Лекция 2

# АБСТРАКТНАЯ МЕРА ЛЕБЕГА

На прошлой лекции мы рассмотрели построение меры Лебега плоских множеств. Теперь наша задача обобщить эту процедуру на случай произвольных множеств. При этом существо схемы построения абстрактной меры Лебега почти в точности повторяет схему, рассмотренную на прошлой лекции.

## § 1. Схема построения абстрактной меры Лебега.

Исходя из результатов предыдущей лекции мы можем предъявить схему построения абстрактной меры Лебега.

1. Прежде всего нам нужно указать семейство элементарных множеств $\mathcal{A}$ подмножеств множества $X$, удовлетворяющих определенным требованием замкнутости относительно основных операций над множествами: объединения множеств, пересечения множеств и дополнения множеств. Кроме того, это семейство множеств должно быть замкнуто относительно операции счетного объединения — это нужно в дальнейшем для введения внешней меры Лебега, поскольку в противном случае (конечного объединения) мы получили уже хорошо известную внешнюю меру Жордана. Наконец, для произвольного множества из этого семейства задается априори некоторая конечно–аддитивная и положительная функция множеств $m$.

2. Для произвольного подмножества $A \subset X$ по уже известной нам формуле вводится внешняя мера Лебега $\mu^*$. После чего вводится семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$ измеримых по Лебегу множеств как таких множеств, которые сколь угодно точно по внешней мере Лебега можно приблизить элементарными множествами из семейства $\mathcal{A}$. Внешняя мера Лебега $\mu^*$ и есть искомая мера Лебега.

3. Далее нужно доказать, что семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$ замкнуто относительно операций объединения множеств, пересечения множеств, дополнения множеств и счетного объединения множеств. Кроме того, нужно доказать, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, а мера $\mu^*$ является единственным продолжением, не только согласно схеме Лебега, исходной меры $m$.

## § 2. Элементарные множества.

Итак, прежде всего нам нужно ввести класс «элементарных» множеств. С этой целью введем понятия алгебры множеств и $\sigma-$алгебры множеств. Дадим определение.

Определение 1. *Семейство подмножеств $\mathcal{A}$ множества $X$ называется алгеброй множеств, если выполнены следующие свойства*:

(i) $\varnothing,\ X \in \mathcal{A}$;

(ii) *из принадлежности $A, B \in \mathcal{A}$ вытекает, что $A \cap B$, $A \cup B$ и $A \setminus B$ принадлежат $\mathcal{A}$*;

*В том случае, если выполнено дополнительное свойство*

(iii) *для любой последовательности множеств $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ вытекает, что*
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A},$$

*система множеств $\mathcal{A}$ называется $\sigma-$алгеброй.*

Действительно, тривиальными примерами $\sigma-$алгебр является, например, семейство множеств $\mathcal{A}$, состоящее из $\varnothing$, $X$. Другим тривиальным примером является семейство $\mathcal{A}$, состоящее из всех подмножество множества $X$, который обозначается как $2^X$.

Определение 2. *Пара $(\mathcal{A}, X)$, где $\mathcal{A}$ есть $\sigma-$алгебра $\mathcal{A}$ подмножеств из множества $X$, называется измеримым пространством.*

Определение 3. *Числовая функция $\mu$ называется аддитивной, если для всякого конечного объединения попарно непересекающихся множеств $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}$ имеет место равенство*
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Определение 4. *Числовая функция $\mu$ называется счетно–аддитивной, если для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ такой, что*
$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{A}$$
*имеет место равенство*
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

Определение 5. *Счетно–аддитивная неотрицательная числовая функция $\mu$, заданная на алгебре $\mathcal{A}$ подмножеств из множества $X$, называется мерой.*

Итак, пусть $\mathcal{A}$ — это алгебра подмножеств из $X$, на котором задана мера $\mu$, т.е. счетно–аддитивная числовая функция. Это и есть то самое «элементарное» семейство множеств, на котором задана мера $\mu$.

При этом говорят, что задано пространство с мерой

$$(X, \mathcal{A}, \mu).$$

## § 3. Внешняя мера Лебега.

Займемся теперь продолжением меры $\mu$ с алгебры $\mathcal{A}$ на некоторую $\sigma$–алгебру $\mathcal{A}_\mu$, содержащую $\mathcal{A}$.

Определение 6. *Внешняя мера $\mu^*(A)$ для каждого подмножества $A \subset X$ определяется следующим образом*:

$$\mu^*(A) \equiv \inf \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \middle| \, A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \; A_n \in \mathcal{A} \right\}. \tag{3.1}$$

Замечание. Из данного определения сразу следует, что для любых множеств $A \subset B \subset X$ верно неравенство $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$. В самом деле, если $B \subset \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$, то и $A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$. («Монотонность внешней меры».)

Наконец, мы можем дать определение измеримого по Лебегу множества.

Определение 7. *Скажем, что множество $A \subset X$ измеримо по Лебегу относительно меры $\mu$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что имеет место следующее неравенство*:

$$\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

*Множество всех измеримых по Лебегу подмножеств множества $X$ обозначается как $\mathcal{A}_\mu$.*

## § 4. Основная теорема об измеримых по Лебегу множеств $\mathcal{A}_\mu$.

Итак, мы предъявили способ продолжения меры $\mu$ с алгебры $\mathcal{A}$ на более широкое семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$, где продолжением меры $\mu$ является числовая функция $\mu^*$ — внешняя мера. Но для дальнейшего нам необходимо ответить на ряд вопросов. Во–первых, что представляет из себя множество $\mathcal{A}_\mu$? Во–вторых, является ли внешняя мера $\mu^*$ мерой на семействе множеств $\mathcal{A}_\mu$? На все эти вопросы отвечает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\mu$ *— это конечная* ($\mu(X) < +\infty$) *и неотрицательная мера на алгебре* $\mathcal{A}$ *подмножеств из множества* $X$. *Тогда имеют место следующие утверждения*:

(i) $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, *причем внешняя мера* $\mu^*$ *совпадает с мерой* $\mu$ *на алгебре* $\mathcal{A}$;

(ii) *семейство множеств* $\mathcal{A}_\mu$ *является* $\sigma-$*алгеброй, причем ограничение* $\mu^*$ *на* $\mathcal{A}_\mu$ *является мерой*:

(iii) *мера* $\mu^*$ *на* $\mathcal{A}_\mu$ *есть единственное неотрицательное продолжение меры* $\mu$ *с алгебры* $\mathcal{A}$ *на* $\sigma-$*алгебру* $\mathcal{A}_\mu$.

Доказательство.

*Шаг 1. Доказательство* ($i$). Ясно, что $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_\mu$, поскольку для каждого $A \in \mathcal{A}$ и всякого $\varepsilon > 0$ можно взять $A_\varepsilon = A$ и тогда

$$\mu(A\Delta A_\varepsilon) = 0 < \varepsilon.$$

Докажем теперь, что *внешняя мера* $\mu^*$ *совпадает с мерой* $\mu$ *на алгебре* $\mathcal{A}$.

$\square$ Действительно, по построению мера $\mu^*$ имеет место неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \mu(A) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathcal{A}.$$

Пусть $A \in \mathcal{A}$. Докажем, что имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A).$$

Действительно, пусть $\{A_n\} \subset \mathcal{A}$ — такая последовательность, что

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

но тогда

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A \cap A_n.$$

Прежде всего, в силу неотрицательности и аддитивности меры $\mu$ имеет место неравенство

$$\mu(A \cap A_n) \leqslant \mu(A_n)$$

Оно следует из тождества $\mu(A_n) = \mu(A_n \setminus (A \cap A_n)) + \mu(A \cap A_n)$, где все входящие в него множества принадлежат $\mathcal{A}$.

Можно доказать, что из счетной аддитивности и положительности меры $\mu$ вытекает счетная субаддитивность. Действительно, если $A = \cup_{n=1}^{+\infty} B_n$, то множество $A$ можно представить в виде объединения непересекающихся множеств $C_n$, где

$$C_1 = B_1, \quad C_n = B_n \setminus \cup_{l=2}^{n-1} B_l$$

при $n \geqslant 2$, а $\mu(C_n) \leqslant \mu(B_n)$.

Теперь можно воспользоваться определением счетной аддитивности, т. е. имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A \cap A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n).$$

И, значит, имеет место неравенство

$$\mu(A) \leqslant \mu^*(A). \boxtimes$$

*Шаг 2. семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$ является алгеброй.*

Сначала докажем, что *семейство множеств $\mathcal{A}_\mu$ является алгеброй.*

$\square$ Действительно, сначала докажем, что дополнение измеримого множества измеримо. Пусть $A \in \mathcal{A}_\mu$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon,$$

но тогда поскольку $X \setminus A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ и имеет место равенство множеств

$$(X \setminus A_\varepsilon)\Delta(X \setminus A) = A_\varepsilon \Delta A,$$

то

$$\mu^*((X \setminus A_\varepsilon)\Delta(X \setminus A)) = \mu^*(A_\varepsilon \Delta A) \leqslant \varepsilon.$$

Значит, $X \setminus A \in \mathcal{A}_\mu$.

Теперь докажем, что объединение двух измеримых множеств измеримо. Действительно, пусть $A, B \in \mathcal{A}_\mu$. Значит, для всякого фиксированного $\varepsilon > 0$ найдутся такие множества $A_\varepsilon, B_\varepsilon \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*(A \Delta A_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B \Delta B_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1}$$

С другой стороны, имеют место вложения

$$(A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \subset (A \Delta A_\varepsilon) \cup (B \Delta B_\varepsilon),$$

поэтому в силу монотонности внешней меры $\mu^*$ имеют место неравенства:

$$\mu^*((A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(A \Delta A_\varepsilon) + \mu^*(B \Delta B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Значит, поскольку $A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}_\mu$.

Докажем теперь, что $A \cap B \in \mathcal{A}_\mu$. Но это следствие следующего равенства множеств:

$$A \cap B = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)).$$

Таким образом, $\mathcal{A}_\mu$ — алгебра. $\boxtimes$

Для доказательства того, что семейство $\mathcal{A}_\mu$ — $\sigma$–алгебра нужно доказать ряд вспомогательных утверждений.

*Шаг 3. Доказательство счетной субаддитивности внешней меры Лебега $\mu^*$.*

Лемма 1. *При условиях*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

*в частности, при*

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) < +\infty$$

*верно неравенство*

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n).$$

Доказательство.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда по определению внешней меры для каждого из множеств $A_n \subset X$ найдется система множеств

$$\{B^{\varepsilon}_{nm}\} \subset \mathcal{A}$$

такая, что

$$A_n \subset \bigcup_{m=1}^{+\infty} B^{\varepsilon}_{nm}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B^{\varepsilon}_{nm}\right) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Тогда, поскольку $A \subset \cup_{n=1}^{+\infty} \cup_{m=1}^{+\infty} B^{\varepsilon}_{nm}$, в силу определения внешней меры $\mu^*(A)$ имеем

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B^{\varepsilon}_{nm}\right),$$

где в силу свойств сходящихся рядов с неотрицательными членами порядок суммирования не важен, т. е.

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} \mu\left(B^{\varepsilon}_{nm}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$ имеем требуемое неравенство

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n),$$

т. е. мы доказали счетную субаддитивность внешней меры.

Лемма доказана.

*Шаг 4. Неравенство "треугольника"для меры.*

Утверждение 1. *Справедливо неравенство*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \Delta B) \tag{4.2}$$

*для всех $A, B \in X$, для которых $\mu^*(A), \mu^*(B) < +\infty$.*

☐ Действительно, справедливы следующие вложения:

$$A \subset B \cup (A\Delta B), \quad B \subset A \cup (A\Delta B),$$

поэтому в силу субаддитивности внешней меры [1] имеет место неравенства

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A\Delta B), \quad \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A\Delta B).$$

Стало быть, пришли к (4.2). ☒

*Шаг 5. Конечная аддитивность внешней меры на множестве $\mathcal{A}_\mu$.*

Приступим теперь к доказательству конечной аддитивности внешней меры на $\mathcal{A}_\mu$. Действительно, пусть $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ и $A \cap B = \varnothing$. Нам нужно доказать, что

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

С этой целью нам достаточно доказать, что имеет место неравенство

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Заметим, что имеет место следующее вложение:

$$A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \subset (A \cup B) \cup ((A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)),$$

поэтому имеет место неравенство

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) - \mu^*((A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)), \tag{4.3}$$

где $A_\varepsilon$ и $B_\varepsilon$ удовлетворяют условию

$$\mu^*(A\Delta A_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны,

$$\mu^*((A \cup B)\Delta(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon)) \leqslant \mu^*(A\Delta A_\varepsilon) + \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon. \tag{4.4}$$

Таким образом, из (4.3) и (4.4) вытекает оценка снизу

$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) - \varepsilon. \tag{4.5}$$

Теперь заметим, что на алгебре $\mathcal{A}$ меры $\mu$ и $\mu^*$ совпадают. Поэтому в силу конечной аддитивности меры $\mu$ на $\mathcal{A}$ имеет место следующее равенство:

$$\mu^*(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) = \mu(A_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon) - \mu(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon). \tag{4.6}$$

Заметим, что в силу $A \cap B = \varnothing$ имеет место вложение

$$A_\varepsilon \cap B_\varepsilon \subset (A\Delta A_\varepsilon) \cup (B\Delta B_\varepsilon).$$

---

[1] Эта субаддитивность, очевидно, является частным случаем только что доказанной счетной субаддитивности.

И поэтому верна следующая оценка сверху:
$$\mu^*(A_\varepsilon \cap B_\varepsilon) \leqslant \mu^*(A\Delta A_\varepsilon) + \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon.$$

Значит, из (4.6) приходим к оценке снизу
$$\mu(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \geqslant \mu(A_\varepsilon) + \mu(B_\varepsilon) - \varepsilon. \tag{4.7}$$
Но тогда из (4.5) приходим к такой оценке снизу:
$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A_\varepsilon) + \mu^*(B_\varepsilon) - 2\varepsilon. \tag{4.8}$$
С другой стороны, в силу неравенства (4.2) имеют место неравенства
$$\mu^*(A_\varepsilon) \geqslant \mu^*(A) - \mu^*(A\Delta A_\varepsilon), \quad \mu^*(B_\varepsilon) \geqslant \mu^*(B) - \mu^*(B\Delta B_\varepsilon).$$

Стало быть, отсюда приходим к неравенствам
$$\mu^*(A_\varepsilon) \geqslant \mu^*(A) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B_\varepsilon) \geqslant \mu^*(B) - \frac{\varepsilon}{2}.$$
Отсюда и из (4.8) приходим к следующему неравенству:
$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) - 3\varepsilon.$$
В силу произвольности $\varepsilon > 0$ из последнего имеем
$$\mu^*(A \cup B) \geqslant \mu^*(A) + \mu^*(B) \tag{4.9}$$
для всех $A, B \in \mathcal{A}_\mu$ при условии $A \cap B = \varnothing$. Обратное к (4.9) неравенство очевидно.

*Шаг 6. $\mathcal{A}_\mu$ — это $\sigma$–алгебра.*

Теперь наша задача доказать, что счетное объединение измеримых множеств измеримо. С этой целью нам достаточно рассмотреть случай попарно непересекающихся множеств. Действительно, пусть $A_n \in \mathcal{A}_\mu$, тогда вместо счетного объединения
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$
можно взять
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n, \quad B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$
Ясно, что $\{B_n\} \subset \mathcal{A}_\mu$ и попарно не пересекаются, причем имеет место равенство
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n.$$
В силу конечной аддитивности функции $\mu^*$ на $\mathcal{A}_\mu$ и ее монотонности по включению мы приходим к следующим неравенствам:
$$\sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) \leqslant \mu^*(X) \leqslant \mu(X) < +\infty$$

в силу конечности меры $\mu$.

Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\mu^*(A_k)$ сходится. Следовательно, для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $n \in \mathbb{N}$ таким образом, чтобы имело место неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\mu^*(A_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.10}$$

В силу измеримости конечных объединений измеримых множеств для данного $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $B \in \mathcal{A}$, что

$$\mu^*\left(B\Delta\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.11}$$

Следовательно, в силу вложения

$$B\Delta\bigcup_{k=1}^{+\infty}A_k \subset \left(B\Delta\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)\bigcup\bigcup_{k=n+1}^{+\infty}A_k,$$

конечной аддитивности внешней меры и ее счетной субаддитивности приходим к неравенству

$$\mu^*\left(B\Delta\bigcup_{k=1}^{+\infty}A_k\right) \leqslant \mu^*\left(B\Delta\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right) + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\mu^*(A_k) \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда вытекает измеримость счетного объединения измеримых множеств. Значит, $\mathcal{A}_\mu$ — это $\sigma-$алгебра.

*Шаг 7. Счетная аддитивность внешней меры Лебега.*

Надо, однако доказать, что действительно

$$\mu^*(A) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mu^*(A_n), \quad A = \bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n$$

при оговоренных выше условиях. Но это действительно так, потому что, во-первых,

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\mu^*(A_n)$$

в силу счетной субаддитивности внешней меры, а во-вторых, в силу ее «монотонности» и конечной аддитивности

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{N}A_n\right) = \sum_{n=1}^{N}\mu^*(A_n),$$

т. е. можно утверждать, что

$$\sum_{n=1}^{N}\mu^*(A_n) \leqslant \mu^*(A) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\right).$$

Устремляя $N$ к бесконечности, имеем равенство (4).

*Шаг 8. Доказательство утверждения (iii):*

Теперь докажем, что $\mu^*$ является единственным продолжением меры $\mu$ с алгебры $\mathcal{A}$ на $\sigma-$алгебру $\mathcal{A}_\mu$.

З а м е ч а н и е. Здесь нужно отметить следующее: какую схему продолжения меры мы не взяли на множество $\mathcal{A}_\mu$ мы все равно получим меру Лебега. В этом заключается единственность продолжения.

Пусть нет. Тогда существует другая мера $\nu$. Пусть $A \in \mathcal{A}_\mu$ и $\varepsilon > 0$ являются фиксированными. Тогда найдется такое множество $B \in \mathcal{A}$, что имеет место неравенство

$$\mu^*(A\Delta B) \leqslant \varepsilon.$$

В свою очередь это означает, что существует такая последовательность множеств $\{C_n\} \subset \mathcal{A}$, что

$$A\Delta B \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n, \quad \mu(C_n) = \nu(C_n) = \mu^*(C_n),$$

причем

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(C_n) \leqslant \varepsilon.$$

Имеют место следующие неравенства:

$$|\nu(A) - \nu(B)| \leqslant \nu(A\Delta B) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(C_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(C_n) \leqslant \varepsilon,$$

поскольку на алгебре $\mathcal{A}$ меры $\mu$, $\mu^*$ и $\nu$ совпадают. Справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned}|\mu^*(A) - \nu(A)| \leqslant |\mu^*(A) - \mu^*(B)| + |\mu^*(B) - \nu(A)| = \\ = |\mu^*(A) - \mu^*(B)| + |\nu(B) - \nu(A)| \leqslant 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Стало быть, меры $\mu^*$ и $\nu$ совпадают на $\sigma-$алгебре $\mathcal{A}_\mu$.

Т е о р е м а д о к а з а н а.