subset T,$$

или $T = \cup_{k \in K} O_{\alpha_k}$. Мы извлекли из данного покрытия не более чем счётное подпокрытие.

Лемма доказана.

Диагональная процедура.

1. Пусть нам требуется из последовательности функций $\{f_n : K_1 \rightarrow K_2\}$ извлечь подпоследовательность, сходящуюся в каждой точке счётного множества $X = \{x_l\}_{l \in \mathbb{N}}$.

2. Выберем на первом шаге подпоследовательность $\{f_{n_k}\} \equiv \{f_{n_1}\}$, сходящуюся в точке x_1 (это можно сделать, т. к. последовательность $\{f_n(x_1)\} \subset K_2$ лежит в компактном пространстве).

3. Далее выберем из полученной подпоследовательности последовательность $\{f_{n_2}\}, \dots$, на i -ом шаге — выберем из подпоследовательности $\{f_{n_{i-1}}\}$ подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$, сходящуюся в точке $x_i \in X$. Заметим, что при извлечении подпоследовательностей свойство сходиться в предыдущих точках не терялось.

4. Запишем теперь полученные последовательности в бесконечный столбец и заметим, что под произвольным элементом записан элемент, номер которого в исходной последовательности не меньше номера рассматриваемого элемента в ней же. (Зачем нужно это замечание?) Рассмотрим теперь «диагональную последовательность», способ построения которой исходя из полученной таблицы ясен из названия, — она будет подпоследовательностью исходной последовательности (почему?), обладающей нужным нам свойством сходимости во всех точках $x_l \in X$ (почему?).

§ 11. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Доказать, что любое вполне ограниченное множество в метрическом пространстве является ограниченным.

Задача 2. Доказать, что любое компактное множество в метрическом пространстве является ограниченным.

Задача 3. Как следует из задачи 2 и вышеизложенного материала, любое компактное множество в метрическом пространстве является замкнутым и ограниченным.

1) Доказать, что в \mathbb{R}^n эти два условия вместе достаточны для компактности множества.

2) Сформулировать достаточное условие предкомпактности в \mathbb{R}^n .

3) Привести пример, показывающий, что в общем случае этих двух условий недостаточно для компактности.

Задача 4. С помощью « $\frac{\epsilon}{3}$ -приёма» доказать полноту пространства $C(M_1, M_2)$ ограниченных непрерывных функций, действующих из метрического пространства M_1 в полное метрическое пространство M_2 .

Задача 5. Пусть X — банахово пространство, причём X^* сепарабельно. Как с помощью диагональной процедуры извлечь из ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ слабо сходящуюся?

Задача 6. Пусть M — равномерно ограниченное множество функций в $C[a; b]$. Доказать, что множество функций

$$\left\{ \int_0^t x(\tau) d\tau \mid x(t) \in M \right\}$$

предкомпактно в $C[a; b]$.

Задача 7. Доказать, что множество непрерывно дифференцируемых функций $x(t)$ на $[a; b]$ таких, что

$$\int_a^b \left((x(t))^2 + (x'(t))^2 \right) dt < k$$

при некотором фиксированном k , предкомпактно в $C[a; b]$.

Задача 8. Доказать, что соотношение эквивалентности для норм, заданных на линейном пространстве, действительно является отношением эквивалентности в смысле определения из семинар-лекции 2.

Задача 9. Доказать, что любое конечномерное нормированное пространство полно (и, следовательно, банахово).