ЛЕКЦИЯ 5
Пример глобальной разрешимости

§ 9. Применение теоремы Пикара в сочетании с методом априорных оценок: доказательство глобальной разрешимости одной начально-краевой задачи

1. Классическая постановка задачи. Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(\Delta u - u) + \Delta u - u^3 = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Мы сразу перейдём к формулировке и исследованию обобщённой постановки этой задачи.

2. Обобщённая постановка и локальная разрешимость. Подобно тому, как это было сделано в лекции 2, введём линейный оператор

$$Au = \Delta u - Iu, \quad A : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega).$$

Здесь линейные операторы Δ и I действуют из пространства $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ в пространство $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ соответственно по правилам

$$\langle \Delta v, w \rangle = -\int_\Omega (\nabla v, \nabla w)\, dx \quad \forall v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega), \tag{1}$$

$$\langle Iv, w \rangle = \int_\Omega vw\, dx \quad \forall v, w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \tag{2}$$

(Тот факт, что определённый согласно (1) оператор Δ является ограниченным, проверяется с помощью неравенство Коши—Буняковского. В случае оператора I приходится привлечь ещё и неравенство Фридрихса.) Аналогично случаю лекции 2 с помощью теоремы Браудера—Минти устанавливаем, что оператор A имеет ограниченный обратный оператор

$$A^{-1} : \mathbb{H}^{-1}(\Omega) \to \mathbb{H}_0^1(\Omega).$$

Попытаемся искать обобщённое решение задачи (1) как функцию

$$u(t) \in C^1([0,T), \mathbb{H}_0^1(\Omega)), \quad 0 < T \leqslant +\infty.$$

Тогда уравнение из (1) можно, пока формально, переписать в виде

$$\frac{d}{dt}Au + \Delta u - u^3 = 0$$

или, с учётом тождества $\frac{d}{dt}Au = Au'$ (см. лекцию 1) и обратимости оператора A, в виде

$$\frac{d}{dt}u = A^{-1}(u^3 - \Delta u).$$

Почему формально? Потому что мы пока не знаем, принадлежит ли u^3 области определения $\mathbb{H}^{-1}(\Omega)$ оператора A^{-1}. Однако сейчас мы установим нужный нам факт. Именно, из теорем вложения соболевских пространств известно, что для ограниченной области Ω имеет место непрерывное вложение

$$J_1 : \mathbb{H}_0^1(\Omega) \to L^4(\Omega). \tag{3}$$

В силу теоремы Красносельского об операторе Немыцкого можно утверждать, что отображение $u \mapsto u^3$ преобразует функцию из пространства $L^4(\Omega)$ в функцию из пространства $L^{4/3}(\Omega)$. (Впрочем, в данном случае это очевидно из более простых соображений: $|u^3|^{4/3} = |u|^4$, поэтому если $u \in L^4(\Omega)$, то $u^3 \in L^{4/3}(\Omega)$.) С другой стороны, $L^{4/3}(\Omega) = (L^4(\Omega))^*$, а поэтому в силу известной теоремы о вложении банаховых пространств и их сопряжённых[1] из получаем непрерывное вложение

$$J_2 : L^{4/3}(\Omega) \to \mathbb{H}^{-1}(\Omega),$$

понимаемое в естественном смысле:

$$\langle J_2 v, w\rangle = \int_\Omega vw\, dx \quad \forall v \in L^{4/3}(\Omega), \forall w \in \mathbb{H}_0^1(\Omega). \tag{4}$$

Итак, имеется цепочка отображений

$$\mathbb{H}_0^1(\Omega) \xrightarrow{J_1} L^4(\Omega) \xrightarrow{F_3} L^{4/3}(\Omega) \xrightarrow{J_2} \mathbb{H}^{-1}(\Omega). \tag{5}$$

Следовательно, имеется отображение $A^{-1} \circ J_2 \circ F_3 \circ J_1$. Чтобы доказать его ограниченную липшиц-непрерывность, достаточно доказать таковую для отображения $F_3 : L^4(\Omega) \to L^{4/3}(\Omega)$, поскольку остальные отображения являются ограниченными линейными операторами (см. задачу 1). Итак, если мы докажем, что отображение F_3 является ограниченно липшиц-непрерывным, то сможем свести исследование исходной задачи к исследованию абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u = A^{-1}(J_2F_3(J_1u) - \Delta u), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{6}$$

и применить к ней теорему из лекции 3.

Продемонстрируем на этом примере стандартную технику использования неравенств Гёль-

---

[1] Если X, Y суть рефлексивные бесконечномерные банаховы пространства, то условие «X плотно и непрерывно вложено в Y» равносильно условию «Y^* плотно и непрерывно вложено в X^*».

дера и Юнга. Имеем

$$\|u_1^3-u_2^3\|_{4/3}=\left(\int_\Omega |u_1^3-u_2^3|^{\frac{4}{3}}dx\right)^{\frac{3}{4}}=$$
$$=\left(\int_\Omega |u_1-u_2|^{\frac{4}{3}}\cdot|u_1^2+u_1u_2+u_2^2|^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=\{\text{неравенство Гёльдера}\}=$$
$$=\left(\left(\int_\Omega |u_1-u_2|^{\frac{4}{3}\cdot 3}dx\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\int_\Omega |u_1^2+u_1u_2+u_2^2|^{\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}}dx\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=$$
$$=\left(\left(\int_\Omega |u_1-u_2|^{4}dx\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\int_\Omega |u_1^2+u_1u_2+u_2^2|^{2}dx\right)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}=$$
$$=\left(\int_\Omega |u_1-u_2|^{4}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\int_\Omega |u_1^2+u_1u_2+u_2^2|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\|u_1-u_2\|_4\cdot\left(\int_\Omega |u_1^2+u_1u_2+u_2^2|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для оценки второго множителя заметим, что

$$|u_1^2+u_1u_2+u_2^2|^2=u_1^4+u_2^4+3u_1^2u_2^2+2(u_1^3u_2+u_1u_2^3)\leqslant C(u_1^4+u_2^4),$$

где последний переход произведён с помощью неравенства Юнга, применённого в виде

$$u_1^2u_2^2\leqslant\frac{u_1^4+u_2^4}{2},\quad |u_1||u_2|^3\leqslant\frac{u_1^4}{4}+\frac{u_2^4}{4/3}\quad\text{и}\quad |u_1|^3|u_2|\leqslant\frac{u_1^4}{4/3}+\frac{u_2^4}{4}.$$

Следовательно,

$$\left(\int_\Omega |u_1^2+u_1u_2+u_2^2|^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant C_1\left(\int_\Omega (u_1^4+u_2^4)dx\right)^{\frac{1}{2}}=C_1\left(\int_\Omega u_1^4dx+\int_\Omega u_2^4dx\right)^{\frac{1}{2}}=$$
$$=C_1\left(\|u_1\|_4^4+\|u_2\|_4^4\right)^{\frac{1}{2}}=C_1\left(2\max(\|u_1\|_4,\|u_2\|_4)\right)^2. \quad (7)$$

Итак, в силу всего вышесканного ограниченная липшиц-непрерывность отображения $A^{-1}\circ J_2\circ$ $\circ F_3\circ J_1$ доказана. Следовательно, применяя теорему 3 к задаче Коши (6), получаем локальную (по t) разрешимость рассматриваемой задачи.

3. Глобальная разрешимость. Применим метод априорных оценок.

Итак, решение задачи есть функция $u(t)\in C^1([0,T);\mathbb{H}_0^1(\Omega))$. Следовательно (в силу всего вышесказанного) левая часть есть элемент пространства $C([0,T);\mathbb{H}^{-1}(\Omega))$. Поэтому при каждом $t\geqslant 0$ можно подействовать левой частью уравнения на $u(t)$. Получим

$$\left\langle\frac{d}{dt}(Au)+\Delta u-J_2F_3(J_1u),u(t)\right\rangle=0,\quad t\in[0,T).$$

Пользуясь перестановочностью дифференцирования и применения линейного оператора (см. лекцию 1), приводим предыдущее тождество к виду

$$\left\langle A\frac{d}{dt}u+\Delta u-J_2F_3(J_1u),u(t)\right\rangle=0,\quad t\in[0,T),$$

или
$$\left\langle A\frac{d}{dt}u, u\right\rangle + \langle \Delta u, u\rangle - \langle J_2F_3(J_1u), u\rangle = 0, \quad t\in[0,T).$$
Распишем в явном виде оператор A и скобки двойственности (см. (1) и (2)):
$$-\int_\Omega (\nabla(u'),\nabla u)dx - \int_\Omega u'u\,dx - \int_\Omega (\nabla u,\nabla u)dx - \int_\Omega u^3\cdot u\,dx = 0,$$
где последний член получается с учётом (4), или
$$-(\nabla(u'),\nabla u) - (u',u) - \int_\Omega (\nabla u,\nabla u)dx - \int_\Omega u^4 dx = 0. \tag{8}$$
Поскольку (см. задачу 3) в вещественном гильбертовом пространстве H для любой непрерывно дифференцируемой функции $v(t)\in C^1(\mathcal{T},H)$ верно
$$\frac{d}{dt}\|v\|^2 = 2(v',v),$$
равенство (8) можно преобразовать к виду
$$-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)}\right) - \int_\Omega u^4\,dx = 0, \tag{9}$$
или, обозначив $E(t) := \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)}$,
$$\frac{1}{2}\frac{dE}{dt} = -\left(\|u\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)} + \int_\Omega u^4\,dx\right),$$
откуда
$$\frac{1}{2}\frac{dE}{dt} \leqslant 0.$$
Учтя, что $E(0) = \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|^2_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)} < +\infty$, получаем, что на всём промежутке существования решения выполнено неравенство
$$E(t) \leqslant E(0). \tag{10}$$
Теперь вспомним, что абстрактная задача Коши, к которой мы свели исходную задачу, ставилась в пространстве $\mathbb{H}^1_0(\Omega)$. Следовательно, норма именно в этом пространстве будет фигурировать в теореме лекции 3 при применении этой теоремы к нашей задаче. Но из (10) получаем
$$\|u\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)} \leqslant E(t) \leqslant E(0)$$
и, в частности, *для любого конечного* $T_1 < +\infty$ имеем
$$\lim_{t\to T_1}\|u\|_{\mathbb{H}^1_0(\Omega)} < +\infty. \tag{11}$$
Но из теоремы лекции 3 вытекает, что если бы решение существовало бы лишь на конечном промежутке, его норма стремилась бы к бесконечности на конце этого промежутка. Следовательно, решение существует на всей полупрямой $[0,+\infty)$.

Замечание 1. Как видно, здесь важна не сама по себе оценка (10), а более слабое утверждение: ограниченность нормы решения на каждом *ограниченном промежутке*.

Задачи для самостоятельного решения

1. Пользуясь оценкой (7), получить в явном виде функцию $\mu(t,s)$ из теоремы лекции 3 для отображения $A^{-1} \circ J_2 \circ F_3 \circ J_1$.

2. Доказать ограниченную липшиц-непрерывность следующих операторов:
1) $u \mapsto u^5$, $L^6(\Omega) \to L^{6/5}(\Omega)$;
2*) $u \mapsto |u|^q$, $L^{q+1}(\Omega) \to L^{(q+1)/q}(\Omega)$, $q > 1$.

3. Доказать формулу дифференцирования скалярного квадрата дифференцируемой функции со значении в вещественном гильбертовом пространстве:

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 = 2(u', u).$$

(Рекомендуется сослаться на подходящее утверждение из лекции 1, проверив условия его применимости.)

4. Сформулировать соответствующие обобщённые постановки и доказать глобальную разрешимость аналогичной задачи, в правой части уравнения которой вместо 0 стоит:
1) $f(x) \in L^2(\Omega)$;
2) $f(x) \in \mathbb{H}^{-1}(\Omega)$;
3) $f(x,t) \in C([0,+\infty); L^2(\Omega))$;
4) $f(x,t) \in C([0,+\infty); \mathbb{H}^{-1}(\Omega))$;
5*) $f(x,u)$;
6*) $f(x,|\nabla u|)$,
где в последних двух случаях функция $f(x,s)$ является каратеодориевой и равномерно по $x \in \Omega$ удовлетворяет оценке

$$|f(x,t)| \leqslant |s|^\gamma, \quad \gamma \in (0,1).$$