

Уравнения переноса. Схемы «бегущего» счета

Рассмотрим ряд наиболее часто используемых разностных схем, аппроксимирующих начально-краевые задачи для линейного уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t),$$

где функция $c(x, t)$ представляет собой скорость переноса, а функция $f(x, t)$ описывает источники и стоки.

1 Схемы «бегущего» счета

Будем рассматривать разностные схемы для уравнения переноса на равномерной сетке с шагом h по переменной x и шагом τ по переменной t :

$$x_n = n \cdot h, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, \dots, J.$$

Так как рассматриваемое уравнение переноса является дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка, то для его аппроксимации необходимо использовать шаблон, содержащий узлы сетки, принадлежащие как минимум двум временным и двум пространственным слоям. Четыре основных шаблона, используемых при аппроксимации дифференциального оператора $L = \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}$, представлены на рис. 1.

В случае а) разностный оператор $L_{h\tau}$, аппроксимирующий дифференциальный оператор L , имеет вид:

$$L_{h\tau} u = \frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\tau} + c_n^j \frac{u_n^j - u_{n-1}^j}{h}.$$

Для любой гладкой функции $u(x, t)$ разностное выражение $L_{h\tau} u$ аппроксимирует выражение Lu в точке (x_n, t_j) с погрешностью $O(\tau + h)$:

$$L_{h\tau} u = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x_n, t_j} + O(\tau + h).$$

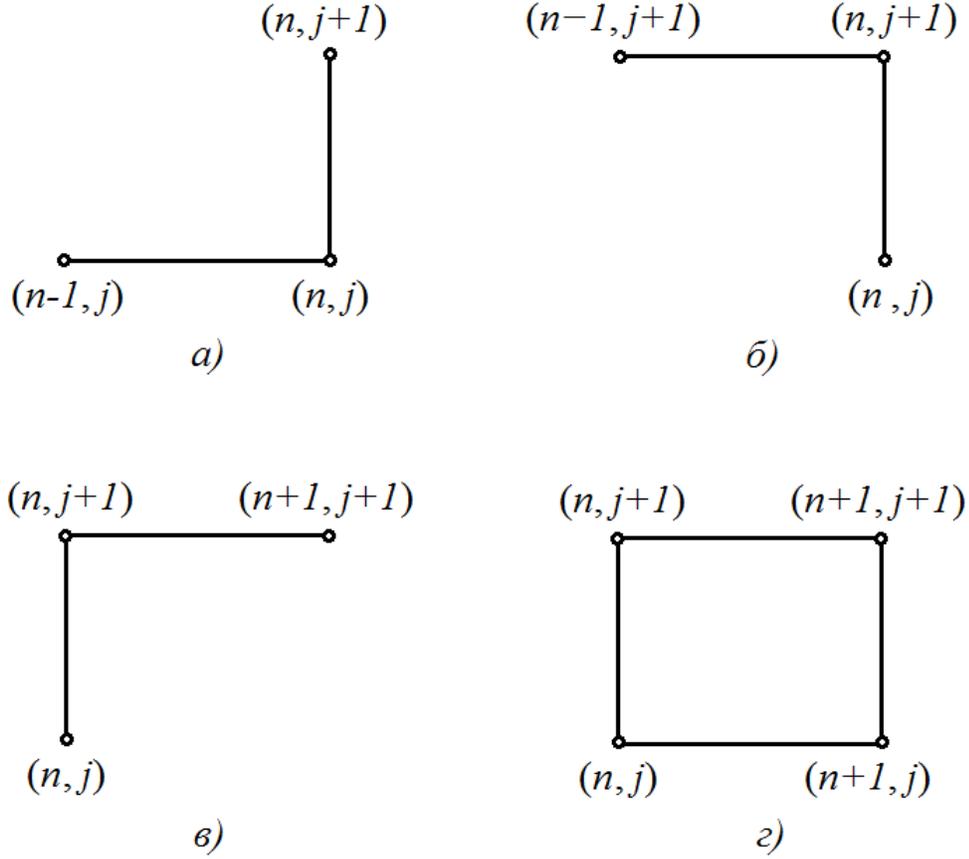


Рис. 1: Основные шаблоны в схемах бегущего счета

Следовательно, разностное уравнение $L_{h\tau}y = \varphi$, где $\varphi_n^j = f(x_n, t_j)$, аппроксимирует уравнение переноса с погрешностью $O(\tau + h)$.

В случае б) разностный оператор $L_{h\tau}$ имеет вид:

$$L_{h\tau}u = \frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\tau} + c_n^{j+1} \frac{u_n^{j+1} - u_{n-1}^{j+1}}{h},$$

и выражение $L_{h\tau}u$ аппроксимирует Lu в точке (x_n, t_{j+1}) с погрешностью $O(\tau + h)$:

$$L_{h\tau}u = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x_n, t_{j+1}} + O(\tau + h).$$

Следовательно, разностное уравнение $L_{h\tau}y = \varphi$, где $\varphi_n^j = f(x_n, t_{j+1})$, аппроксимирует уравнение переноса с погрешностью $O(\tau + h)$.

В случае в) разностный оператор $L_{h\tau}$ имеет вид:

$$L_{h\tau}u = \frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\tau} + c_n^{j+1} \frac{u_{n+1}^{j+1} - u_n^{j+1}}{h}.$$

Выражение $L_{h\tau}u$ аппроксимирует Lu в точке (x_n, t_{j+1}) с погрешностью $O(\tau + h)$:

$$L_{h\tau}u = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x_n, t_{j+1}} + O(\tau + h).$$

Следовательно, разностное уравнение $L_{h\tau}y = \varphi$, где $\varphi_n^j = f(x_n, t_{j+1})$, аппроксимирует уравнение переноса с погрешностью $O(\tau + h)$.

В случае г) производная $\frac{\partial u}{\partial t}$ аппроксимируется как среднее арифметическое односторонних разностных производных по t , взятых при $x = x_n$ и $x = x_{n+1}$, а производная $\frac{\partial u}{\partial x}$ — как среднее арифметическое разностных производных по x , взятых на слоях j и $j + 1$:

$$L_{h\tau}u = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n^{j+1} - u_n^j}{\tau} + \frac{u_{n+1}^{j+1} - u_{n+1}^j}{\tau} \right) + \frac{c(x_n + 0.5h, t_j + 0.5\tau)}{2} \left(\frac{u_{n+1}^{j+1} - u_n^{j+1}}{h} + \frac{u_{n+1}^j - u_n^j}{h} \right).$$

Для любой гладкой функции $u(x, t)$ разностное выражение $L_{h\tau}u$ за счет своей симметрии аппроксимирует Lu в центральной точке шаблона $(x_n + 0.5h, t_j + 0.5\tau)$ с погрешностью второго порядка по τ и h :

$$L_{h\tau}u = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x_n+0.5, t_j+0.5} + O(\tau^2 + h^2).$$

Следовательно, разностное уравнение $L_{h\tau}y = \varphi$, где $\varphi_n^j = f(x_n + 0.5h, t_j + 0.5\tau)$, аппроксимирует уравнение переноса с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$.

Разностные схемы для уравнения переноса, в которых для аппроксимации дифференциального оператора используется один из шаблонов, приведенных на рис. 1, называются схемами *бегущего счета*.

2 Устойчивость схем бегущего счета по начальным данным

Исследуем устойчивость приведенных выше схем бегущего счета по начальным данным методом гармоник. Для этого рассмотрим соответствующие разностные схемы для задачи Коши на прямой:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \mu(x), & x \in (-\infty, +\infty), \end{cases} \quad (2.1)$$

в частном случае, когда скорость переноса c постоянная.

Введем равномерную сетку

$$x_n = n \cdot h, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad t_j = j \cdot \tau, \quad j = 0, 1, \dots$$

Схема а). Аппроксимируя разностный оператор уравнения в задаче (2.1) с помощью шаблона а), получаем разностную схему:

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + c \frac{y_n^j - y_{n-1}^j}{h} = 0, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots \\ y_n^0 = \mu(x_n), & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.2)$$

Погрешность δy_n^j решения разностной схемы (2.2), обусловленная погрешностью начальных данных, будет удовлетворять уравнению

$$\delta y_n^{j+1} = \delta y_n^j - \frac{c\tau}{h} (\delta y_n^j - \delta y_{n-1}^j).$$

Разложим сеточную функцию δy_n^j в ряд по e^{iqx_n} :

$$\delta y_n^j = \sum_q \delta y_{n,q}^j = \sum_q C_q^j e^{iqx_n}.$$

Так как схема (2.2) является линейной двухслойной схемой с постоянными коэффициентами, то на слое $j + 1$ погрешность будет иметь вид:

$$\delta y_n^{j+1} = \sum_q \delta y_{n,q}^{j+1} = \sum_q \lambda_q C_q^j e^{iqx_n},$$

где $\delta y_{n,q}^{j+1} = \lambda_q \delta y_{n,q}^j$, λ_q — множители роста.

Введем обозначения $r = \frac{c\tau}{h}$ и $\alpha_q = qh$. Тогда, рассматривая уравнения для каждой гармоники $\delta y_{n,q}^j$ в отдельности, получаем:

$$\delta y_{n,q}^{j+1} = \delta y_{n,q}^j - r (\delta y_{n,q}^j - \delta y_{n-1,q}^j),$$

или, что то же самое,

$$\lambda_q C_q^j e^{i\alpha_q n} = C_q^j e^{i\alpha_q n} - r (C_q^j e^{i\alpha_q n} - C_q^j e^{i\alpha_q (n-1)}).$$

Сокращая на $C_q^j e^{i\alpha_q n}$, получаем:

$$\lambda_q(\alpha_q) = 1 - r(1 - e^{-i\alpha_q}) = 1 - r + r e^{-i\alpha_q}.$$

Спектр $\lambda_q(\alpha_q)$ рассматриваемой задачи представляет собой окружность на комплексной плоскости с центром в точке $1 - r$ и радиусом $|r|$. Так как $\lambda_q(\alpha_q)$ не зависит от τ явным образом, то спектральное условие устойчивости схемы принимает вид

$$|\lambda_q| \leq 1, \quad \forall q. \quad (2.3)$$

Следовательно, для того чтобы схема (2.2) была устойчивой по начальным данным, необходимо и достаточно, чтобы спектр оператора перехода со слоя на слой полностью

содержался в круге единичного радиуса с центром в нуле на комплексной плоскости. Так как $r = \frac{c\tau}{h}$, то в случае $c > 0$ (перенос в положительном направлении оси x) параметр r также положителен, а при $c < 0$ (перенос против оси x) параметр r отрицателен. На рис. 2 и 3 представлен спектр $\lambda(\alpha)$ в случае $r > 0$ и $r < 0$ соответственно.

Очевидно, что в случае $c > 0$ условие (2.3) выполнено при $r \leq 1$ или, что то же самое, при $c\tau \leq h$. В случае $c < 0$ спектр оператора перехода со слоя на слой лежит вне единичной окружности при любом соотношении шагов τ и h (см. рис. 3), то есть схема (2.2) неустойчива.

Итак, при $c > 0$ схема (2.2) условно устойчива. Условие ее устойчивости $c\tau \leq h$ называется *условием Куранта*. При $c < 0$ схема (2.2) неустойчива, и пользоваться ею нельзя.

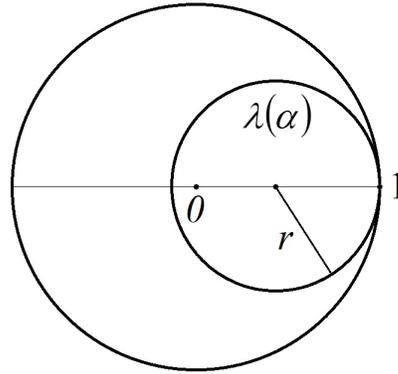


Рис. 2: Спектр оператора перехода со слоя на слой в схеме (2.2) при $c > 0$, $0 < r \leq 1$

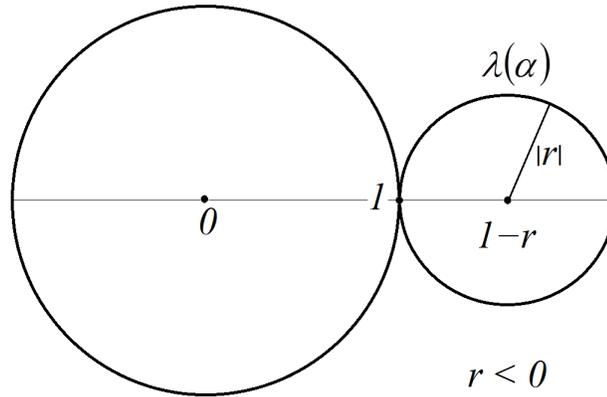


Рис. 3: Спектр оператора перехода в схеме (2.2) при $c < 0$

Замечание 2.1 В случае $c < 0$ можно построить аналог схемы (2.2), если вместо шаблона a) использовать его зеркальное отображение относительно $x = x_n$ (см. рис.4). Соответствующая схема имеет вид

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + c \frac{y_{n+1}^j - y_n^j}{h} = 0, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots \\ y_n^0 = \mu(x_n), & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (2.4)$$

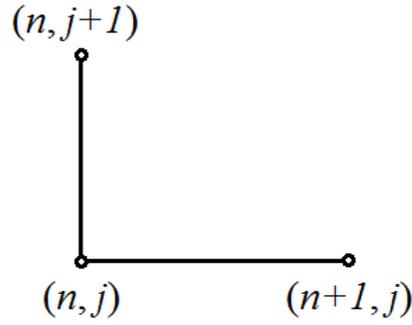


Рис. 4: Аналог шаблона а) в случае $c < 0$

Схема (2.4) устойчива при выполнении условия Куранта $|c|\tau \leq h$.

Схемы б) и в). Так как шаблоны б) и в) являются зеркально симметричными относительно $x = x_n$, то достаточно исследовать на устойчивость схему с одним из этих шаблонов. Для схемы со вторым шаблоном условие устойчивости будет получаться из условия устойчивости первой при замене c на $-c$.

Рассмотрим, например, схему б):

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + c \frac{y_n^{j+1} - y_{n-1}^{j+1}}{h} = 0, & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots \\ y_n^0 = \mu(x_n), & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (2.5)$$

Пользуясь теми же рассуждениями, что и в случае схемы а), приходим к характеристическому уравнению:

$$\frac{\lambda_q - 1}{\tau} + c\lambda_q \frac{1 - e^{-i\alpha_q}}{h} = 0,$$

откуда получаем

$$\lambda_q = \frac{1}{1 + r - r e^{-i\alpha_q}} = \frac{1}{\beta_q}, \quad \beta_q = 1 + r - r e^{-i\alpha_q}, \quad r = \frac{c\tau}{h}.$$

Очевидно, что условие $|\lambda_q| \leq 1$ выполняется, если $|\beta_q| \geq 1$. При изменении параметра α_q от минус до плюс бесконечности значения функции $\beta_q(\alpha_q)$ пробегают окружность радиуса $|r|$ с центром в точке $1 + r$ на комплексной плоскости.

При $c > 0$ параметр r также положителен. Следовательно, окружность, заполняемая значениями β_q , расположена вне единичного круга с центром в начале координат и касается единичной окружности в точке 1 (рис. 5). Это означает, что $|\beta_q| \geq 1$ при любом соотношении τ и h , то есть при положительном c схема (2.5) безусловно устойчива по начальным данным.

Если скорость переноса c отрицательна, то и параметр r отрицателен, и условие $|\beta_q| \geq 1$ устойчивости схемы (2.5) будет выполнено при $|r| \geq 1$ (см. рис. 6). Следовательно,

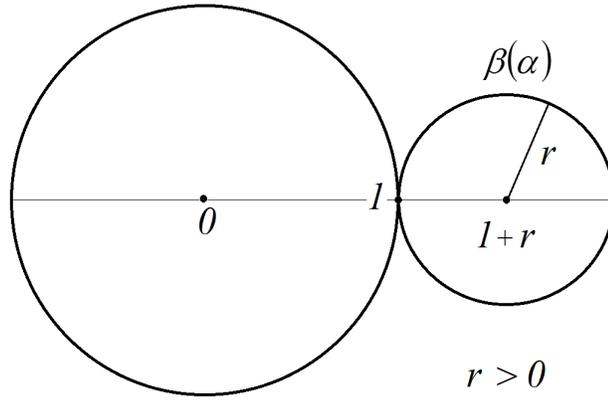


Рис. 5: Значения функции $\beta_q(\alpha_q)$ в случае $c > 0$

при $c < 0$ схема (2.5) является условно устойчивой по начальным данным, и условие ее устойчивости имеет вид $|c|\tau \geq h$.

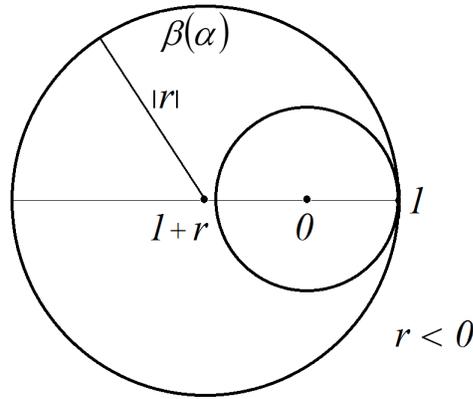


Рис. 6: Значения функции $\beta_q(\alpha_q)$ в случае $c < 0$

Заметим, что схема в) является аналогом схемы б), если знак параметра c поменять на противоположный. Следовательно, схема в) безусловно устойчива при $c < 0$ и условно устойчива при $c > 0$. Условие ее устойчивости при $c > 0$ имеет вид $c\tau \geq h$.

Задача 2.1. С помощью метода гармоник покажите, что схема г)

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + \frac{y_{n+1}^{j+1} - y_{n+1}^j}{\tau} \right) + \frac{c}{2} \left(\frac{y_{n+1}^{j+1} - y_n^{j+1}}{h} + \frac{y_{n+1}^j - y_n^j}{h} \right) = 0, & n = 0, \pm 1, \dots, j = 0, 1, \dots \\ y_n^0 = \mu(x_n), & n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{cases} \quad (2.6)$$

безусловна устойчива при любом знаке параметра c .

Метод гармоник применим только для схем с постоянными коэффициентами. Для исследования на устойчивость разностных схем для уравнений с переменными коэффициентами широко используют прием «замораживания» коэффициентов уравнения. При этом на устойчивость исследуется схема с постоянными коэффициентами, равными своим

значениям в какой-то выбранной точке. Схему с переменными коэффициентами считают устойчивой, если условие устойчивости выполняется для соответствующей схемы с постоянными коэффициентами независимо от того, в какой точке были «заморожены» коэффициенты.

3 Реализация схем бегущего счета для начально-краевой задачи для линейного уравнения переноса

В качестве примера рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = x + t, & x \in (0, 1], t \in (0, 1], \\ u|_{x=0} = e^{-t}, & u|_{t=0} = \cos(\pi x). \end{cases} \quad (3.1)$$

Задача (3.1) допускает аналитическое решение, которое можно получить методом характеристик. Уравнение характеристик имеет вид:

$$dt = \frac{dx}{2}.$$

Интегрируя его, получаем однопараметрическое семейство характеристик $2t - x = C$, где C — произвольное число. Введем вдоль характеристики параметр τ :

$$d\tau = dt = \frac{dx}{2}.$$

На каждой характеристике начало отсчета параметра τ выберем так, чтобы τ обращалось в ноль при $t = 0$. Тогда $\tau = t$. Перейдем от переменных (x, t) к переменным (τ, C) :

$$\begin{cases} x = 2\tau - C, \\ t = \tau. \end{cases}$$

Задача (3.1) в новых переменных принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dU}{d\tau} = 3\tau - C, \\ U|_{\tau=0} = \cos(\pi C), & C \leq 0, \\ U|_{\tau=C/2} = e^{-C/2}, & C > 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $U(\tau, C) = u(x(\tau, C), t(\tau, C))$. Общее решение уравнения (3.2):

$$U(\tau, C) = \frac{3}{2}\tau^2 - C\tau + A(C).$$

Найдем $A(C)$ из дополнительных условий задачи (3.2):

$$U|_{\tau=0} = A(C) = \cos(\pi C), \quad C \leq 0,$$

$$U|_{\tau=C/2} = \frac{3}{2} \frac{C^2}{4} - \frac{C^2}{2} + A(C) = e^{-C/2} \Rightarrow A(C) = \frac{C^2}{8} + e^{-C/2}, \quad C > 0.$$

Следовательно,

$$U(\tau, C) = \begin{cases} \frac{3}{2}\tau^2 - C\tau + \cos(\pi C), & C \leq 0, \\ \frac{3}{2}\tau^2 - C\tau + \frac{C^2}{8} + e^{-C/2}, & C > 0. \end{cases}$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем аналитическое решение задачи (3.1):

$$u(x, t) = \begin{cases} xt - \frac{t^2}{2} + \cos(\pi(2t - x)), & 2t \leq x, \\ xt - \frac{t^2}{2} + \frac{(2t - x)^2}{8} + e^{-(t-x/2)}, & 2t > x. \end{cases} \quad (3.3)$$

График аналитического решения представлен на рис 7.

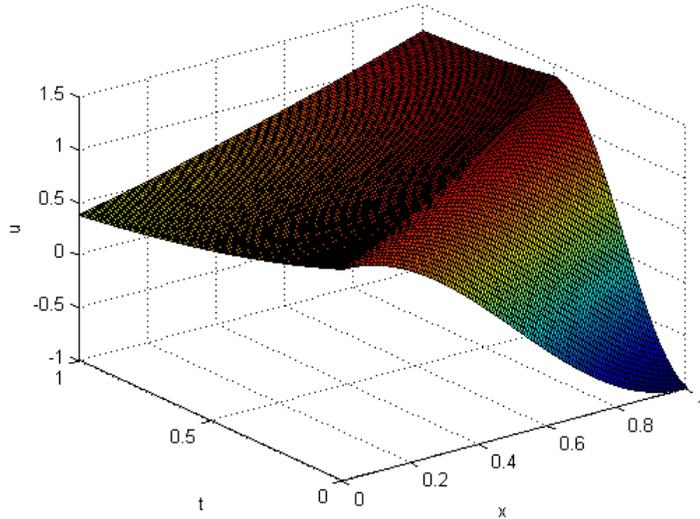


Рис. 7: Аналитическое решение задачи (3.1)

Введем в расчетной области равномерную сетку

$$x_n = n \cdot h, \quad n = 0, 1, \dots, N, \quad N \cdot h = 1, \quad t_j = j \cdot \tau \quad j = 0, 1, \dots, J, \quad J \cdot \tau = 1, \quad (3.4)$$

Схема а) для задачи (3.1) имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + 2 \frac{y_n^j - y_{n-1}^j}{h} = x_n + t_j, & n = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1, \\ y_0^j = e^{-t_j}, & j = 0, 1, \dots, J, \\ y_n^0 = \cos(\pi x_n), & n = 0, 1, \dots, N. \end{cases} \quad (3.5)$$

Схема (3.5) устойчива при выполнении условия $2\tau \leq h$, или, что то же самое, $J \geq 2N$. Так как при $n = 0$ и при $j = 0$ сеточная функция y_n^j известна из граничных и начальных условий соответственно, то при каждом $n = 1, 2, \dots, N - 1$ и каждом $j = 0, 1, \dots, J - 1$ неизвестным является значение y_n^{j+1} , которое легко выражается из уравнения (3.5).

График численного решения задачи (3.1), полученного по схеме (3.5) в случае $J = 2N$, а также график погрешности численного решения, приведены на рис. 8 - 9.

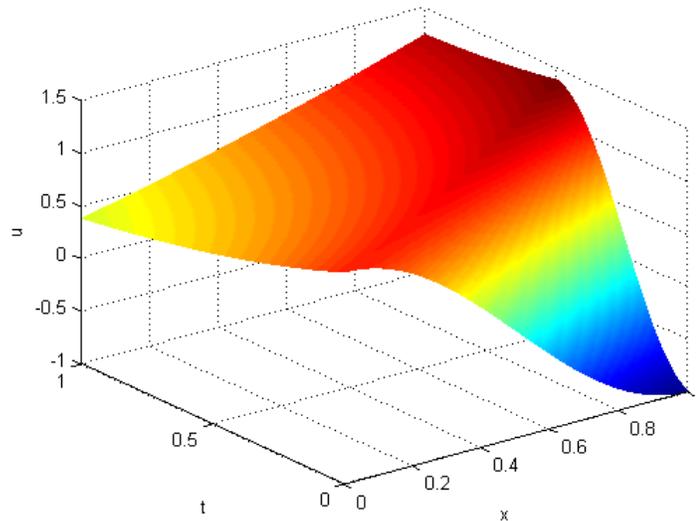


Рис. 8: Численное решение задачи (3.1) по схеме (3.5) в случае $N = 100$ при выполнении условия устойчивости

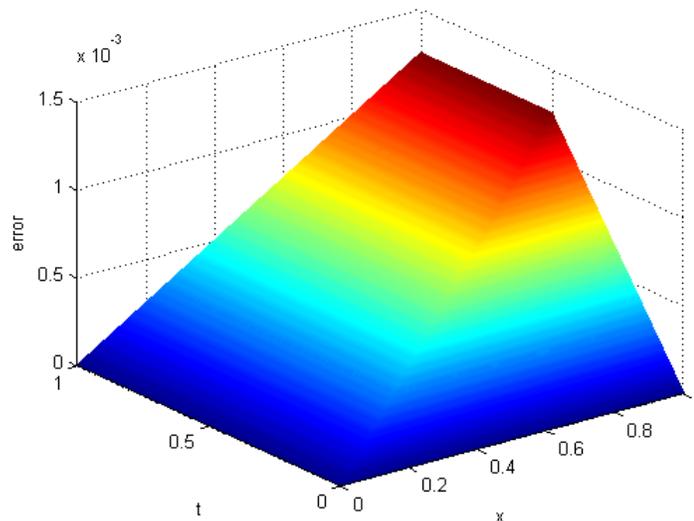


Рис. 9: Погрешность численного решения задачи (3.1) по схеме (3.5) при $N = 100$, $J = 2N$

График погрешности решения в случае, когда условие устойчивости схемы (3.5) не выполнено, представлен на рис. 10.

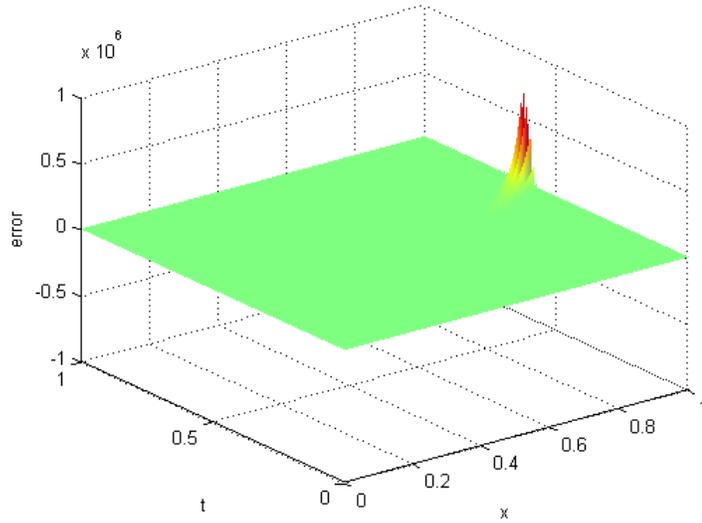


Рис. 10: Погрешность численного решения задачи (3.1) по схеме (3.5) при $N = 100$, $J = 2N - 20$

Схема б) для задачи (3.1) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + 2\frac{y_n^{j+1} - y_{n-1}^{j+1}}{h} = x_n + t_{j+1}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1, \\ y_0^j = e^{-t_j}, \quad j = 0, 1, \dots, J, \\ y_n^0 = \cos(\pi x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (3.6)$$

В данном случае ($c = 2 > 0$) схема (3.6) безусловно устойчива. Как и в предыдущем случае, при каждом $n = 1, 2, \dots, N$ и $j = 0, 1, \dots, J - 1$ неизвестным является значение y_n^{j+1} , которое находится из соответствующего уравнения (3.6). График численного решения задачи (3.1), полученного по схеме (3.6), а также погрешности численного решения, представлены на рис. 11 - 12.

Схема в) в данном случае имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + 2\frac{y_{n+1}^{j+1} - y_n^{j+1}}{h} = x_n + t_{j+1}, \quad n = 0, 1, \dots, N - 1, \quad j = 0, 1, \dots, J - 1, \\ y_0^j = e^{-t_j}, \quad j = 0, 1, \dots, J, \\ y_n^0 = \cos(\pi x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Она устойчива, если шаги τ и h удовлетворяют условию $2\tau \geq h$, или, что то же самое, $J \leq 2N$. Погрешность расчетов по схеме (3.7) в случае, когда условие устойчивости выполнено, и когда оно не выполнено, приведены на рис. 13 - 14.

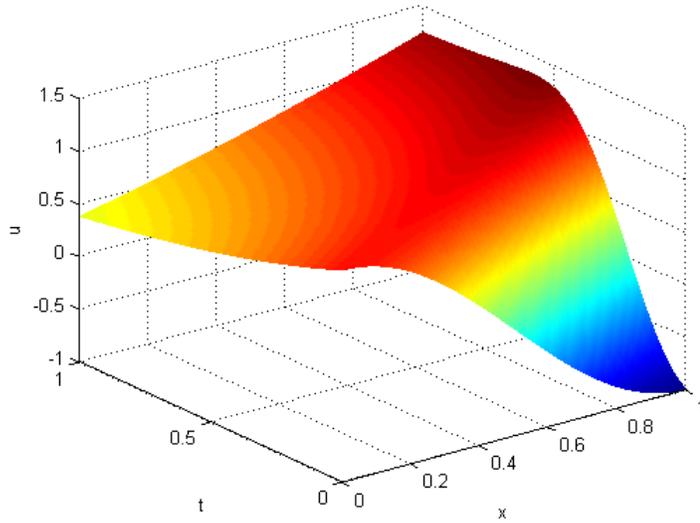


Рис. 11: Численное решение задачи (3.1) по схеме (3.6) в случае $N = J = 100$

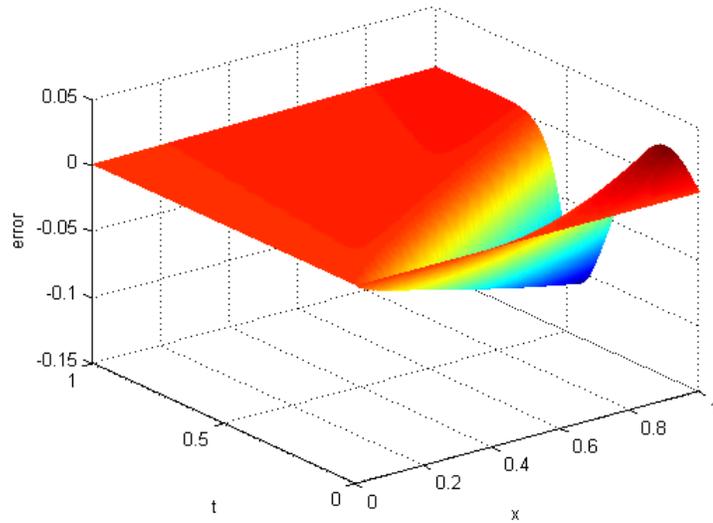


Рис. 12: Погрешность численного решения задачи (3.1) по схеме (3.6) при $N = J = 100$

Схема г) для задачи (3.1) имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left(\frac{y_n^{j+1} - y_n^j}{\tau} + \frac{y_{n+1}^{j+1} - y_{n+1}^j}{\tau} \right) + \left(\frac{y_{n+1}^{j+1} - y_n^{j+1}}{h} + \frac{y_{n+1}^j - y_n^j}{h} \right) = \\ \quad = (x_n + 0.5h) + (t_j + 0.5\tau), \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, \dots, J-1, \\ y_0^j = e^{-t_j}, \quad j = 0, 1, \dots, J, \\ y_n^0 = \cos(\pi x_n), \quad n = 0, 1, \dots, N. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Эта схема безусловно устойчива. График погрешности численного решения, найденного по схеме (3.8) при $N = J = 100$, представлен на рис. 15.

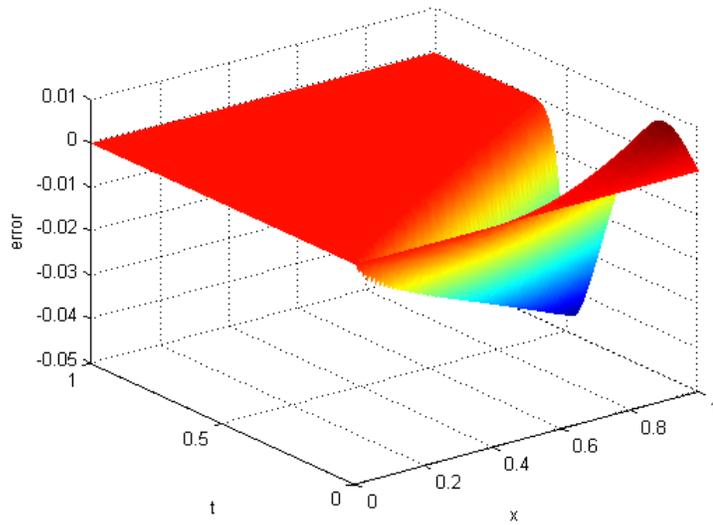


Рис. 13: Погрешность численного решения задачи (3.1) по схеме (3.7) при $N = J = 100$

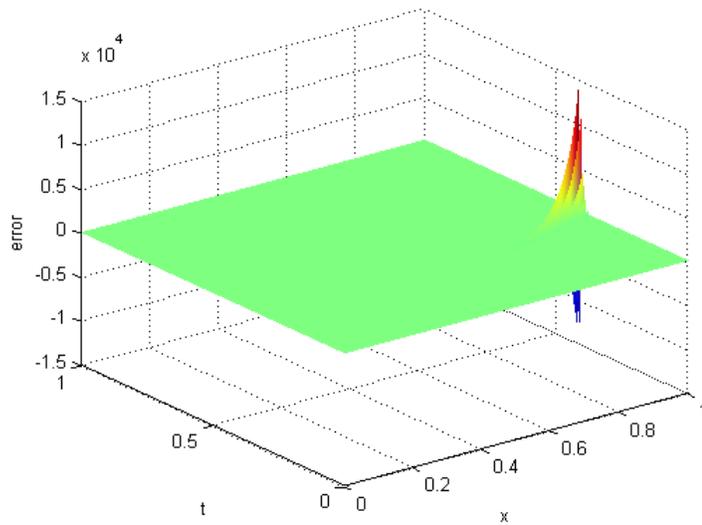


Рис. 14: Погрешность численного решения задачи (3.1) по схеме (3.7) при $N = 100$, $J = 2N + 20$

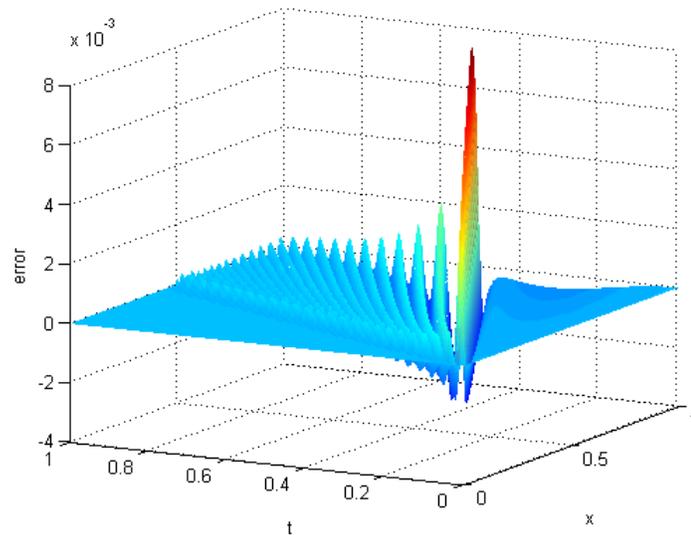


Рис. 15: Погрешность численного решения задачи (3.1) по схеме (3.8) при $N = J = 100$