Лекция 9. Пространства С. Л. Соболева. Теоремы вложений.

Корпусов Максим Олегович, Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

17 апреля 2012 г.

Определение основного пространства Соболева

Определение 9. *Посредством* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$ *мы обозначим векторное подпространство в* $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$\mathbb{W}^{k,p}(\Omega) = \left\{ u(x) \in \mathcal{D}'(\Omega) : \ \partial^\alpha u(x) \in \mathbb{L}^p(\Omega), \ |\alpha| \leqslant k \right\}. \qquad (1)$$

Определение 10. *Посредством* $\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega)$ *мы обозначим векторное пространство, полученное пополнением векторного пространства* $\mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$ *по норме* $\|\cdot\|_{k,p}$ *пространства* $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$.

Теорема вложения-1

Теорема

Имеют место вложения:

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{p^*}(\Omega) \quad \textit{при} \quad N > p, \quad p^* = \frac{Np}{N-p},$$

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}\left(\overline{\Omega}\right) \quad \textit{при} \quad N < p.$$

Причем имеют место следующие неравенства:

$$\|u\|_{p^*} \leqslant c\||\nabla u|\|_p \quad \textit{при} \quad N > p; \tag{2}$$

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leqslant c\,(\mathrm{meas}\,\Omega)^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}} \||\nabla u|\|_p \quad \textit{при} \quad N < p. \tag{3}$$

Доказательство-1

Докажем неравенство (2) для функций $u(x) \in \mathbb{C}_0^1(\Omega)$. Заметим, что эту функцию можно продолжить нулем вне области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Прежде всего справедливо неравенство

$$|u(x)| \leqslant \int\limits_{-\infty}^{x_i} dy_i \, |\partial_i u(y)| \, .$$

$N-$раз перемножим это неравенство и получим следующее

$$|u(x)|^N \leqslant \prod_{i=1}^{N} \int\limits_{-\infty}^{x_i} dy_i \, |\partial_i u(y)| \leqslant \prod_{i=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_i \, |\partial_i u(y)| \, .$$

Доказательство-2

Теперь возведем обе части этого неравенства в степень $(N-1)^{-1}$ и получим неравенство

$$|u(x)|^{N/(N-1)} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_i \, |\partial_i u(y)| \right)^{1/(N-1)}. \qquad (4)$$

Проинтегрируем обе части этого неравенства по переменной x_1 и тогда получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} |u(x)|^{N/(N-1)} \, dx_1 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^1} dx_1 \left(\prod_{i=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^1} dy_i \, |\partial_i u(y)| \right)^{1/(N-1)}. \qquad (5)$$

Доказательство-3

Сейчас воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера. Напомним, как оно выглядит для наших целей:

$$\int\limits_G |f_2(x)\cdots f_N(x)|\, dx \leqslant \|f_2\|_{p_2}\|f_3\|_{p_3}\cdots\|f_N\|_{p_N}, \quad \frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}+\cdots\frac{1}{p_N}=1. \tag{6}$$

Теперь воспользуемся этим неравенством для того чтобы оценить правую часть неравенства (5), положив в обобщенном неравенстве Гельдера (6)

$$p_2 = N-1, ..., p_N = N-1, \quad \frac{1}{N-1}+\frac{1}{N-1}+\cdots\frac{1}{N-1}=1,$$

а в качестве функций $f_k(x)$ возьмем следующие интегралы:

$$f_k(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} dx_k\, |\partial_k u(y)|\, dy_1, \quad k = \overline{2, N-1}.$$

Доказательство-4

Из выражения (5) и обобщенного неравенства Гельдера вытекает цепочка неравенств:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^1} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |\partial_1 u(x)|\, dx_1\right)^{1/(N-1)} \int\limits_{\mathbb{R}^1} f_2(x) f_3(x) \cdots f_N(x)\, dx_1 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} |\partial_1 u(x)|\, dx_1\right)^{1/(N-1)} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)|\, dx_1 dx_2\right)^{1/(N-1)} \times \cdots \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)|\, dx_1 dx_N\right)^{1/(N-1)} \qquad (7)$$

Доказательство-5

Теперь проинтегрируем неравенство (7) по переменной x_2 и получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1\, dx_2 \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} dx_1 dx_2 \left|\partial_2 u(x)\right|\, dx_1 dx_2\right)^{1/(N-1)} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^1} dx_2 \left(\int\limits_{\mathbb{R}^1} \left|\partial_1 u(x)\right|\, dx_1\right)^{1/(N-1)} \times \cdots \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left|\partial_2 u(x)\right|\, dx_1 dx_N\right)^{1/(N-1)}$$

Доказательство-6

Воспользовавшись опять обобщенным неравенством Гельдера получим отсюда неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx_1\, dx_2 \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\partial_2 u(x)|\, dx_1 dx_2\right)^{1/(N-1)} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\partial_1 u(x)|\, dx_1 dx_2\right)^{1/(N-1)} \times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^3} |\partial_3 u(x)|\, dx_1 dx_2 dx_3\right)^{1/(N-1)} \times \cdots \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\mathbb{R}^2} |\partial_N u(x)|\, dx_1 dx_2 dx_N\right)^{1/(N-1)}$$

Доказательство-7

Продолжая дальше интегрирование по следующей переменной с последующим применением обобщенного неравенства Гельдера мы в итоге получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{N/(N-1)}\, dx \leqslant \prod_{i=1}^{N} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} dx\, |\partial_i u(x)| \right)^{1/(N-1)}.$$

Отсюда приходим к следующему неравенству:

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leqslant \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} |\partial_1 u(x)|\, dx \times \cdots \times \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\partial_N u(x)|\, dx \right)^{1/N}. \tag{8}$$

Доказательство-8

Теперь воспользуемся тем, что среднее арифметическое всегда больше среднего геометрического неотрицательных чисел:

$$(a_1 a_2 \cdots a_N)^{1/N} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_N}{N}.$$

Тогда из неравенства (8) получим, что

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leqslant \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int\limits_{\Omega} |\partial_i u(x)| \, dx. \tag{9}$$

Теперь можно воспользоваться легко проверяемым неравенством для неотрицательных чисел:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_i \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_{i=1}^{N} a_i^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство-9

Отсюда и из (9) получим следующее неравенство:

$$\|u\|_{N/(N-1)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} \int\limits_{\Omega} |\nabla u| \, dx. \tag{10}$$

Следовательно, неравенство (2) при $p = 1$ доказано. Для доказательства этого неравенства при $p > 1$ вместо функции u в (10) надо подставить функцию $|u|^{\beta}$. Тогда получим неравенство

$$\||u|^{\beta}\|_{N/(N-1)} \leqslant \frac{\beta}{\sqrt{N}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u|^{\beta-1} |\nabla u| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\beta}{\sqrt{N}} \left\| |u|^{\beta-1} \right\|_{p'} \||\nabla u|\|_p, \quad p' = \frac{p}{p-1}. \tag{11}$$

Относительно $\beta > 1$ потребуем, чтобы

$$\beta \frac{N}{N-1} = (\beta - 1)\,\frac{p}{p-1} \Rightarrow \beta = \frac{p(N-1)}{N-p}.$$

Можно доказать, что при $p > 1$ величина $\beta > 1$. Кроме того, имеет место выражения:

$$\beta \frac{N}{N-1} = (\beta - 1)\,\frac{p}{p-1} = p^* \equiv \frac{Np}{N-p} \quad \text{при} \quad N > p.$$

Следовательно, из (11) приходим к неравенству:

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p^*}\,dx\right)^{(N-1)/N} \leqslant \frac{\beta}{\sqrt{N}} \left(\int\limits_{\Omega} |u(x)|^{p^*}\,dx\right)^{(p-1)/p} \||\nabla u|\|_p,$$

из которого сразу же вытекает неравенство (2).

Доказательство-11

Приступим теперь к доказательству неравенства (3). Область Ω будем считать ограниченной. С этой целью рассмотрим неравенство (11), в котором сделаем замену функций

$$\overline{u}(x) = \frac{\sqrt{N}|u|}{\||\nabla u|\|_p},$$

После подстановки получим следующее неравенство:

$$\left(\frac{1}{N}\right)^{\beta/2} \||\nabla u|\|_p^{\beta} \||\overline{u}|^{\beta}\|_{N'} \leqslant \frac{\beta}{\sqrt{N}} \||\nabla u|\|_p \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{\beta-1}{2}} \||\nabla u|\|_p^{\beta-1} \||\overline{u}|^{\beta-1}\|_{p}$$

где

$$N^{'} \equiv \frac{N}{N-1}.$$

Доказательство-12

Откуда сразу же приходим к неравенству

$$\| |\overline{u}|^{\beta} \|_{N'} \leqslant \gamma \| |\overline{u}|^{\beta-1} \|_{p'}, \tag{12}$$

которое «расшифруем»:

$$\left(\int\limits_{\Omega} |\overline{u}|^{\beta N'} \, dx \right)^{1/N'} \leqslant \beta \left(\int\limits_{\Omega} |\overline{u}|^{p'(\beta-1)} \, dx \right)^{1/p'}.$$

Следовательно получим следующее неравенство:

$$\|\overline{u}\|_{\beta N'}^{\beta} \leqslant \beta \|\overline{u}\|_{p'(\beta-1)}^{\beta-1} \Rightarrow \|\overline{u}\|_{\beta N'} \leqslant \beta^{1/\beta} \|\overline{u}\|_{p'(\beta-1)}^{1-1/\beta}. \tag{13}$$

Теперь сделаем важное предположение, от которого мы затем в конце доказательства избавимся — пусть

$$\mathrm{meas}\{\Omega\} = 1.$$

Доказательство-13

Полезность этого предположения заключается в том, что если $p_1 > p_2$, то справедливо неравенство

$$\|v\|_{p_2} \leqslant \|v\|_{p_1} \quad \text{для всех} \quad v(x) \in \mathbb{L}^{p_1}(\Omega).$$

Действительно, справедлива цепочка неравенств:

$$\left(\int\limits_{\Omega} |u|^{p_2}\, dx\right)^{1/p_2} = \left(\int\limits_{\Omega} 1 \cdot |u|^{p_2}\, dx\right)^{1/p_2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left(\int\limits_{\Omega} 1^{q'}\, dx\right)^{1/q'} \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{p_1}\, dx\right)^{p_2/p_1}\right)^{1/p_2} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |u|^{p_1}\, dx\right)^{1/p_1},$$

где

$$q' = \frac{q}{q-1}, \quad q = \frac{p_1}{p_2}.$$

Доказательство-14

С учетом этого предположения из неравенства (13) получим

$$\|\overline{u}\|_{\beta N'} \leqslant \beta^{1/\beta} \|\overline{u}\|^{1-1/\beta}_{p'\beta}, \tag{14}$$

здесь мы воспользовались неравенством $p^{'}(\beta - 1) \leqslant p^{'}\beta$.
Теперь введем обозначение:

$$\varepsilon = \frac{N^{'}}{p^{'}} > 1, \quad \beta = \varepsilon^{m}.$$

поскольку $p > N$ и учтем, что

$$\beta p^{'} = \varepsilon^{m-1} N^{'}.$$

Тогда из (14) получим неравенство:

$$\|\overline{u}\|_{\varepsilon^m N'} \leqslant \varepsilon^{m/\varepsilon^m} \|\overline{u}\|^{1-1/\varepsilon^m}_{\varepsilon^{m-1} N'} \quad \text{при} \quad m = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

Возьмем в этом неравенстве $m = 1$ и получим

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon} \leqslant \varepsilon^{1/\varepsilon} \|\overline{u}\|^{1-1/\varepsilon}_{N'}. \tag{16}$$

Доказательство-15

С другой стороны, из неравенства (10) и нашего предположения, что $\operatorname{meas}\{\Omega\} = 1$, получим неравенство

$$\|u\|_{N'} \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} \||\nabla u|\|_1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{N}} \||\nabla u|\|_p.$$

Отсюда сразу же приходим к неравенству

$$\|\overline{u}\|_{N'} \leqslant 1.$$

Значит из (16) приходим к неравенству:

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon} \leqslant \varepsilon^{1/\varepsilon}. \qquad (17)$$

Тогда после подстановки этого неравенства в (15) при $m = 2$ получим

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon^2} \leqslant \varepsilon^{2/\varepsilon^2} \left(\varepsilon^{1/\varepsilon}\right)^{1-1/\varepsilon^2} \leqslant \varepsilon^{2/\varepsilon^2+1/\varepsilon}.$$

Доказательство-16

Тогда после подстановки этого неравенства в (15) при $m = 3$ получим

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon^3} \leqslant \varepsilon^{3/\varepsilon^3} \left(\varepsilon^{2/\varepsilon^2 + 1/\varepsilon}\right)^{1-1/\varepsilon^2} \leqslant \varepsilon^{3/\varepsilon^3 + 2/\varepsilon^2 + 1/\varepsilon}.$$

Следовательно, на $m-$том шаге мы получим неравенство

$$\|\overline{u}\|_{N'\varepsilon^m} \leqslant \varepsilon^{\sum\limits_{k=1}^{m} k/\varepsilon^k} \leqslant a \equiv \varepsilon^{\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k/\varepsilon^k}$$

Из теоремы 21 второй главы перейдя к пределу при $m \to +\infty$, получим неравенство

$$\|\overline{u}\|_\infty \leqslant a.$$

Отсюда с учетом определения функции $\overline{u}(x)$ получим неравенство:

$$\sup_{x \in \Omega} |u(x)| \leqslant \frac{a}{\sqrt{N}} \||\nabla u|\|_p.$$

Доказательство-17

Теперь избавимся от требования $\operatorname{supp}\{\Omega\} = 1$. Сделаем замену переменной

$$y_i = \operatorname{meas}(\Omega)^{1/N} x_i \quad i = \overline{1, N}.$$

Справедлива следующая цепочка выражений:

$$\sup_{x\in\Omega} |u(x)| \leqslant \frac{a}{\sqrt{N}} \left(\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \right)^{1/p} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{N}} \left(\int\limits_{\Omega} \frac{(\operatorname{meas}(\Omega))^{p/N}}{\operatorname{meas}(\Omega)} |\nabla_y u|^p \; dy \right)^{1/p} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{N}} \left[\operatorname{meas}(\Omega)\right]^{1/N - 1/p} \||\nabla u|\|_p.$$

Доказательство-18

Мы доказали наши неравенства для случая функции $u(x) \in \mathbb{C}_0^1(\Omega)$. Теперь нужно продолжить эти результаты для функций из $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Рассмотрим неравенство (2), поскольку неравенство (3) рассматривается аналогичным образом.

Доказательство-19

Пусть последовательность

$$\{u_m\} \subset \mathbb{C}_0^1(\Omega)$$

такова, что она сходится сильно в $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Возьмем $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ и применим неравенство (2) к разности $u_{m_1} - u_{m_2}$ и получим

$$\|u_{m_1} - u_{m_2}\|_{p^*} \leqslant c \, \||\nabla u_{m_1} - \nabla u_{m_2}|\|_p \quad p^* = \frac{Np}{N-p}. \tag{18}$$

Доказательство-20

Поскольку последовательность $\{u_m\}$ сходится в $\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)$, то она фундаментальна в этом пространстве, следовательно, из неравенства (18) вытекает, что эта последовательность фундаментальна и в $\mathbb{L}^{p^*}(\Omega)$ и в силу полноты этого пространства сходится сильно к некоторому элементу $u(x) \in \mathbb{L}^{p^*}(\Omega)$. С другой стороны, этот же элемент $u(x) \in \mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)$, поскольку по условию последовательность сходится сильно в $\mathbb{W}^{1,p}_0(\Omega)$, а норма этого пространства имеет вид

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \||\nabla u|\|_p.$$

Следовательно, мы можем перейти к пределу при $m_1 \to +\infty$ в неравенстве (18) и получить следующее неравенство:

$$\|u - u_{m_2}\|_{p^*} \leqslant c\, \||\nabla u - \nabla u_{m_2}|\|_p\,. \tag{19}$$

Тем самым, отсюда вытекает неравенство

$$\|u\|_{p^*} \leqslant \|u_{m_2}\|_{p^*} + \|u - u_{m_2}\|_{p^*} \leqslant c\||\nabla u_{m_2}|\|_p + c\||\nabla u - \nabla u_{m_2}|\|_p,$$

в котором можно перейти к пределу при $m_2 \to +\infty$ и воспользовавшись неравенством

$$|\||\nabla u_{m_2}|\|_p - \||\nabla u|\|_p| \leqslant \||\nabla u - \nabla u_{m_2}|\|_p$$

прийти к следующему неравенству:

$$\|u\|_{p^*} \leqslant c\||\nabla u|\|_p \quad \text{для всех} \quad u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega).$$

Как мы уже говорили, неравенство (3) распространяется на функции из $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$ аналогичным образом.

Теорема вложения-2

Теорема

Имеют место вложения:

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{Np/(N-kp)}(\Omega) \quad \textit{при} \quad N > kp\,; \tag{20}$$

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^m(\overline{\Omega}) \quad \textit{при} \quad 0 \leqslant m \leqslant k - \frac{N}{p}. \tag{21}$$

Доказательство-1

Докажем сначала вложение (20). Пусть $N > kp$. Итак, из теоремы 13 у нас имеется вложение

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{Np/(N-p)}(\Omega). \tag{22}$$

По определению пространства $\mathbb{W}^{k,p}(\Omega)$ все слабые частные производные $\partial^\beta u$ при $|\beta| \leqslant k-1$ принадлежат пространству $\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega)$. Следовательно, в силу (22) имеет место вложение:

$$\partial^\beta u(x) \in \mathbb{L}^{p^*}(\Omega) \quad \text{при} \quad |\beta| \leqslant k-1 \quad \text{и} \quad p^* = \frac{Np}{N-p}.$$

Значит,

$$u(x) \in \mathbb{W}_0^{k-1,p^*}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{1,p^*}(\Omega) \quad \text{при} \quad k > 1.$$

Доказательство-2

Теперь снова воспользуемся вложением (22) и получим новое вложение:

$$\mathbb{W}_0^{1,p^*}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{Np^*/(N-p^*)}(\Omega). \qquad (23)$$

Займемся арифметикой.

$$\frac{Np^*}{N-p^*} = \frac{N^2p}{N-p}\frac{1}{N-Np/(N-p)} = \frac{N^2p}{N^2-2Np} = \frac{Np}{N-2p}.$$

Теперь воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что мы доказали вложение (20) при $k = m - 1$. Докажем, что отсюда вытекает вложение (20) при $k = m$. Действительно, в силу предположения индукции имеем вложение:

$$\mathbb{W}_0^{m-1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{Np/(N-(m-1)p)}(\Omega).$$

Докажем, что отсюда вытекает вложение

$$\mathbb{W}_0^{m,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{Np/(N-mp)}(\Omega).$$

Доказательство-3

Действительно, имеет место вложение

$$\partial^\beta u(x) \in \mathbb{W}_0^{m-1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{Np/(N-(m-1)p)}(\Omega) \quad \text{при} \quad |\beta| \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$u(x) \in \mathbb{W}_0^{1,p^*_{m-1}}(\Omega) \quad p^*_{m-1} = \frac{Np}{N-(m-1)p}.$$

Опять воспользуемся вложением (22) и получим вложение:

$$\mathbb{W}_0^{1,p^*_{m-1}}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{Np^*_{m-1}/(N-p^*_{m-1})}(\Omega).$$

Доказательство-4

Опять займемся арифметикой.

$$\frac{Np^*_{m-1}}{N-p^*_{m-1}} = \frac{N^2p}{N-(m-1)p}\frac{1}{N-Np/(N-(m-1)p)} =$$
$$= \frac{N^2p}{N^2-N(m-1)p-Np} = \frac{N^2p}{N^2-mNp} = \frac{Np}{N-mp}.$$

Итак, мы доказали, что при $N > kp$ каждая функция

$$u(x) \in \mathbb{W}^{k,p}_0(\Omega)$$

принадлежит пространству

$$\mathbb{L}^{Np/(N-kp)}(\Omega),$$

т. е. имеет место вложение (20).

Доказательство-5

Перейдем к доказательству вложения (21). Прежде всего заметим, что из результата теоремы 13 у нас имеется вложение (21) при $m = 0$:

$$\mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{(m)}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant m < 1 - \frac{N}{p}, \quad N < p. \tag{24}$$

Действительно, решением неравенства

$$0 \leqslant m < 1 - \frac{N}{p}$$

в целых числах — есть $m = 0$. Воспользуемся опять методом математической индукции. Пусть мы доказали вложение (21) при $k = n - 1$.

Доказательство-6

Докажем, что отсюда вытекает вложение при $k = n$. Итак, по предположению индукции у нас имеется вложение:

$$\mathbb{W}_0^{n-1,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{(m)}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant m \leqslant n - 1 - \frac{N}{p}.$$

Пусть $u(x) \in \mathbb{W}_0^{n,p}(\Omega)$, тогда

$$\partial_i u \in \mathbb{W}_0^{n-1,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{(m)}(\overline{\Omega}).$$

Следовательно,

$$u(x) \in \mathbb{C}^{(m+1)}(\overline{\Omega}).$$

Стало быть, имеет место вложение

$$\mathbb{W}_0^{n,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{(m+1)}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant m < n - 1 - \frac{N}{p}.$$

Доказательство-7

Переобозначив $m+1$ на m, получим вложение

$$\mathbb{W}_0^{n,p}(\Omega) \subset \mathbb{C}^{(m)}(\overline{\Omega}) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant m-1 < n-1-\frac{N}{p} \Rightarrow 0 \leqslant m < n-\frac{N}{p}.$$

Следовательно, методом математической индукции доказаны оба утверждения этой теоремы.

Теорема вложения-3

Теорема

Пусть $k \geqslant m$ *и* $k, m \in \mathbb{Z}_+$ *и выполнены неравенства:*

$$N > (k-m)p \quad \text{и} \quad q = \frac{Np}{N-(k-m)p}, \tag{25}$$

тогда имеет место вложение:

$$\mathbb{W}_0^{k,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega). \tag{26}$$

Доказательство-1

Итак, доказательство проведем методом математической индукции. Действительно, сначала докажем, что при условиях

$$q = \frac{Np}{N-p} \quad \text{и} \quad N > p$$

имеет место вложение

$$\mathbb{W}_0^{m+1,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega). \tag{27}$$

Пусть $u(x) \in \mathbb{W}_0^{m+1,p}(\Omega)$, тогда из теоремы 13 вытекает, что

$$\partial^\beta u \in \mathbb{W}_0^{1,p}(\Omega) \subset \mathbb{L}^{p^*}(\Omega) \quad \text{для всех} \quad \beta : \ |\beta| \leqslant m$$

Следовательно, поскольку $u(x) \in \mathbb{W}_0^{m+1,p}(\Omega)$, то получим, что

$$u(x) \in \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega) \quad \text{при} \quad q = \frac{Np}{N-p}$$

и поэтому имеет вложение (27).

Доказательство-2

Теперь предположим, что мы уже доказали вложение

$$\mathbb{W}_0^{m+n-1,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega) \tag{28}$$

при условиях

$$q = \frac{Np}{N-(n-1)p} \quad \text{при} \quad N > (n-1)p.$$

Докажем, что отсюда вытекает вложение

$$\mathbb{W}_0^{m+n,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega) \tag{29}$$

при условиях

$$q = \frac{Np}{N-np} \quad \text{при} \quad N > np.$$

Пусть

$$u(x) \in \mathbb{W}_0^{m+n,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m+n-1,p}(\Omega).$$

Доказательство-3

Следовательно, поскольку (28) верно при указанных условиях, то отсюда получаем, что

$$\partial^\beta u \in \mathbb{W}_0^{m+n-1,p}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,q}(\Omega) \quad \text{при} \quad |\beta| \leqslant 1.$$

Значит, из этой цепочки вложений вытекает, что имеет место следующее вложение:

$$u(x) \in \mathbb{W}_0^{m+1,q}(\Omega).$$

Но мы уже доказали вложение (27), поэтому имеем

$$u(x) \in \mathbb{W}_0^{m+1,q}(\Omega) \subset \mathbb{W}_0^{m,q^*}(\Omega) \quad \text{при} \quad q^* = \frac{Nq}{N-q}.$$

Доказательство-4

Напомним, что

$$q = \frac{Np}{N-(n-1)p}.$$

Займемся арифметикой.

$$q^* = \frac{N^2p}{N-(n-1)p}\frac{1}{N-Np/(N-(n-1)p)} =$$

$$= \frac{N^2p}{N^2-(n-1)pN-Np} = \frac{Np}{N-np} \quad \text{при} \quad N > np.$$