ОГЛАВЛЕНИЕ

Тематическая лекция 2

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В этой лекции мы докажем сильный принцип максимума и рассмотрим его приложения.

§ 1. Области. Верхняя и нижняя крышки

Давайте сформулируем некоторые понятия и определения, связанные с рассмотрением областей $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, где изучаются решения параболических уравнений.

Итак, ограниченная область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, изображенная на следующем рисунке имеет границу ∂D, состоящую из следующих частей: из

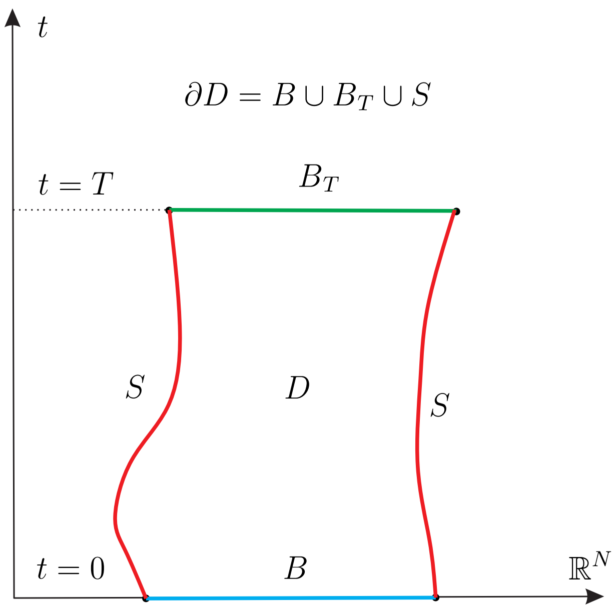

Рис. 1. Граница ∂D области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

основания B при $t = 0$, называемого нижней крышкой

$$\overline{B} = B \cup \partial B, \quad \overline{B} \stackrel{\text{def}}{=} \partial D \cap \{t = 0\},$$

из верхней крышки B_T

$$\overline{B}_T = B_T \cup \partial B_T, \quad \overline{B}_T \stackrel{\text{def}}{=} \partial D \cap \{t = T\}$$

и из боковой границы

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \partial D \backslash (B \cup B_T) = (\partial D \cap \{0 < t < T\}) \cup \partial B_T \cup \partial B.$$

При этом мы в основном рассматриваем такие области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, что множества

$$B \quad \text{и} \quad B_T$$

являются областями в соответствующих гиперплоскостях $t = 0$ и $t = T$. Символом $\overline{B}$ мы обозначили замыкание в $\mathbb{R}^N \otimes \{t = 0\}$ области B, $\overline{B}_T$ — замыкание в $\mathbb{R}^N \otimes \{t = T\}$ области B_T, а символами ∂B и ∂B_T мы обозначили границы областей $B \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = 0\}$ и $B_T \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = T\}$, соответственно.

Отметим, что граничные условия для решений параболического уравнения задаются не на всей границе ∂D области D, а только на ее части

$$\partial' D \stackrel{\text{def}}{=} B \cup S,$$

называемой нормальной границей или параболической границей. И это связано со слабым принципом максимума.

На практике довольно часто область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ может быть представлена в виде цилиндра $D = \Omega \otimes (0, T)$ или в более общем случае $D = \Omega \otimes (T_0, T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Такую область называют цлиндрической. Пример цилиндрической области приведен на рисунке 9. С другой стороны, много практических примеров, так называемых областей с подвижной границей, когда область D является нецилиндрической. Пример, нецилиндрической области изображен на рисунке 10.

Введем следующие обозначения (см. рисунок 11):

$$B_\tau \stackrel{\text{def}}{=} D \cap \{t = \tau\}, \quad D_\tau \stackrel{\text{def}}{=} D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad S_\tau \stackrel{\text{def}}{=} S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}$$

для любого $\tau \in (0, T)$. Мы будем в дальнейшем рассматривать в основном такие области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, что множества B_τ для всех $\tau \in$ $\in [0, T]$ являются областями (связными и открытыми множествами) на соответствующих гиперплоскостях $t = \tau$. Хотя принцип максимума будет доказан для достаточно общих областей D.

Теперь мы введем строго математически определения верхней и нижней крышек. И убедимся, что некоторые связные части нижней крышки могут располагаться «выше» некоторых связных частей верхних крышек.

Пусть

$$\text{Ц}^{t_1, t_2}_{x_0, R} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \, |x - x_0| < R, \; t_1 < t < t_2 \right\}$$

— это цилиндр (область) в $\mathbb{R}^{N+1}$. Дадим определения.

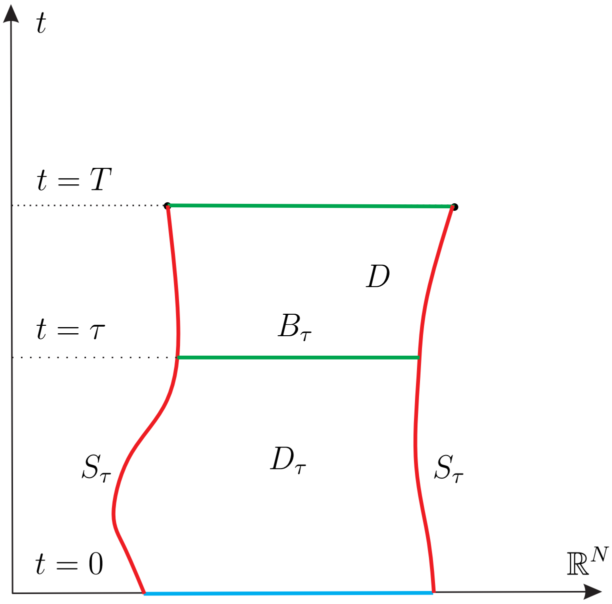

Рис. 2. Множества D_τ, B_τ и S_τ.

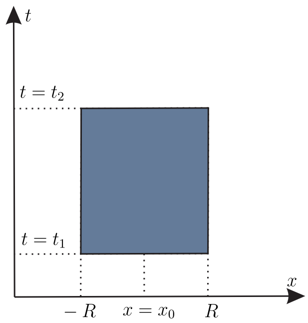

Рис. 3. Цилиндр $Ц_{x_0,R}^{t_1,t_2}$.

Определение 1. *Верхней крышкой* $\gamma(D)$ *области* $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *называется подмножество граничных точек* $M = (x,t) \in \partial D$ *таких, что для любой точки* $M = (x,t) \in \gamma(D)$ *найдется такое* $h > 0$, *что выполнены следующие свойства*

$$Ц_{x,h}^{t-h,t} \subset D \quad и \quad Ц_{x,h}^{t,t+h} \subset \mathbb{R}^{N+1} \backslash D.$$

Определение 2. *Нижней крышкой* $\gamma_0(D)$ *области* $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *называется подмножество граничных точек* $M = (x,t) \in \partial D$ *таких, что для любой точки* $M = (x,t) \in \gamma_0(D)$ *найдется такое* $h > 0$, *что* *выполнены следующие свойства*

$$Ц_{x,h}^{t,t+h} \subset D \quad и \quad Ц_{x,h}^{t-h,t} \subset \mathbb{R}^{N+1} \backslash D.$$

Определение 3. *Множество граничных точек* $S(D) := = \partial D \backslash (\gamma(D) \cup \gamma_0(D))$ *называется* <u>*боковой границей*</u> [1]) *области* D. *Множество* $\partial' D := \partial D \backslash \gamma(D)$ *называется* <u>*параболической границей*</u> *области* D.

На следующем рисунке мы изобразили область D ограниченную границей ∂D, состоящую согласно определениям 1–3 из непересекающихся частей — нижней крышке $\gamma_0(D)$, изображенной на рисунке отрезками [1-6] и [7-8] синего цвета, верхней крышки $\gamma(D)$, изображенной на рисунке отрезками [2-3], [4-5] и [9-10] зеленого цвета. Наконец, линиями красного цвета на рисунке изображена боковая граница $S(D)$. Как мы обещали, мы привели пример части нижней

$$\partial D = \gamma(D) \cup \gamma_0(D) \cup S(D)$$

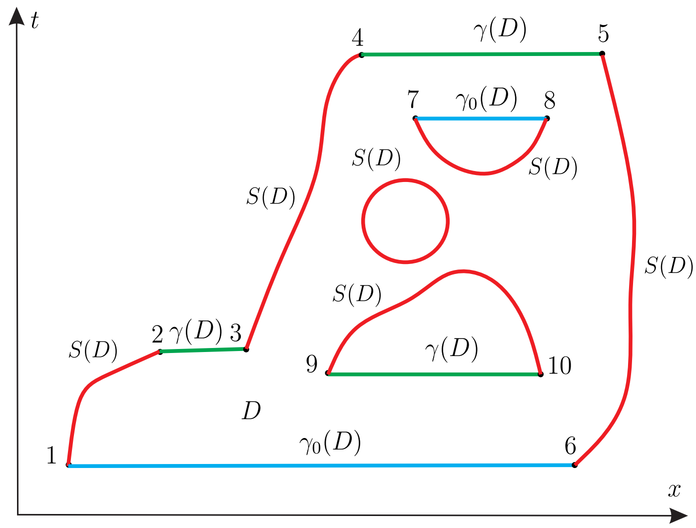

Рис. 4. Граница ∂D области D и ее части — верхняя крышка $\gamma(D)$, нижняя крышка $\gamma_0(D)$ и боковая граница $S(D)$.

крышки $[7-8]$, расположенной выше двух связных частей верхней крышки [2-3] и [9-10]. Кроме того, для корректной постановки, например, первой краевой задачи (см. следующий параграф) нужно задавать решение $u(x,t)$ параболического уравнения только на параболической

[1]) Если понятно для какой области D множество $S(D)$ является боковой границей, мы будем использовать обозначение S.

границе $\partial' D$. В частности, мы должны задать значение функции $u(x,t)$ на отрезке [7-8] — связном отрезке нижней крышки $\gamma_0(D)$.

Отметим, что можно привести пример области D, для которой верхняя крышка $\gamma(D) = \varnothing$ и нижняя крышка $\gamma_0(D) = \varnothing$. Аналитически такая область может быть задана следующим образом:

$$D = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \sum_{j=1}^{N} |x_j - a_j|^2 + |t - t_0|^2 < 1 \right\}.$$

Очевидно, что для этой области D граница области ∂D совпадает с боковой границей $S(D)$.

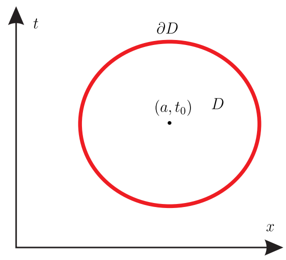

Рис. 5. Область D, для которой и нижняя и верхняя крышки — пустые множества.

Заметим, что в основном мы рассматриваем области D, которые имеют более привычный вид, изображенный на рисунке 11.

Сделаем ряд замечаний относительно обозначений. В случае областей $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, для которых верхняя крышка $\gamma(D)$ состоит только из одной связной компоненты, лежащей на гиперплоскости $t = T > 0$ мы будем использовать обозначение B_T вместо $\gamma(D)$. Аналогично в том случае, если нижняя крышка $\gamma_0(D)$ состоит только из одной связной компоненты, лежащей на гиперплоскости $t = 0$, мы будем использовать обозначение B вместо $\gamma_0(D)$.

Кроме того, связные компоненты верхней крышки $\gamma(D)$ будем обозначать символом B_t, а связные компоненты нижней крышки $\gamma_0(D)$ будем обозначать символом B^t.

§ 2. Постановка задач для параболических операторов

В курсе лекций мы будем рассматривать не только задачу Коши и первую краевую задачу, а также вторую и третью краевые задачи. Прежде всего дадим определение параболического оператора в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Оператор L, определенный равенством

$$Lu(x,t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1)$$

называется параболическим в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, если для всех $(x,t) \in \in D$ и для каждого $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N$ выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j > 0. \quad (2.2)$$

Иначе говоря, оператор L называется параболическим в области D, если его часть

$$L_0 u \overset{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u \quad (2.3)$$

для всех $(x,t) \in D$ является эллиптическим оператором по переменным x_i, $i = \overline{1,N}$ с параметром t. Дадим определение локально равномерно параболического оператора.

Определение локально равномерно параболического оператора. *Оператор L называется локально равномерно параболическим, если для всех $(x,t) \in Q$ из компактного множества $Q \subset D$ найдутся такие постоянные $m = m(Q) > 0$ и $\Lambda = \Lambda(Q) > 0$, что выполнены неравенства*

$$m(Q)|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda(Q)|\xi|^2 \quad \textit{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (2.4)$$

Замечание 1. Это определение означает, что эллиптический оператор L_0 является локально равномерно эллиптическим с параметром t.

Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют следующим условиям:

(A) Оператор L — локально равномерно параболический в D;
(B) коэффициенты оператора L — непрерывные функции в $D \cup \gamma(D)$;
(C) $c(x,t) \leqslant 0$ в D.

Определение классического решения параболического уравнения. *Функция $u = u(x,t)$ называется классическим решением параболического уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \in \mathbb{C}(D \cup \gamma(D)),$$

если

$$u(x,t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{C}(D \cup \gamma(D)),$$

где оператор L *определен равенством* (2.1) *и выполнено условие* (B) *относительно его коэффициентов. Другими словами,* $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D))$.

Замечание 2. Отметим, что в расшифровке нуждается условие, что

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup \gamma(D)).$$

Действительно, пусть $B_{t_1} \subset \gamma(D)$ — это произвольная связная компонента верхней крышки (очевидно, что множество B_{t_1} — это открытое и связное множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N \otimes \{t = t_1\}$. Тогда для функции $u(x,t) \in \mathbb{C}(D \cup B_{t_1})$ запись

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup B_{t_1})$$

означает, что

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D) \quad \text{и} \quad \exists \lim_{t \to t_1 - 0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D^-_t u(x,t_1),$$

где D^-_t — это левая односторонняя производная по t функции $u(x,t)$. Положим по определению

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \begin{cases} \partial u(x,t)/\partial t, & \text{если} \quad (x,t) \in D; \\ D^-_t u(x,t), & \text{если} \quad (x,t_1) \in B_{t_1}. \end{cases}$$

Очевидно, что при этом

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup B_{t_1}).$$

Дадим постановку задачи Коши.

Задача Коши. *Найти классическое решение*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,+\infty)) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$$

уравнения

$$Lu(x,t) = f(x,t)\ ^{1)} \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{2.5}$$

удовлетворяющего начальному (*граничному при* $t = 0$) *условию*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.6}$$

Замечание 3. Сразу же заметим, что задача Коши имеет, вообще говоря, неединственное решение. Для того чтобы классическое решение

[1]) Мы предполагаем, что $f(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$.

задачи Коши было единственным достаточно потребовать выполнения следующих неравенств:

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp\left(\beta |x|^2\right), \quad |f(x,t)| \leqslant M \exp\left(\beta |x|^2\right) \tag{2.7}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t \geqslant 0$ для некоторых постоянных $M > 0$ и $\beta > 0$.

Дадим постановку первой краевой задачи в предположении, что рассматривается такая область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}_+$, для которой

$$\gamma(D) = B_T \quad \text{и} \quad \gamma_0(D) = B,$$

и область D расположена между гиперплоскостями $t = 0$ и $t = T$.

Первая краевая задача. *Найти классическое решение $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$ в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}_+$, удовлетворяющее уравнению*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.8}$$

начальному условию на замыкании нижней крышки

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B}, \tag{2.9}$$

а также граничному условию на боковой границе S

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S \stackrel{\text{def}}{=} \partial D \setminus (B \cup B_T). \tag{2.10}$$

Замечание 4. Отметим, что граничные условия (2.9) и (2.10) можно объединить в одно граничное условие

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D \tag{2.11}$$

на параболической границе $\partial' D = B \cup S$ полной границы ∂D. При этом граничная функция $\psi(x,t) \in \mathbb{C}(\partial' D)$. Как мы видим специфика первой краевой задачи для параболического оператора L — это отсутствие граничного условия на верхней крышке B_T области D.

Вторую и третью краевые задачи для параболического оператора L мы будем формулировать в случае цилиндрической области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Для этого нам нужно ввести *производную по внутренней нормали* $\partial/\partial n_{x,t}$ и *производную по внутренней конормали* $\partial/\partial \nu_{x,t}$ к боковой границе $S := \partial D \setminus (B \cup B_T)$.

В каждой точке $(x,t) \in S$ определено непрерывное векторное поле внутренних нормалей $n_{x,t}$, лежащее для любого $t = \tau \in [0,T]$ на гиперплоскости $t = \tau$ и определенное своими углами $\cos(n_{x,t}, e_i)$. Тогда вектор внутренней конормали $\nu_{x,t}$ определен следующим образом:

$$\nu_{x,t} = \frac{1}{a(x,t)} \left(\sum_{i=1}^{N} a_{i1}(x,t) \cos(n_{x,t}, e_i), \cdots, \sum_{i=1}^{N} a_{iN}(x,t) \cos(n_{x,t}, e_i), 0 \right),$$

где

$$a(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left[\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\cos(n_{x,t},e_j)\right)^2\right]^{1/2}.$$

Граничным оператором нормальной производной называется следую-

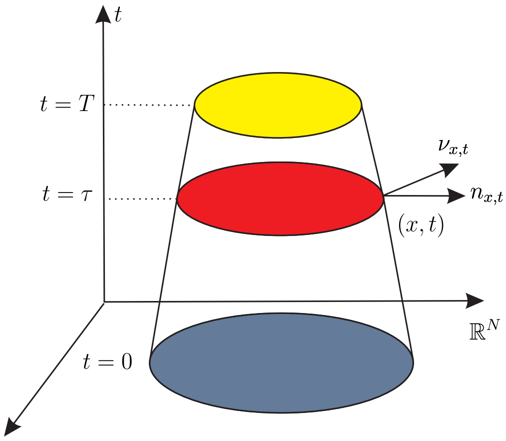

Рис. 6. Векторы внешней нормали $n_{x,t}$ и внешней конормали $\nu_{x,t}$.

щее выражение:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n_{x,t}}\right|_S \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{i=1}^{N}\cos(n_{x,t},e_i)\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_S, \tag{2.12}$$

а оператором конормальной производной в случае оператора L с матрицей $(a_{ij}(x,t))$ называется величина

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}}\right|_S \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{a(x,t)}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\cos(n_{x,t},e_i)\left.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_S. \tag{2.13}$$

Вторая краевая задача. *Найти классическое решение* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{1,0}_{x,t}(D \cup S) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$ *уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.14}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B} \tag{2.15}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S. \tag{2.16}$$

Третья краевая задача. *Найти классическое решение* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{1,0}_{x,t}(D \cup S) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$ *уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.17}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B} \tag{2.18}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t)u(x,t) = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S. \tag{2.19}$$

Ясно, чтобы классическое решение второй и третьей краевых задач существовало с необходимостью нужно требовать выполнимости условий согласования начального и граничного условия на границе ∂B нижней крышки B.

Замечание 5. Отметим, что можно задать на боковой границе S также общее граничное условие следующего вида:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial l_{x,t}} + \beta(x,t)u(x,t) = g(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S, \tag{2.20}$$

где векторное внутреннее поле $l_{x,t}$ является непрерывным векторным полем на S нигде не совпадающее с касательным направлением к поверхности S.

Помимо перечисленных задач можно рассматривать также задачу Стефана со свободной границей (см. подробное рассмотрение этой задачи в книге [12]), когда заранее граница области D полностью неизвестна. Однако, эту задачу мы рассматривать не будем и поэтому не формулируем.

В постановках второй и третьей краевых задач мы предполагаем, что область D цилиндрическая и поэтому $\gamma(D) = B_T$ и $\gamma_0(D) = B$.

§ 3. Слабый принцип максимума

Пусть параболический оператор L удовлетворяет условиям (B) и (C). Справедливо важное утверждение, называемое *слабым принципом максимума.*

Лемма 1. *Предположим, что либо* $Lu > 0$ *всюду в* $D \cup \gamma(D)$, *либо* $Lu \geqslant 0$ *и* $c(x,t) < 0$ *всюду в* $D \cup \gamma(D)$. *Тогда* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D))$ *не может иметь положительного локального максимума в* $D \cup \gamma(D)$.

Доказательство.

Пусть $u = u(x,t)$ имеет положительный локальный максимум в точке $P_0 = z_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma(D)$. Докажем, что

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0)\frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0. \tag{3.1}$$

□ В самом деле, линейным невырожденным преобразованием

$$y = \widehat{C}x$$

область D преобразуется в область D^* и справедливо равенство

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0)\frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij}(y_0,t_0)\frac{\partial^2 v(y_0)}{\partial y_i \partial y_j}, \tag{3.2}$$

где

$$v(y,t) := u(\widehat{C}^{-1}y, t), \quad y_0 = \widehat{C}x_0, \quad (b_{ij}(y_0,t_0)) := \widehat{C}(a_{ij}(x_0,t_0))\widehat{C}^T.$$

Выберем матрицу $\widehat{C}$ так, чтобы $b_{ij}(y_0,t_0) = \delta_{ij}$ [1]. Функция $v(y,t)$ имеет в точке $(y_0,t_0) \in D^* \cup \gamma(D^*)$ тоже положительный максимум. Следовательно, выполнено неравенство

$$\frac{\partial^2 v(y_0)}{\partial y_i^2} \leqslant 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij}(y_0,t_0)\frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_i \partial y_j} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_i^2} \leqslant 0. \quad \boxtimes$$

Таким образом, отсюда в силу (3.2) выполнено неравенство (3.1). Наконец, в точке $P_0 = (x_0,t_0)$ выполнены необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial t} \geqslant 0.$$

Последнее неравенство требует пояснений. Действительно, если $P_0 = (x_0,t_0) \in D$, т. е. является внутренней точкой области D, то в точке локального экстремума (максимума) выполнено необходимое условие

$$\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial t} = 0.$$

Предположим теперь, что $(x_0,t_0) \in \gamma(D)$, т. е. найдется связная компонента $B_{t_0} \in \gamma(D)$, которой принадлежит точка (x_0,t_0). Докажем, что в наших обозначениях выполнено неравенство

$$D_t^- u(x_0,t_0) \geqslant 0. \tag{3.3}$$

[1] Что, очевидно, можно сделать, применив сначала ортогональный поворот, а затем применив невырожденное преобразование типа растяжения.

□ Действительно, поскольку в точке $(x_0, t_0) \in B_{t_0}$ достигается локальный максимум, то согласно определению верхней крышки имеет место неравенство

$$\frac{u(x_0,t_0)-u(x_0,t)}{t_0-t} \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x_0,t) \in Ц_{x_0,h}^{t_0-h,t_0}$$

при некотором достаточно малом $h > 0$. Отсюда в пределе при $Ц_{x_0,h}^{t_0-h,t_0} \ni (x_0,t) \to (x_0,t_0)$ получим неравенство (3.3). ⊠

В итоге имеют место неравенства.

$$Lu(x_0,t_0) \leqslant c(x_0,t_0)u(x_0,t_0). \tag{3.4}$$

Поскольку $u(x_0,t_0) > 0$, то мы приходим к противоречию в неравенстве (3.4) в каждом из двух случаев

$$Lu > 0 \quad \text{и} \quad c(x,t) \leqslant 0 \quad \text{либо} \quad Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad c(x,t) < 0.$$

Лемма доказана.

Приложение слабого принципа максимума. В качестве приложения слабого принципа максимума рассмотрим вопрос о *единственности решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}_{x,t}^{2,1}(D \cup B_T)$ *следующей нелинейной первой краевой задачи*:

$$Lu(x,t) = f(x,t,u,D_x u) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{3.5}$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad B \cup S, \tag{3.6}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$. Будем предполагать, что функция $f = f(x,t,p,p_1,...,p_N)$ определена на множестве $(D \cup B_T) \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N$. Пусть решение $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$.

Справедлива следующая теорема единственности:

Теорема 1. *Пусть L — это параболический оператор с коэффициентами $a_{ij}(x,t), b_i(x,t), c(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ и пусть $f(x,t,p,p_1,...,p_N)$ является неубывающей по переменной $p \in \mathbb{R}^1$ функцией. Тогда существует не более одного решения задачи* (3.5), (3.6).

Доказательство.

Шаг 1. Сначала мы рассмотрим случай $c(x,t) \leqslant 0$ и функция $f = f(x,t,p,p_1,....,p_N)$ является строго возрастающей по $p \in \mathbb{R}^1$.

Предположим, что $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — это два решения задачи (3.5) и (3.6). Если

$$u_1(x,t) \not\equiv u_2(x,t),$$

то можно предположить, что

$$u_1(x,t) > u_2(x,t) \quad \text{в некоторых точках} \quad D \cup B_T,$$

поскольку по исходному предположению $u_1(x,t), u_2(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$. Поэтому функция

$$u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u_1(x,t) - u_2(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$$

будет иметь положительный максимум в $\overline{D}$.

Предположим, что $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup B_T$ — это точка, где достигается локальный максимум. Ясно, что

$$D_x u_1(P_0) = D_x u_2(P_0), \quad u_1(P_0) > u_2(P_0).$$

Поэтому мы получаем, что

$$Lu(P_0) = f(x_0, t_0, u_1(x_0, t_0), D_x u_1(x_0, t_0)) - \\ - f(x_0, t_0, u_2(x_0, t_0), D_x u_2(x_0, t_0)) > 0.$$

С другой стороны, при доказательстве слабого принципа максимума мы доказали, что

$$Lu(P_0) \leqslant 0$$

в каждой точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup B_T$, в которой $u(x, t)$ имеет положительный максимум. Пришли к противоречию.

Поэтому точка P_0 должна принадлежать только параболической границе $\partial' D := S \cup B$, где согласно определению $u(x, t)$ выполнено равенство

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad (x, t) \in \partial' D.$$

Итак, утверждение теоремы в рассматриваемом случае доказано.

Шаг 2. Чтобы доказать теорему в общем случае, сделаем преобразование

$$v(x, t) = e^{-\lambda t} u(x, t),$$

которое переводит уравнение (3.5) в следующее:

$$(L - c(x, t)I)v(x, t) = \widehat{f}(x, t, v, D_x v) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \\ = f(x, t, v e^{\lambda t}, e^{\lambda t} D_x v) e^{-\lambda t} + (\lambda - c(x, t))v.$$

Выберем

$$\lambda > \sup_{(x,t) \in D} c(x, t),$$

тогда функция $\widehat{f}(x, t, v, D_x v)$ будет строго возрастающей по v, а коэффициент при $v(x, t)$ в выражении

$$(L - c(x, t)I)v(x, t)$$

равен нулю. Таким образом, осталось применить результат, полученный на первом шаге.

Теорема доказана.

Обратно параболическое уравнение. Интересным представляется результат о принципе максимума для решений обратно параболического уравнения следующего вида:

$$L_p u(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad D \cup \gamma_0(D)\ ^{1)}, \tag{3.7}$$

где

$$L_p u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u + \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{3.8}$$

Заметим, что по аналогии с пространством $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D))$ нам нужно определить пространство $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$. В этом случае опять требуется расшифровать запись

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup \gamma_0(D))$$

в том случае, если $(x,t) \in \gamma_0(D)$. Тогда найдется связная компонента $B^{t_1} \subset \gamma_0(D)$ такая, что $(x,t) \in B^{t_1}$ и при этом

$$\exists \lim_{t \to t_1+0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_t^+ u(x,t_1),$$

где D_t^+ — это правая односторонняя производная по t функции $u(x,t)$. Положим по определению

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \begin{cases} \partial u(x,t)/\partial t, & \text{если} \quad (x,t) \in D; \\ D_t^+ u(x,t), & \text{если} \quad (x,t_1) \in B^{t_1}. \end{cases}$$

Очевидно, что при этом

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup B^{t_1}).$$

Заметим, что справедлив следующий слабый принцип максимума для решений $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$.
Лемма 2. *Предположим, что либо $L_p u(x,t) > 0$ всюду в $D \cup \gamma_0(D)$, либо $L_p u(x,t) \geqslant 0$ и $c(x,t) < 0$ всюду в $D \cup \gamma_0(D)$. Тогда $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$ не может иметь положительного локального максимума в $D \cup \gamma_0(D)$.*

Доказательство.

Доказательство этого утверждения в целом повторяет доказательство леммы 1. Одно важное изменение относится к случаю, когда локальный положительный максимум $M > 0$ решения дифференциаль-

1) Напомним, что $\gamma_0(D)$ — это нижняя крышка области D, а $\gamma(D)$ — это верхняя крышка.

ного неравенства достигается в точке $P_0 = (x_0, t_0) \in \gamma_0(D)$. В этом случае нужно доказать, что

$$D_t^+ u(x_0, t_0) \leqslant 0.$$

□ Действительно, если $(x_0, t_0) \in \gamma_0(D)$, то найдется связная часть B^{t_0} нижней крышки $\gamma_0(D)$ такая, что $(x_0, t_0) \in B^{t_0}$. Поскольку в этой точке достигается локальный максимум, то найдется такое $h > 0$, что имеет место неравенство

$$\frac{u(x_0, t_0) - u(x_0, t)}{t_0 - t} \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x_0, t) \in \text{Ц}_{x_0,h}^{t_0+h,t_0}.$$

Отсюда в пределе при $\text{Ц}_{x_0,h}^{t_0+h,t_0} \ni (x_0, t) \to (x_0, t_0)$ мы получим неравенство

$$D_t^+ u(x_0, t_0) \leqslant 0. \quad \boxtimes$$

Дальнейшие рассуждения в точности повторяются.

Лемма доказана.

§ 4. Слабый принцип максимума в цилиндрической области

Рассмотрим частный случай цилиндрической ограниченной области $D = \Omega \otimes (0, T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Справедлив следующий принцип максимума:

Теорема 2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *— ограниченная область, выполнены условия* (B) *и* (C) *относительно коэффициентов параболического оператора* L *в области* D *и* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$. *Если*

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad (x,t) \in D, \tag{4.1}$$

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \partial'' D \overset{\text{def}}{=} \overline{\Omega} \otimes \{t = 0\} \cup \partial\Omega \otimes (0, T)\ ^{1)}. \tag{4.2}$$

Тогда $u(x,t) \leqslant 0$ *в* D.

Доказательство.

Шаг 1. Выберем константу $\gamma > 0$ и определим следующую функцию:

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\gamma}{T - t}. \tag{4.3}$$

Пусть z_γ — это точка в $\overline{D}$, в которой $v(x,t)$ принимает максимальное положительное значение. [2] Прежде всего заметим, что в силу ограниченности решения $u(x,t)$ в D

$$v(z) \to -\infty \quad \text{при} \quad z \to B_T = \{x \in \Omega,\ t = T\}.$$

---

1) Граница $\partial'' D \subset \partial' D$.

2) Если максимальное значение неположительно, то предельным переходом при $\gamma \to +0$ мы получим сразу же требуемое утверждение.

Поэтому $z_\gamma \notin \overline{B}_T$ и $z_\gamma \in D \cup \partial'' D$.

Шаг 2. Если $v(z_\gamma) \geqslant 0$, то z_γ не может лежать в D, т. е. быть внутренней точкой цилиндрической области D.

□ Действительно, в противном случае (как и ранее при доказательстве слабого принципа максимума в лемме 1) имеем

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(z_\gamma)\frac{\partial^2 v(z_\gamma)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0, \quad v_t(z_\gamma) = v_{x_i}(z_\gamma) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Заметим, что имеет место равенство

$$-u_t = -v_t - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\gamma}{T-t} = -v_t - \frac{\gamma}{(T-t)^2}.$$

Поэтому в точке z_γ выполнена следующая цепочка неравенств:

$$0 \leqslant Lu(x,t) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(z_\gamma)\frac{\partial^2 v(z_\gamma)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(z_\gamma)\frac{\partial v(z_\gamma)}{\partial x_i} +$$

$$+ c(z_\gamma)u(z_\gamma) - v_t(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leqslant c(z_\gamma)u(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{\gamma}{(T-t)^2} + c(z_\gamma)v(z_\gamma) + c(z_\gamma)\frac{\gamma}{T-t} \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t)^2} + c(z_\gamma)\frac{\gamma}{T-t} < 0. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Полученное противоречие доказывает, что либо $v(z_\gamma) < 0$ в D либо $z_\gamma \in \partial'' D$ и тогда в силу (4.2) имеем $v(z_\gamma) \leqslant 0$. Итак, в любом случае имеем

$$v(x,t) \leqslant v(z_\gamma) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow u(x,t) \leqslant \frac{\gamma}{T-t} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Поскольку $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ не зависит от произвольного $\gamma > 0$, то для всякого фиксированного $(x,t) \in D$ устремим $\gamma \to +0$ и получим неравенство

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим обобщение этой теоремы на случай неограниченной области. Итак, справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (A), (B), (C), *коэффициенты оператора L являются ограниченными функциями в D и $u(x,t) \in \mathbb{C}_b(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$* [1]*. Если*

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad (x,t) \in D, \tag{4.4}$$

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial'' D \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \overline{\Omega},\ t = 0\} \cup \{x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T)\}. \tag{4.5}$$

[1] Т. е. функция $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ и ограничена в D. Напомним, что область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ является неограниченной.

Тогда $u(x,t) \leqslant 0$ *в* D.

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим следующую функцию:

$$v_0(x,t) = \operatorname{ch}(|x|)\exp(\lambda t), \quad \lambda > 0. \tag{4.6}$$

Непосредственно можно проверить, что выполнено неравенство

$$Lv_0(x,t) \leqslant 0 \tag{4.7}$$

для достаточно большой константе $\lambda > 0$.

☐ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial x_i} = \operatorname{sh}(|x|)\frac{x_i}{|x|}\exp(\lambda t),$$

$$\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\operatorname{ch}(|x|)\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{\operatorname{sh}(|x|)}{|x|}\delta_{ij} - \frac{\operatorname{sh}(|x|)}{|x|}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)\exp(\lambda t),$$

$$\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial t} = \lambda \operatorname{ch}(|x|)\exp(\lambda t).$$

Теперь нужно отдельно рассмотреть случаи $|x| \leqslant \delta$ и $|x| \geqslant \delta$, где $\delta \in \in (0,1)$ достаточно мало. Предположим, что

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M, \quad |c(x,t)| \leqslant M \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Рассмотрим случай $|x| \leqslant \delta$. Воспользуемся очевидными неравенствами

$$\frac{|\operatorname{sh}(|x|)|}{|x|} \leqslant 2, \quad 1 \leqslant \operatorname{ch}(|x|) \leqslant 2 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \delta.$$

Поэтому имеют место следующие оценки:

$$\left|\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant 6MN^2\exp(\lambda t), \tag{4.8}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial x_i}\right| \leqslant MN2\delta\exp(\lambda t), \tag{4.9}$$

$$|c(x,t)v_0(x,t)| \leqslant 2M\exp(\lambda t), \tag{4.10}$$

$$-\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial t} = -\lambda\operatorname{ch}(|x|)\exp(\lambda t) \leqslant -\lambda\exp(\lambda t). \tag{4.11}$$

В силу (4.8)–(4.11) мы приходим к следующему неравенству:

$$Lv_0(x,t) \leqslant \left[6MN^2 + 2MN\delta + 2M - \lambda\right]\exp(\lambda t) \leqslant 0$$

для всех $(x,t) \in D \cap \{|x| \leqslant \delta\}$ при условии, что $\lambda > 0$ достаточно велико.

Рассмотрим теперь случай $|x| \geqslant \delta$. Тогда справедливы оценки

$$|\mathrm{sh}(|x|)| \leqslant e^{\delta}, \quad 1 \leqslant \mathrm{ch}(|x|) \leqslant e^{\delta}, \quad \frac{1}{|x|} \leqslant \frac{1}{\delta}.$$

С учетом этих неравенств приходим к следующему выражению:

$$Lv_0(x,t) \leqslant \left[e^{\delta}MN^2\left(1+\frac{2}{\delta}\right)+e^{\delta}MN+e^{\delta}M-\lambda\right]\exp(\lambda t) \leqslant 0$$

для всех $(x,t) \in D \cap \{|x| \geqslant \delta\}$ при условии, что $\lambda > 0$ достаточно велико. Итак, неравенство (4.7) доказано. ⊠

Шаг 2. Положим

$$m := \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)|, \quad D_{T,R} \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\Omega \cap B_R] \otimes (0,T), \tag{4.12}$$

где $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| < R\}$. Тогда функция

$$w_R(x,t) := u(x,t) - v_0(x,t)\frac{m}{\mathrm{ch}(R)} \tag{4.13}$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$w_R(x,t) \leqslant 0 \tag{4.14}$$

для всех

$$(x,t) \in \partial' D_{T,R} = \{\overline{\Omega} \cap \overline{B}_R, \ t = 0\} \cup \{\partial\Omega \cap \partial B_R, \ t \in (0,T)\}.$$

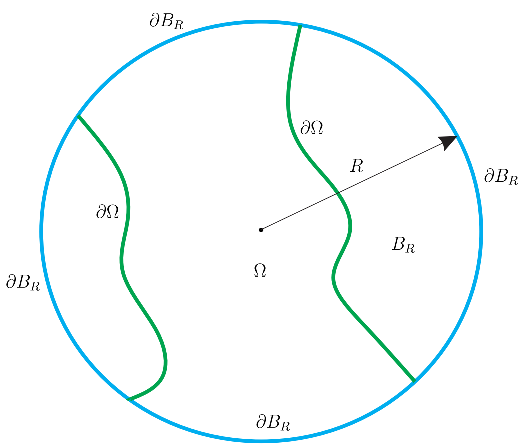

Рис. 7. Множество $\Omega \cap B_R$.

□ Действительно, в силу условия (4.5) $u(x,t) \leqslant 0$ на $\partial' D$ и поэтому $w_R(x,t) \leqslant 0$ на $\partial' D \cap B_R$, а при $x \in \partial B_R$ имеем

$$w_R(x,t)\Big|_{|x|=R} = \left(u(x,t) - me^{\lambda t}\right)\Big|_{|x|=R} \leqslant \left(u(x,t) - m\right)\Big|_{|x|=R} \leqslant 0. \quad \boxtimes$$

С другой стороны, из неравенств (4.4) и (4.7) имеем

$$Lw_R(x,t) \geqslant 0. \tag{4.15}$$

В силу ограниченности области $D_{T,R}$ выполнен результат теоремы 2

$$w_R(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_{T,R} \Rightarrow u(x,t) \leqslant v_0(x,t)\frac{m}{\operatorname{ch} R}.$$

Переходя к пределу при $R \to +\infty$ получим результат теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 6. Заметим, что в формулировке теорем 2 и 3 мы используем понятие ограниченного решения, а именно условие, что решение $u(x,t)$ ограничено в рассматриваемой цилиндрической области.

§ 5. Сильный принцип максимума

Доказательство основного утверждения этого параграфа — принципа максимума, мы будем проводить для произвольной ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Нам потребуются новые понятия.

Обозначения. Пусть $P_0 = (x_0, t_0)$ — любая точка из D. Обозначим через $S(P_0)$ множество всех точек $Q = \{(x,t)\}$ в D, таких, что их можно соединить с P_0 простой непрерывной кривой, лежащей в D, вдоль которой координата t не убывает от Q к P_0. Через $C(P_0)$ мы обозначим компоненту пересечения $D \cap \{t = t_0\}$, которая содержит P_0. Заметим, что $S(P_0) \supset C(P_0)$. Отметим, что может быть так, что $D \cap \cap \{t = t_0\} \notin S(P_0)$. Приведите сами пример!

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение этой лекции, называемое сильным принципом максимума.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Если* $Lu \geqslant 0$ $(Lu \leqslant 0)$ *в* D *и если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ *имеет в* D *положительный глобальный максимум* (*отрицательный глобальный минимум*), *который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, *то* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in S(P_0)$.

Доказательство теоремы. Докажем эту теорему в случае, если функция $u(x,t)$ имеет глобальный положительный максимум M в D. Для того чтобы доказать эту важную теорему нам нужно доказать ряд вспомогательных лемм.

Этап I. Докажем следующее утверждение:

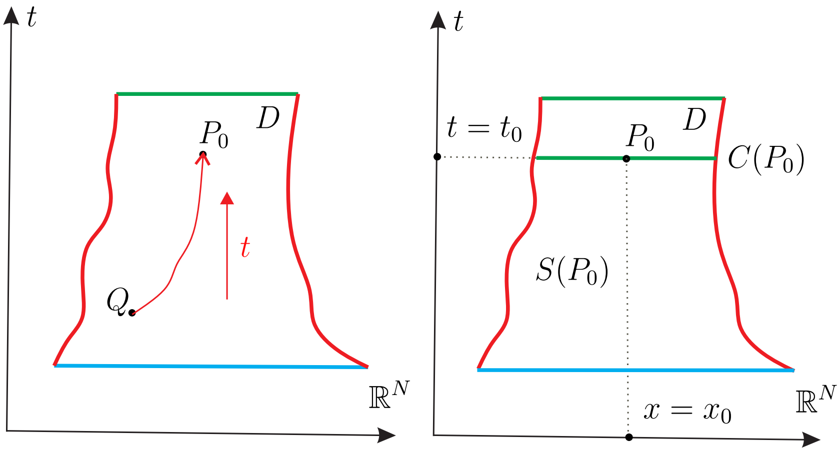

Рис. 8. Множества $S(P_0)$ и $C(P_0)$.

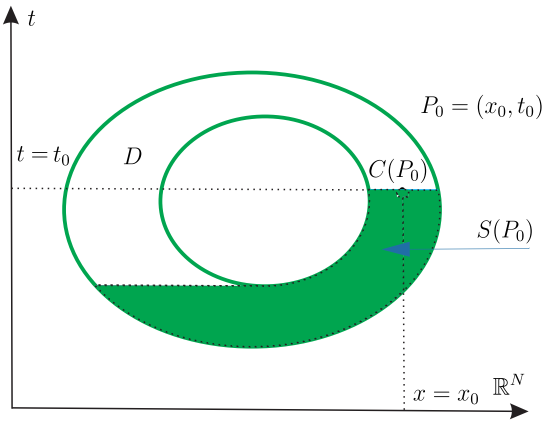

Рис. 9. Множества $S(P_0)$ и $C(P_0)$ в случае «гладкой» двусвязной области D.

Лемма 3. *Пусть* $Lu \geqslant 0$ *в* D, *и пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ *имеет* *положительный глобальный максимум* M *в точке* $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in D$. *Предположим, что* D *содержит замкнутый эллипсоид* E :

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (x_i - x_i^*)^2 + \lambda_0 (t - t^*)^2 \leqslant R^2, \quad \lambda_0 > 0, \quad \lambda_i > 0, \quad R > 0, \quad i = \overline{1, N}$$

и что $u(x,t) < M$ *во внутренних точках* $(x,t) \in E$ *и* $u(\overline{x}, \overline{t}) = M$ *в точке* $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ *на границе* ∂E *эллипсоида* E. *Тогда* $\overline{x} = x^*$, *где* $x^* = (x_1^*, \ldots, x_N^*)$.

Доказательство.

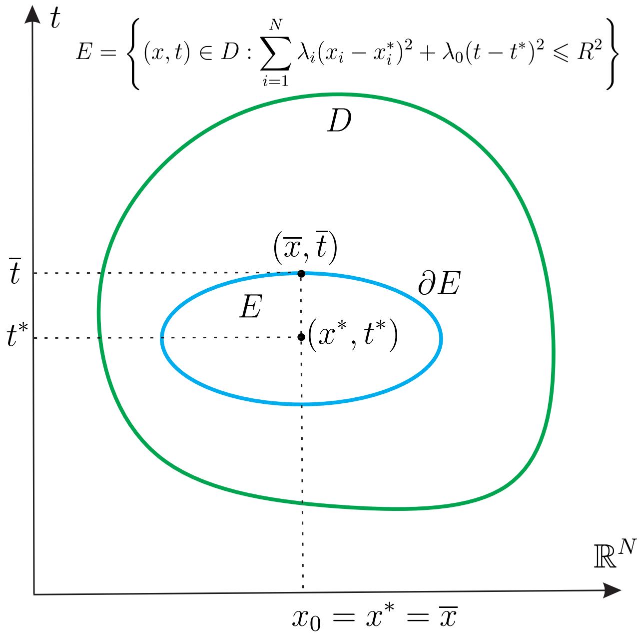

Рис. 10. Эллипсоид E в формулировке леммы 3.

Шаг 1. Без ограничения общности можно считать, что $\overline{P}=(\overline{x},\overline{t})$ — это единственная точка на ∂E, в которой $u(\overline{x},\overline{t})=M$, так как в противном случае [1)] мы можем взять меньший замкнутый эллипсоид e, лежащий в E и имеющий единственную общую точку $\overline{P}$ с ∂E (см. рисунок 18).

Шаг 2. Предположим, что $\overline{x}\neq x^*$, и пусть C — замкнутый $(N+1)$–мерный шар, содержащийся в D с центром в точке $\overline{P}=(\overline{x},\overline{t})$ и радиусом меньшим, чем $|\overline{x}-x^*|$. Тогда

$$|x-x^*|\geqslant\beta>0\quad\text{для всех}\quad(x,t)\in\overline{C}.\tag{5.1}$$

Граница шара C состоит из части $\partial C_1\subset E$, и части ∂C_2, лежащей вне эллипсоида E (см. рисунок 19). Очевидно, что для некоторого $\delta>0$ выполнено неравенство

$$u(x,t)<M-\delta\quad\text{при}\quad(x,t)\in\partial C_1,\tag{5.2}$$

поскольку по построению эллипсоида $E\subset D$ максимум M функции $u(x,t)$ достигается только в точке $\overline{P}=(\overline{x},\overline{t})\in\partial E$ (см. шаг 1).

Шаг 3. Введем следующую функцию:

[1)] Заметим, что $u(x,t)<M$ во всех внутренних точках эллипсоида E.

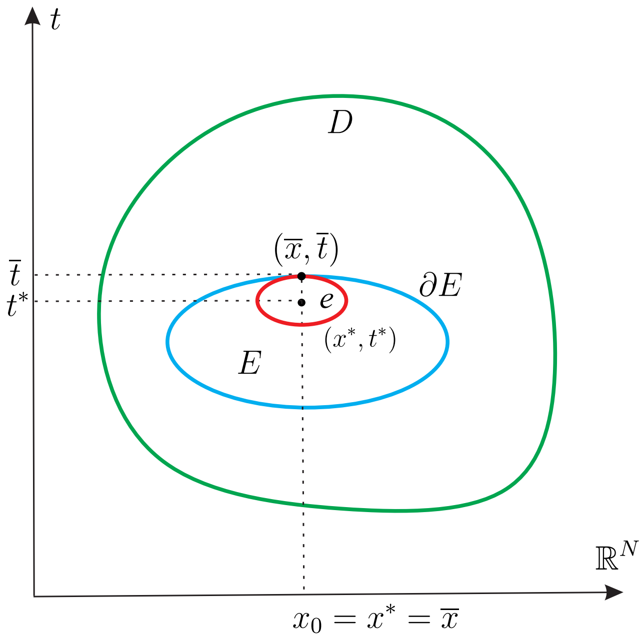

Рис. 11. Вложенный эллипсоид e.

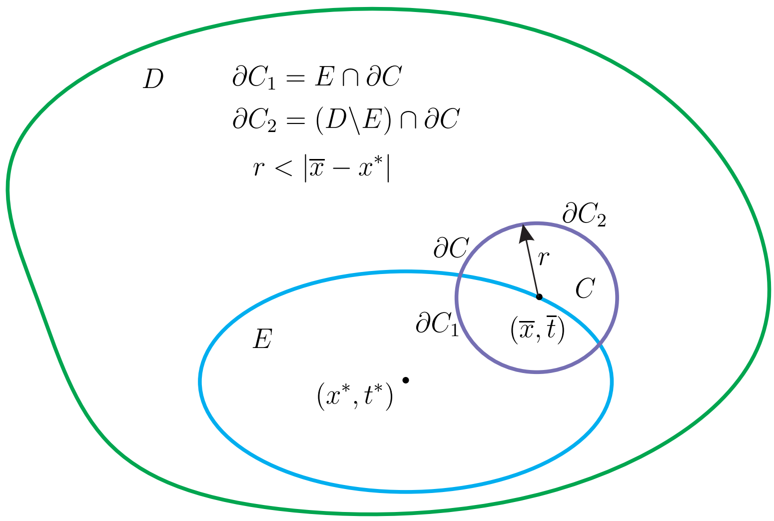

Рис. 12. Шар C.

$$h(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \exp\left\{-\alpha\left[\sum_{i=1}^{N} \lambda_i\,(x_i - x_i^*)^2 + \lambda_0\,(t - t^*)^2\right]\right\} -$$

$$- \exp\left[-\alpha R^2\right], \quad \alpha > 0. \qquad (5.3)$$

Заметим, что по построению функция $h = h(x,t) > 0$ внутри E, равна нулю на границе ∂E и меньше нуля при $(x,t) \in D \backslash E$, т. е. вне замкнутого эллипсоида E. Кроме того, заметим, что

$$\exp\left\{\alpha\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0\left(t-t^*\right)^2\right]\right\} Lh(x,t) =$$
$$= \left\{4\alpha^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j\left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) -\right.$$
$$\left. - 2\alpha\left[\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right) - \lambda_0\left(t - t^*\right)\right] + c(x,t)\right\} -$$
$$- c(x,t)\exp\left[-\alpha R^2\right]\exp\left\{\alpha\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0\left(t-t^*\right)^2\right]\right\}. \qquad (5.4)$$

Поскольку в шаре C выполнено неравенство (5.1), то *слагаемые в первых фигурных скобках в равенстве* (5.4) *будет больше нуля при достаточно большом* $\alpha > 0$.

□ Действительно, поскольку выполнено условие (A), то имеет место неравенство (2.4), из которого вытекает цепочка оценок снизу

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j\left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) \geqslant$$
$$\geqslant m\sum_{i=1}^{N}\lambda_i^2|x_j - x_j^*|^2 \geqslant m\lambda^2\sum_{i=1}^{N}|x_j - x_j^*|^2 =$$
$$= m\lambda^2|x - x^*|^2 \geqslant m\lambda^2\beta^2 =: d > 0, \quad \lambda := \min_{i=\overline{1,N}}\lambda_i > 0 \qquad (5.5)$$

для всех $(x,t) \in \overline{C} \subset D$ [1]. Кроме того, поскольку выполнено условие (B), то найдется такая постоянная $K_1 > 0$, что

$$\max_{(x,t)\in\overline{C}}|a_{ij}(x,t)| \leqslant K_1, \quad \max_{(x,t)\in\overline{C}}|b_i(x,t)| \leqslant K_1, \quad \max_{(x,t)\in\overline{C}}|c(x,t)| \leqslant K_1.$$

Поэтому имеет место следующая оценка:

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right) - \lambda_0\left(t-t^*\right)\right| \leqslant$$

[1] Очевидно, $\overline{C}$ компактное множество в $\mathbb{R}^{N+1}$.

$$\leqslant K_1 N\overline{\lambda} + K_1 N\overline{\lambda} \sup_{(x,t)\in\overline{C}} |x-x^*| +$$
$$+ \lambda_0 \sup_{(x,t)\in\overline{C}} |t-t^*| =: K_2 < +\infty, \quad \overline{\lambda} := \max_{i=\overline{1,N}} \lambda_i. \quad (5.6)$$

В силу неравенств (5.5) и (5.6) вытекает следующая оценка снизу:

$$4\alpha^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j \left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) -$$
$$- 2\alpha \left[\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\lambda_i \left(x_i - x_i^*\right) - \lambda_0 \left(t - t^*\right)\right] +$$
$$+ c(x,t) \geqslant 4\alpha^2 d - 2\alpha K_2 - K_1 > 0 \quad (5.7)$$

при достаточно большом $\alpha > 0$. ☒

Последний член больше или равен нуля, так как $c(x,t) \leqslant 0$. Итак,

$$Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad C \quad (5.8)$$

для достаточно большого $\alpha > 0$.

Шаг 4. Рассмотрим теперь в шаре C функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon h(x,t) \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \quad (5.9)$$

Если $\varepsilon > 0$ достаточно малое, то $v(x,t) < M$ на ∂C_1 в силу (5.2). На ∂C_2 функция $u(x,t) \leqslant M$ и $h(x,t) < 0$, поэтому $v(x,t) < M$. Таким образом,

$$v(x,t) < M \quad \text{на} \quad \partial C \quad (5.10)$$

при малом $\varepsilon > 0$. Кроме того,

$$h(\overline{P}) = 0 \Rightarrow v(\overline{P}) = u(\overline{P}) = M. \quad (5.11)$$

Отсюда заключаем, что $v(x,t) < M$ на границе шара C и принимает максимальное положительное значение M в центре шара $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$. При этом выполнено неравенство (5.8), в силу которого имеем

$$Lv(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad C.$$

Следовательно, мы пришли в противоречие со слабым принципом максимума (см. лемму 1). Значит, имеет место равенство $\overline{x} = x^*$.

Лемма доказана.

Этап II. Теперь мы докажем следующую лемму:

Лемма 4. *Если $Lu \geqslant 0$ в области D и если $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ имеет <u>положительный глобальный максимум</u> в D, который достигается в <u>точке</u> $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, то $u(P) = u(P_0)$ для всех $P \in C(P_0)$.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть утверждение леммы неверно. Тогда в $C(P_0)$ найдется точка $P_1 = (x_1, t_0)$, в которой $u(P_1) < u(P_0)$. Соединим P_1 с P_0 простой непрерывной кривой $\gamma \subset C(P_0)$. На γ существует точка $P^* = (x^*, t_0)$, в

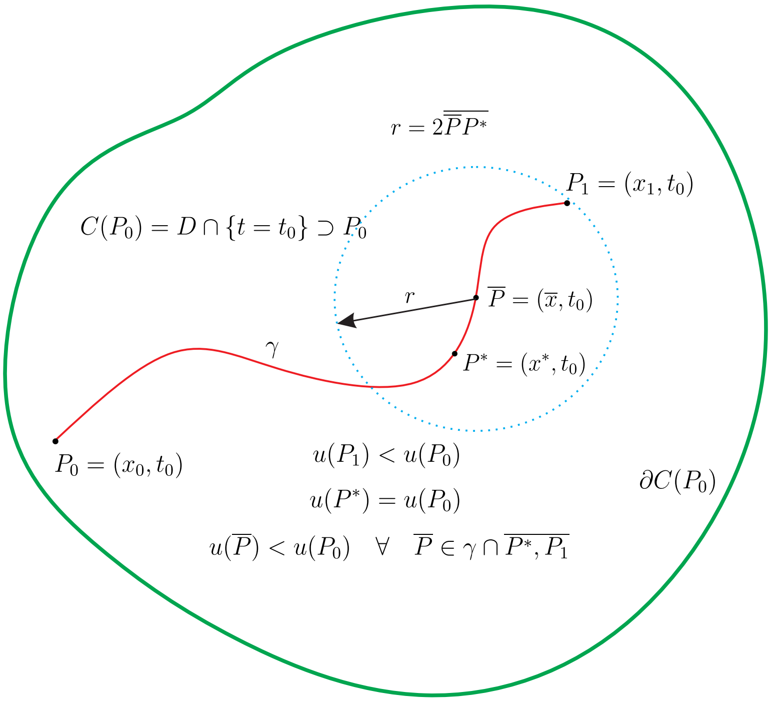

Рис. 13. Кривая $\gamma \in C(P_0)$.

которой $u(P^*) = u(P_0)$, и такая, что $u(\overline{P}) < u(P_0)$ для всех $\overline{P} = (\overline{x}, t)$, лежащих на γ между P_1 и P^*.

Возьмем точку $\overline{P}$ на γ между P_1 и P^* так [1]), чтобы расстояние $d(\overline{P}, \partial C(P_0))$ до границы $\partial C(P_0)$ удовлетворяло неравенству

$$d(\overline{P}, \partial C(P_0)) \geqslant 2\overline{\overline{P}P^*}. \tag{5.12}$$

Шаг 2. Поскольку $u(\overline{P}) < u(P^*) = u(P_0)$, существует достаточно малый отрезок σ_0, определяемый соотношениями

$$\overline{P} = (\overline{x}, t_0) \in \sigma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{x = \overline{x}, \quad t_0 - \varepsilon \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon\}, \tag{5.13}$$

для всех точек $P = (\overline{x}, t) \in \sigma_0$ которого

$$u(P) < u(P^*) = u(P_0). \tag{5.14}$$

Фиксируем это $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим семейство эллипсоидов $E_\lambda \subset D$:

$$E_\lambda := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ |x - \overline{x}|^2 + \lambda(t - t_0)^2 \leqslant \lambda\varepsilon^2\right\}. \tag{5.15}$$

[1]) Просто нужно взять точку $\overline{P}$ достаточно близкой к точке P^*.

Прежде всего заметим, что концы интервала σ_0 будут лежать на границе эллипсоида E_λ.

□ Действительно, положим $x = \overline{x}$ в уравнении эллипсоида E_λ и получим неравенство

$$|t - t_0| \leqslant \varepsilon \Rightarrow (x = \overline{x}, t) \in \sigma_0. \quad \boxtimes$$

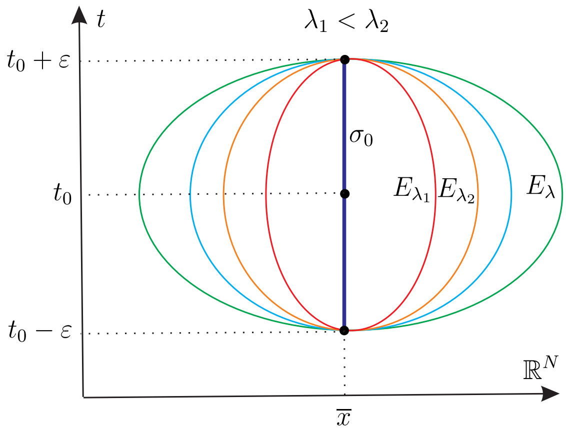

Рис. 14. Семейство E_λ и интервал σ_0.

Кроме того, нетрудно убедиться в том, что справедливо предельное свойство (см. рисунок 21)

$$E_\lambda \to \sigma_0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +0. \tag{5.16}$$

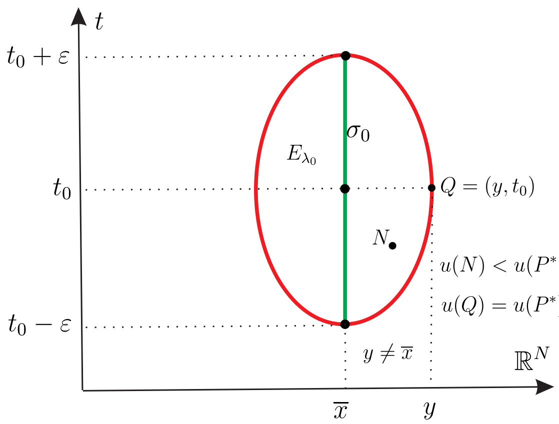

Рис. 15. Минимальный эллипсоид E_{λ_0}.

С другой стороны, при $t = t_0$ имеем

$$E_\lambda \cap \{t = t_0\} = \left\{(x, t_0) : \; x \in \mathbb{R}^N, \quad |x - \overline{x}| \leqslant \lambda\varepsilon^2\right\}.$$

Поэтому при возрастании $\lambda > 0$ пересечение $E_\lambda \cap \{t = t_0\}$ неограниченно возрастает.

Следовательно, в силу неравенства (5.14) существует такое минимальное $\lambda = \lambda_0 > 0$, что $u(x,t) < u(P^*) = u(P_0)$ внутри E_{λ_0} и $u(y, t_0) = u(P^*) = u(P_0)$ в некоторой точке $Q = (y, t_0) \in \partial E_{\lambda_0}$.

В силу (5.14) точка Q не может принадлежать интервалу σ_0 (см. рисунок 22), поскольку для всех $P \in \sigma_0$ имеем

$$u(P) < u(P^*) = u(P_0)$$

и поэтому $y \neq \overline{x}$, но это противоречит результату леммы 3

Лемма доказана.

Этап III. Докажем теперь следующее утверждение:

Лемма 5. *Пусть R — параллелепипед*

$$x_{0i} - a_i \leqslant x_i \leqslant x_{0i} + a_i, \quad t_0 - a_0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{5.17}$$

содержащийся в D, [1] *и пусть $Lu \geqslant 0$ в D. Если $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ имеет положительный глобальный максимум в R, который достигается в точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, где $x_0 = (x_{10}, ..., x_{N0})$, тогда $u(P) = u(P_0)$ для всех $P \in R$.*

Доказательство.

Шаг 1. Предположим, что лемма неверна. Тогда в параллелепипеде R должна найтись точка $Q \in R$, такая, что $u(Q) < u(P_0)$. Поскольку $u(x,t) < u(P_0)$ также и в некоторой окрестности Q, можно предполагать, что точка Q не лежит на гиперплоскости $t = t_0$. В противном случае просто нужно взять параллелепипед с верхним основанием на гиперплоскости $t = t_0$, но меньших размеров.

На отрезке γ_{Q,P_1} кривой γ, соединяющем Q с P_0 существует точка P_1, такая, что $u(P_1) = u(P_0)$ и

$$u(\overline{P}) < u(P_1) \quad \text{для всех} \quad \overline{P} \in \gamma_{Q,P_1}$$

Без ограничения общности, можно считать, что $P_1 = P_0$ и точка Q лежит на гиперплоскости $t = t_0 - a_0$, поскольку в противном случае можно взять параллелепипед, меньших размеров (см. рисунок 23).

Шаг 2. Обозначим через R_0 параллелепипед R без верхней грани $t = t_0$. Для каждой точки $Q' \in R_0$ компонента $C(Q')$ содержит некоторую точку из γ, но $u(x,t) < u(P_0)$ в точках $(x,t) \in \gamma$. Поэтому если в некоторой точке Q' будет выполнено равенство $u(Q') = u(P_0)$, то в

[1] Для этого достаточно взять числа $a_i > 0$ и $a_0 > 0$ достаточно малыми, поскольку точка P_0 внутренняя в D.

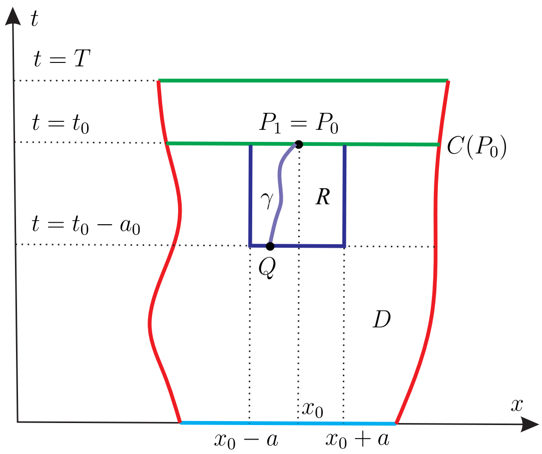

Рис. 16. Кривая γ и точка Q.

силу предыдущей леммы мы бы имели, что $u(Q') = u(P_0)$ для всех $Q' \in C(Q')$ и, значит, и в точках кривой γ.

Следовательно, в каждой точке $Q' \in R_0$ выполнено следующее неравенство:

$$u(Q') < u(P_0) \quad \text{для всех} \quad Q' \in R_0. \tag{5.18}$$

Шаг 3. Введем функцию

$$h(x,t) := t_0 - t - K|x - x_0|^2, \quad K > 0. \tag{5.19}$$

На параболоиде

$$M: \quad t_0 - t = K|x - x_0|^2$$

имеем $h(x,t) = 0$; выше параболоида M функция $h(x,t) < 0$, а ниже параболоида M имеем $h(x,t) > 0$. Кроме того, непосредственным вычислением получим, что

$$Lh(x,t) = -2K \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) - 2K \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)(x_i - x_{0i}) + \\ + c(x,t) \left[t_0 - t - K|x - x_0|^2 \right] + 1 > 0 \quad \text{в} \quad R, \tag{5.20}$$

если потребовать, чтобы $K > 0$ было мало настолько, что

$$4K \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) \leqslant 1 \quad \text{в} \quad R$$

и размеры параллелепипеда R достаточно малы. [1])

[1]) Тогда выражения $\left| t_0 - t - K|x - x_0|^2 \right|$ и $|x - x_0|$ тоже будут малы.

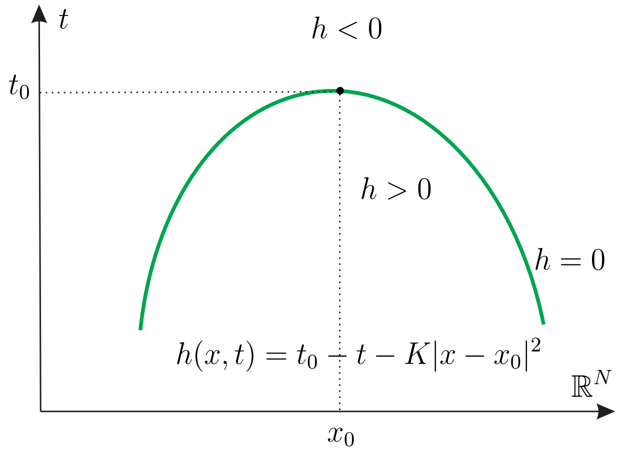

Рис. 17. Параболоид $h(x,t)=0$.

Шаг 4. Параболоид M разбивает параллелепипед R на две части. Обозначим часть, лежащую ниже параболоида M $(h>0)$ через $R^{'}$. Верхняя граница $B^{'}$ множества $R^{'}$ касается гиперплоскости $t=t_0$ только в точке $P_0=(x_0,t_0)$. Поэтому на остальной части $B^{''}$ границы

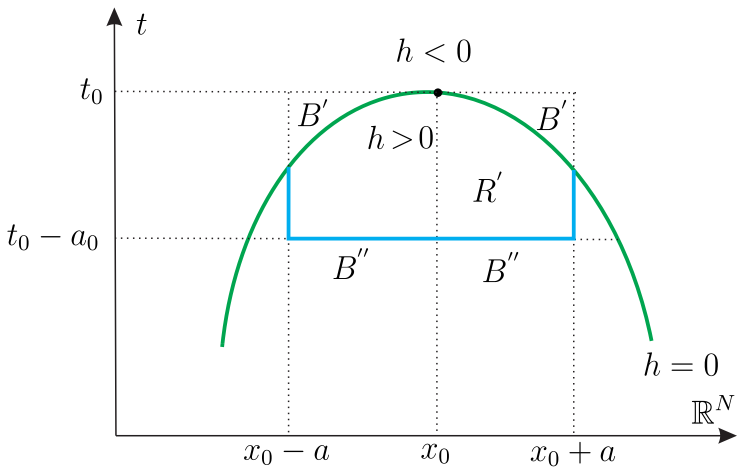

Рис. 18. Множество $R^{'}$.

$R^{'}$ получим

$$u(x,t)\leqslant u(P_0)-\delta \quad \text{для некоторого} \quad \delta>0.$$

Отсюда следует, что для функции

$$v(x,t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}u(x,t)+\varepsilon h(x,t) \tag{5.21}$$

имеем
$$v(x,t) < u(P_0) \quad \text{при} \quad (x,t) \in B'' \tag{5.22}$$
для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Далее во всех точках верхней границы B' за исключением точки P_0, имеем
$$v(x,t) = u(x,t) < u(P_0), \quad v(P_0) = u(P_0), \tag{5.23}$$
потому что на B' имеем $h(x,t) = 0$. Поскольку
$$Lv(x,t) = Lu(x,t) + \varepsilon Lh(x,t) > 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in R',$$
то в силу леммы 1 заключаем, что положительный максимум функции $v(x,t)$ достигается в точке P_0. Следовательно [1],
$$\frac{\partial v(P_0)}{\partial t} = D_t^- v(P_0) \geqslant 0, \quad \frac{\partial h(P_0)}{\partial t} = -1 < 0 \Rightarrow \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} > 0. \tag{5.24}$$
З а м е ч а н и е 7. Докажем неравенство
$$D_t^- v(P_0) \geqslant 0.$$
Действительно, поскольку функция $v(x,t)$ дифференцируема в окрестности точки P_0 и в этой точке у функции $v(x,t)$ строгий максимум, то при $t < t_0$ выполнено неравенство
$$\frac{v(x_0,t_0) - v(x_0,t)}{t_0 - t} > 0 \Rightarrow D_t^- v(P_0) \geqslant 0.$$

С другой стороны, из предположения, что $u(x,t)$ достигает положительного максимума в точке P_0 находим, что
$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_i} = 0, \quad c(P_0)u(P_0) \leqslant 0, \quad \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0)\frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0.$$
Следовательно,
$$0 \leqslant Lu(P_0) \leqslant -\frac{\partial u(P_0)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} \leqslant 0,$$
что противоречит неравенству (5.24).

Л е м м а д о к а з а н а.

Э т а п IV. Теперь мы можем доказать утверждение теоремы 4.

Шаг 1. Предположим, что
$$u(x,t) \not\equiv u(P_0) \quad \text{в} \quad S(P_0).$$
Тогда найдется такая точка $Q \in S(P_0)$, что $u(Q) < u(P_0)$. Соединим точки Q и P_0 простой непрерывной кривой γ, расположенной в $S(P_0)$

[1] Неравенство $\partial v(P_0)/\partial t \geqslant 0$ выполнено, поскольку производная берется по времени в сторону возрастания времени, а в точке P_0 у функции $v(x,t)$ максимум.

так, чтобы t–координата не убывала от точки Q к точке P_0 (такая кривая существует согласно определению $S(P_0)$). На кривой γ существует точка P_1, в которой $u(P_1) = u(P_0)$ и

$$u(\overline{P}) < u(P_1) \quad \text{для всех точек} \quad \overline{P} \in \gamma_{Q,P_1},$$

где мы обозначили через γ_{Q,P_1} часть кривой γ между Q и P_1.

Шаг 2. Теперь построим параллелепипед

$$x_{1i} - a \leqslant x_i \leqslant x_{1i} + a, \quad t_1 - a < t \leqslant t_1, \quad i = \overline{1, N},$$

где $P_1 = (x_{11}, ..., x_{1N}, t_1)$ и постоянная $a > 0$ настолько мала, что параллелепипед лежит в D. Из леммы 5 вытекает, что $u \equiv u(P_1)$ в этом параллелепипеде, а поэтому и на части кривой γ_{Q,P_1}, попадающей в параллелепипед. Пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Справедливо следующее важное усиление этой теоремы:

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Если* $Lu \geqslant 0$ $(Lu \leqslant 0)$ *в* $D \cup \gamma(D)$ *и если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D))$ *имеет в* $\overline{D}$ *положительный глобальный максимум* (*отрицательный глобальный минимум*), *который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma(D)$, *то* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in S(P_0)$, *где* $S(P_0)$ *определяется точно также как и ранее, но относительно* $D \cup \gamma(D)$.

Доказательство.

Утверждение теоремы непосредственно следует из утверждения леммы 5 с учетом определения

$$D_t^- u(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \gamma(D).$$

Теорема доказана.

Следствия из принципа максимума. Можно доказать, что для любой точки $P_0 \in D \cup \gamma(D)$ имеем $\overline{S(P_0)} \cap \partial' D \neq \varnothing$. Справедливы следующие утверждения:

Следствие 1. *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^N$ *— ограниченная область, справедливы свойства* (A), (B) *и* (C) *и выполнено равенство* $Lu(x,t) = 0$ *при* $(x,t) \in D \cup \gamma(D)$, *тогда для решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D)) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *справедлива следующая оценка*:

$$\max_{(x,t) \in \overline{D}} |u(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t) \in \partial' D} |u(x,t)| \tag{5.25}$$

Доказательство.

Шаг 1. Введем следующее обозначение:

$$M := \sup_{(x,t) \in \partial' D} |u(x,t)|. \tag{5.26}$$

Тогда для новой функции

$$v(x,t) := u(x,t) - M$$

имеем
$$Lv(x,t) = -c(x,t)M \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D,$$
$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D.$$
Если в некоторой точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma(D)$ достигается положительный максимум
$$v(P_0) = M > 0,$$
то это в сильного принципа максимума теоремы 5 означает, что
$$v(x,t) = M \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in S(P_0).$$
Поскольку $\overline{S(P_0)} \cap \partial^{'} D \neq \varnothing$ и $v(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, мы приходим к противоречию, поскольку $v(x,t) \leqslant 0$ на $\partial^{'} D$. Полученное противоречие означает, что
$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \cup \gamma(D) \Rightarrow u(x,t) \leqslant M \quad \text{в} \quad D \cup \gamma(D).$$

Шаг 2. Поскольку функция $-u(x,t)$ является решением уравнения $L(-u) = 0$, то применяя результат шага 1 для функции $-u(x,t)$ мы получим оценку
$$-u(x,t) \leqslant M \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup \partial^{'} D.$$

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* $c(x,t) \leqslant c_0$ *при* $c_0 > 0$. *Если* $Lu(x,t) = 0$ *в* $D \cup \gamma(D)$, *то для решения* $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D)) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *выполнено неравенство*
$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| \leqslant e^{c_0 T} \sup_{(x,t)\in\partial^{'} D} |u(x,t)|. \tag{5.27}$$

Доказательство.

Достаточно применить результат следствия 1 к функции
$$v(x,t) = u(x,t) e^{-c_0 t} \Rightarrow (L - c_0) v(x,t) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \max_{(x,t)\in\overline{D}} |v(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t)\in\partial^{'} D} |v(x,t)| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{-c_0 T} \max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t)\in\partial^{'} D} |u(x,t)|$$
и получить неравенство.

Следствие доказано.

Замечание 8. Важно отметить, что утверждение слабого принципа максимума относится не к локальному максимуму или минимуму в области D, а к глобальному максимуму или минимуму.

Замечание 9. Заметим, что если в операторе L коэффициент $c(x,t) = 0$, то слова положительный максимум и отрицательный минимум можно заменить на максимум и минимум соответственно.

Замечание 10. В утверждении теоремы 5 участвуют только точки $D \cup \gamma(D)$. А для точек множества $\partial\gamma(D)$ (граница $\gamma(D)$) результат теоремы может не иметь место. Рассмотрим следующий пример [7]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{в} \quad (x,t) \in (0,L) \otimes (0,T).$$

Рассмотрим его решение $u(x,t) = x^2 + 2t$, которое, очевидно, достигает строго максимума в точке $(L,T) \in \partial B_T$. Однако, решение не является константой в рассматриваемой цилиндрической области D.

Обратно параболическое уравнение. Пусть $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$. Определим $S_p(P_0)$ как такое множество точек $Q \in \in D \cup \gamma_0(D)$, которые можно соединить некоторой простой непрерывной кривой $\gamma_{Q,P_0} \in D \cup \gamma_0(D)$ с точкой P_0 таким образом, чтобы вдоль нее координата t не возрастала. Для обратно параболического оператора

$$L_p u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u + \frac{\partial u}{\partial t}$$

справедлив сильный принцип максимума.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия (A), (B) и (C). Если $L_p u \geqslant 0$ $(L_p u \leqslant 0)$ в $D \cup \gamma_0(D)$ и если $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$ имеет в $\overline{D}$ положительный глобальный максимум (отрицательный глобальный минимум), который достигается в точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma_0(D)$, то $u(P) = u(P_0)$ для всех $P \in S_p(P_0)$.*

Доказательство.

Утверждение теоремы непосредственно следует из утверждения леммы 5 с учетом определения

$$D_t^+ u(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \gamma_0(D).$$

Теорема доказана.

Задача 1. Изобразить множества $C(P_1)$, $C(P_2)$ и $C(P_3)$ (см. рисунок 26).

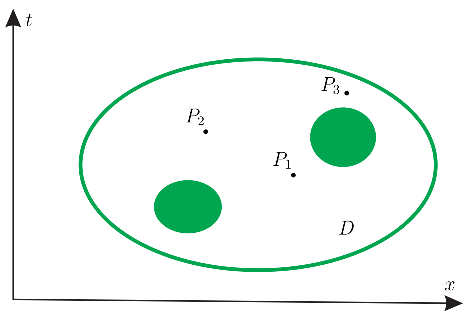

Рис. 19. К задаче 1.

Р е ш е н и е. На рисунке 27 изображено множество $C(P_1)$.

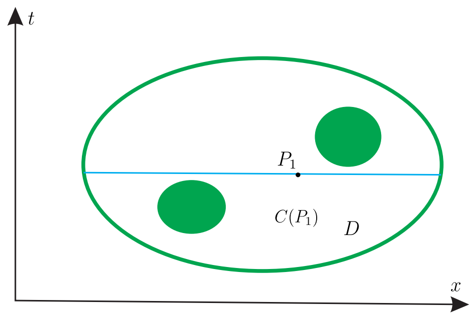

Рис. 20. Множество $C(P_1)$.

На рисунке 28 изображено множество $C(P_2)$.

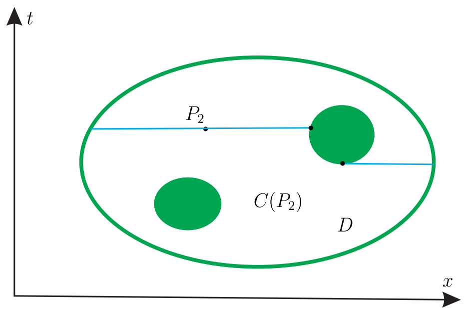

Рис. 21. Множество $C(P_2)$.

На рисунке 29 изображено множество $C(P_3)$.

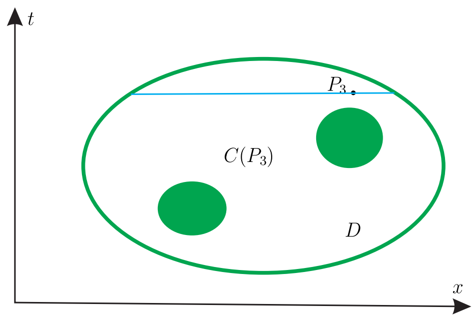

Рис. 22. Множество $C(P_3)$.

§ 6. Первая краевая задача

Напомним ряд обозначений, используемых в этом параграфе. Пусть D — ограниченная $(N+1)$–мерная область в $\mathbb{R}^{N+1}$, и пусть $(x,t) = (x_1,...,x_N,t)$ — переменная точка в $\mathbb{R}^{N+1}$. Предположим, что граница ∂D области D состоит из связной нижней крышки B, лежащей на гиперплоскости $t=0$, из связной верхней крышки B_T, лежащей на гиперплоскости $t=T>0$, и боковой границы $S := \partial D \backslash (B \cup B_T)$ (возможно, не связной), лежащей в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$. Напомним, что множество $\partial' D := S \cup B$ называется нормальной или параболической границей области D.

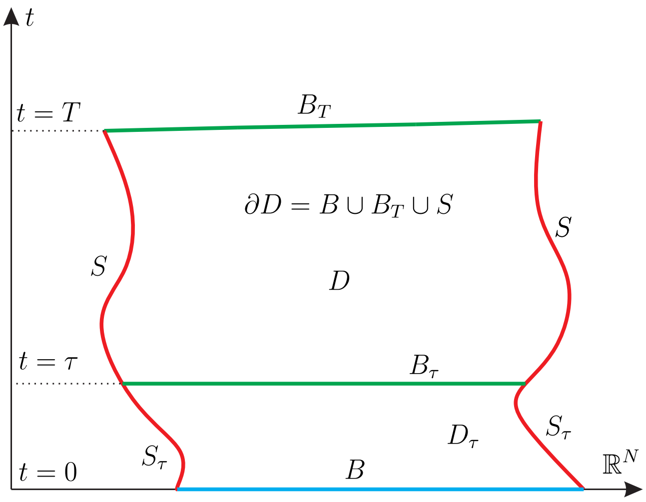

Рис. 23. Область D и ее подмножества.

Введем обозначения

$$D_\tau := D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad B_\tau := D \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau := S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}.$$

Допустим, что для каждого τ, $0 < \tau < T$, B_τ — область (связное открытое множество). В частности, на рисунке 30 область D удовлетворяет этому условию.

Напомним постановку первой краевой задачи.

Первая краевая задача. *Первая краевая задача состоит в нахождении классического решения $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$ уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \in \mathbb{C}(D \cup B_T) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{6.1}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x) \in \mathbb{C}(\overline{B}) \quad \text{на} \quad \overline{B} \tag{6.2}$$

и граничным условиям

$$u(x,t) = g(x,t) \in \mathbb{C}(S) \quad \text{\textit{на}} \quad S, \tag{6.3}$$

где f, φ, g — это заданные функции и L — параболический оператор.

Замечание 11. Условия (6.2) и (6.3) можно объединить в одно

$$u(x,t) = h(x,t) \quad \text{на} \quad B \cup S, \quad h(x,t) \in \mathbb{C}(B \cup S). \tag{6.4}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 7. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (A) *и* (B). *Тогда может существовать не более одного решения первой краевой задачи.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть сначала $c(x,t) \leqslant 0$ и $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ — это два решения первой краевой задачи (6.1)—(6.3). Тогда для функции

$$v(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

мы получим соответствующую однородную задачу. Предположим, что $v(x,t) \not\equiv 0$. Тогда можно без ограничения общности предположить, что

$$M := \max_{(x,t) \in \overline{D}} v(x,t) > 0.$$

Пусть $P_0 = (x_0, t_0) \in \overline{D}$ — точка в которой достигается положительный максимум. Ясно, что

$$v(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D = S \cup B \ ^{1)}. \tag{6.5}$$

Поэтому положительный максимум может достигаться лишь только на $D \cup B_T$. Однако, если $(x_0, t_0) \in D \cup B_T$, то согласно сильному принципу максимума теоремы 5 приходим к выводу о том, что

$$v(x,t) = M \quad \text{при} \quad (x,t) \in S(P_0).$$

Осталось воспользоваться тем, что $v(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ и тем, что $\overline{B} \subset \overline{S}(P_0)$. Следовательно,

$$v(x,0) = M \quad \text{при} \quad x \in \overline{B},$$

что противоречит свойству (6.5).

Шаг 2. Пусть теперь функция $c(x,t)$ может быть положительной в области D. Положим по определению

$$c_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(x,t) \in D} c(x,t) > 0.$$

Тогда перейдем к новой функции $w(x,t)$ следующего вида:

$$w(x,t) = e^{-c_0 t} u(x,t).$$

[1] Напомним, что $S := \partial D \setminus (B_T \cup B)$.

При этом уравнение $Lu(x,t) = 0$ перейдет в уравнение $(L - c_0)w(x,t) = 0$, в котором уже новый коэффициент $c(x,t) - c_0 \leqslant 0$. Далее рассуждаем как на шаге 1.

Теорема доказана.

Пример неединственности. [17] Заметим, что требование ограниченности коэффициентов параболического оператора L является существенным для применения принципа максимума с целью доказательства единственности решения первой краевой задачи. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{1}{t}u_{xx} + \frac{2}{t}u - u_t = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x \in (0,\pi), \tag{6.6}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{6.7}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0. \tag{6.8}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$u(x,t) = at\sin x \quad \text{для любой постоянной} \quad a \in \mathbb{R}^1$$

является решением однородной первой краевой задачи (6.6)–(6.8).

Нелинейный параболический оператор. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$Lu(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} F\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{6.9}$$

где $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ — это нелинейная функция своих аргументов.

Определение 4. *Нелинейный оператор L, определенный формулой* (6.9), *называется параболическим в точке $(x_0,t_0) \in D$, если для любых $p, p_1, ..., p_N, p_{11}, ..., p_{NN}$ матрица*

$$\left(\frac{\partial F(x_0,t_0,p,p_i,p_{ij})}{\partial p_{ij}}\right) \tag{6.10}$$

является положительно определенной.

Заметим, что если функция $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ является непрерывно дифференцируемой по переменным (p,p_i,p_{ij}), то справедлива формула Адамара среднего значения

$$F(x,t,u,u_i,u_{ij}) - F(x,t,v,v_i,v_{ij}) = \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(u_{ij} - v_{ij}) + \sum_{i=1}^{N} b_i(u_i - v_i) + c(u - v), \tag{6.11}$$

где

$$(a_{ij}, b_i, c) =$$

$$= \int_0^1 \left(F_{p_{ij}}, F_{p_i}, F_p\right)(x, t, su + (1-s)v, su_i + (1-s)v_i, su_{ij} + (1-s)v_{ij})\, ds. \tag{6.12}$$

Воспользовавшись формулой (6.11) мы можем распространить результат теоремы 7 на нелинейный случай, что будет сделано ниже.

Задача 2. Сформулировать корректную (имеющую единственное решение) первую краевую задачу для обратно параболического уравнения в ограниченной области D.

Указание. Внимательно изучите сильный принцип максимума теоремы 6.

§ 7. Положительные решения задачи Коши

В этом параграфе мы будем использовать следующие обозначения:

$$\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0, T], \quad \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0, T].$$

Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\Omega_0) \cap \mathbb{C}(\Omega)$.

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 6. *Пусть оператор L удовлетворяет предположениям* (A) *и* (B) *в Ω_0, и пусть $c(x,t)$ ограничено сверху. Если $Lu(x,t) \leqslant 0$ в Ω_0, $u(x,0) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^N$ и равномерно по $t \in [0,T]$ существует*

$$\liminf_{|x| \to +\infty} u(x,t) \geqslant 0,$$

то $u(x,t) \geqslant 0$ в Ω.

Доказательство.

Шаг 1. Можно считать, что $c(x,t) \leqslant 0$, в противном случае мы бы сделали преобразование $v = ue^{-\gamma t}$ при $\gamma \geqslant c(x,t)$ и получили уравнение для новой функции $v(x,t)$

$$[L - \gamma I]\, v(x,t) = 0.$$

Далее для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$u(x,t) + \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

а также при достаточно большом $R > 0$

$$u(x,t) + \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad |x| = R, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

причем

$$L(u(x,t) + \varepsilon) = Lu(x,t) + c(x,t)\varepsilon \leqslant 0 \Rightarrow u(x,t) + \varepsilon > 0,$$

если $|x| \leqslant R$ и $t \in [0,T]$ в силу принципа максимума (см. теорему 2).

Шаг 2. Устремляя $\varepsilon \to +0$ мы получим утверждение этой леммы.

Лемма доказана.

Сделаем следующие предположения относительно коэффициентов параболического оператора L:

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(1+|x|), \quad |c(x,t)| \leqslant M(1+|x|^2) \quad (7.1)$$

при $(x,t) \in \Omega_0$ и $i,j = \overline{1,N}$. Справедлива следующая важная теорема:
Теорема 8. *Пусть L — параболический оператор с коэффициентами, непрерывными в Ω_0 и удовлетворяющими условиям (7.1). Предположим, что $Lu(x,t) \leqslant 0$ в Ω_0 и*

$$u(x,t) \geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \Omega \quad (7.2)$$

для некоторых положительных постоянных[1] *B и β. Если $u(x,0) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^N$, то $u(x,t) \geqslant 0$ в Ω.*

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим функцию

$$H(x,t) = \exp\left[\frac{k|x|^2}{1-\mu t} + \nu t\right], \quad t \in [0, 1/(2\mu)], \quad (7.3)$$

удовлетворяющую равенству

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} = \frac{4k^2}{(1-\mu t)^2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)x_i x_j + \frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) + \\ + \frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)x_i + c(x,t) - \frac{\mu k|x|^2}{(1-\mu t)^2} - \nu. \quad (7.4)$$

С помощью оценок (7.1) можно получить следующую оценку:

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} \leqslant \Bigl(16k^2N^2M + 8kNM + M - \mu k\Bigr)|x|^2 + (4kNM + M - \nu). \quad (7.5)$$

□ Действительно, с одной стороны, в силу условий (7.1) при $t = 1/(2\mu)$ справедливы следующие неравенства:

$$\frac{4k^2}{(1-\mu t)^2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)x_i x_j \leqslant 16k^2MN^2|x|^2,$$

$$\frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) \leqslant 4kNM,$$

$$\frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)x_i \leqslant 4kNM(|x|+|x|^2) \leqslant 4kNM + 8kNM|x|^2,$$

[1] Здесь мы снова сталкиваемся с необходимостью рассматривать решения в классе растущих функций А. Н. Тихонова.

С другой стороны,

$$-\frac{\mu k|x|^2}{(1-\mu t)^2} \leqslant -\mu k|x|^2, \quad c(x,t) \leqslant M|x|^2 + M.$$

Из этих неравенств получим неравенство (7.5). ⊠

Таким образом, для любого $k > 0$ найдутся такие достаточно большие постоянные $\mu > 0$ и $\nu > 0$, что будет выполнено неравенство

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} \leqslant 0. \tag{7.6}$$

Шаг 2. Рассмотрим теперь функцию $v(x,t)$, определенную равенством

$$u(x,t) = H(x,t)v(x,t),$$

где $H(x,t)$ — это функция (7.3) с фиксированными $k > \beta$ и с $\mu > 0$ и $\nu > 0$, при которых выполняется неравенство (7.6) для $0 \leqslant t \leqslant 1/(2\mu)$. Заметим, что выполнены следующие неравенства:

$$v(x,t) \geqslant -B\frac{\exp\left\{\beta|x|^2\right\}}{H(x,t)} \geqslant -B\exp\left[-(k-\beta)|x|^2\right]e^{-\nu t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \liminf_{|x|\to+\infty} v(x,t) \geqslant 0$$

равномерно по $t \in [0, 1/(2\mu)]$.

Шаг 3. Функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{L}v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N}\overline{b}_i\frac{\partial v}{\partial x_i} + \overline{c}v - \frac{\partial v}{\partial t} = \overline{f},$$

где

$$\overline{f} = \frac{Lu(x,t)}{H(x,t)} \leqslant 0, \quad \overline{b}_i = b_i + 2\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad \overline{c} = \frac{LH}{H} \leqslant 0.$$

При помощи леммы 6 мы приходим к выводу о том, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0, 1/(2\mu)].$$

Шаг 4. Далее повторяем рассуждения из шагов 1–3 но для замкнутой области $\mathbb{R}^N \otimes [1/(2\mu), 1/\mu]$ с функцией

$$H(x,t) = \exp\left[\frac{k|x|^2}{2-\mu t} + \nu t\right].$$

Далее по индукции.

Теорема доказана.

Замечание 12. Отметим, что доказанная теорема иногда носит название *теорема Фрагмена–Линделёфа*.

Из доказанной теоремы 8 непосредственно вытекает, что справедлива следующая теорема:
Теорема 9. *Пусть L — это параболический оператор с непрерывными в $\mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ коэффициенами и выполняются условия* (7.1). *Тогда существует не более одного решения задачи Коши*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \tag{7.7}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^N, \tag{7.8}$$

удовлетворяющего условию роста А. Н. Тихонова

$$|u(x,t)| \leqslant B \exp\left[\beta |x|^2\right] \tag{7.9}$$

при некоторых положительных константах B и β.

Доказательство.

Пусть $f(x,t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$. Из условия (7.9) вытекает, что

$$u(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta |x|^2\right] \quad \text{либо} \quad -u(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta |x|^2\right].$$

в первом случае из теоремы 8 получим, что $u(x,t) \geqslant 0$, а во втором случае получим, что $-u(x,t) \geqslant 0$. Итак, $u(x,t) \equiv 0$.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема Виддера. [4] Отметим, что имеет место следующий важный результат: *любая неотрицательная функция, непрерывная в $\mathbb{R}^1 \otimes [0,+\infty)$, равная нулю при $t = 0$ и удовлетворяющая уравнению теплопроводности*

$$u_{xx} - u_t = 0 \quad \textit{в} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^1 \otimes [0,+\infty),$$

равна нулю тождественно.

С другой стороны, А. Н. Тихонов предложил следующий пример:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!} x^{2k}, \quad g(t) = \exp(-t^2) \quad t > 0, \quad g(0) = 0, \tag{7.10}$$

который показывает, что условие знакоположительности существенно. Кроме того, ясно, что функция (7.10) не удовлетворяет условию роста А. Н. Тихонова.

Пример неединственности. [17] Заметим, что во всех теоремах единственности мы требовали, чтобы функция $u(x,t)$ была непрерывна по совокупности переменных (x,t) вплоть до границы ∂D области D. Например, нельзя потребовать, чтобы функция была непрерывна по t для каждого x. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \tag{7.11}$$

$$\lim_{t \to +0} u(x,t) = 0 \quad \text{для каждого фиксированного} \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{7.12}$$

Решение этой задачи в классе А. Н. Тихонова имеет следующий явный вид:

$$u(x,t) = \frac{x}{t^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right]. \tag{7.13}$$

Отметим, что построенное решение является неограниченным в любой окрестности точки $(0,0)$. Действительно, запишем функцию (7.13) в следующем виде:

$$u(x,t) = \frac{2}{t}\frac{x}{2\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right].$$

Будем стремить точку (x,t) к точке $(0,0)$ по параболе

$$x = a2\sqrt{t} \quad \text{при} \quad t \to +0, \quad a > 0,$$

тогда

$$u(x(t),t) = \frac{2}{t} a e^{-a^2} \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

Задача 3. Пусть L — параболический в $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T)$ оператор с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими (7.1). Предположим, кроме того, что $c(x,t) \geqslant 0$ и

$$u(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$$

при некоторых положительных $B > 0$, $\beta > 0$, и

$$Lu(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega_0.$$

Доказать, что из условия

$$u(x,0) \geqslant M > 0 \Rightarrow u(x,t) \geqslant M \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - M.$$

Поскольку $c(x,t) \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) - Mc(x,t) \leqslant 0.$$

Кроме того,

$$v(x,t) \geqslant -M - B\exp\left[\beta|x|^2\right] \geqslant -(M+B)\exp\left[\beta|x|^2\right], \quad v(x,0) \geqslant 0.$$

Следовательно, из теоремы 8, примененный к функции $v(x,t)$ мы получим, что

$$v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow u(x,t) \geqslant M \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Задача 4. [12] Пусть L — это равномерно параболический оператор с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими условиям (7.1). Пусть, кроме того,

$$c(x,t) \geqslant \alpha|x|^2 + \gamma, \quad \alpha > 0, \tag{7.14}$$

Предположим, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию роста

$$u(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$$

при некоторых положительных $B > 0$, $\beta > 0$. Предположим, что

$$Lu(x,t) \leqslant 0, \quad u(x,0) \geqslant M_1 > 0.$$

Доказать, что выполнено неравенство

$$u(x,t) \geqslant M_1 \exp\left[\lambda|x|^2 t + \nu t\right], \quad \lambda > 0.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим [1] следующую функцию:

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - M_1 \exp\left[\lambda|x|^2 t + \nu t\right].$$

Справедливы следующие вычисления:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = 2\lambda x_i t \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = \left(\lambda|x|^2 + \nu\right) \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = \left(2\lambda t \delta_{ij} + 4\lambda^2 t^2 x_i x_j\right) \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right).$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} Lv(x,t) = Lu(x,t) - M_1 L\left(\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right)\right) \leqslant \\ \leqslant -M_1 \Bigg(4\lambda^2 t^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} x_i x_j a_{ij} + 2\lambda t \sum_{i=1}^{N} a_{ii} + \\ + 2\lambda t \sum_{i=1}^{N} x_i b_i + c - (\lambda|x|^2 + \nu)\Bigg) \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right). \end{aligned}$$

Заметим, что в силу равномерной параболичности оператора L вытекают неравенства

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} x_i x_j a_{ij} \geqslant m|x|^2, \quad a_{ii} \geqslant m$$

с некоторой постоянной $m = m(D) > 0$. Кроме того, в силу условий (7.1) и (7.14) справедлива следующая цепочка неравенств:

---

[1] Переводчиками в этом месте в книге [12] допущена опечатка в выборе вспомогательной функции.

$$Lv(x,t) \leqslant -M_1\Bigg(4\lambda^2 t^2 m|x|^2 + 2\lambda t N m -$$
$$- 2\lambda t M|x|(1+|x|) + (\alpha-\lambda)|x|^2 + \gamma - \nu\Bigg) \leqslant 0.$$

при $t \in [0,T]$ и при достаточно больших $\alpha > \lambda$, $\gamma > \nu$. Теперь заметим, что

$$v(x,t) \geqslant -B\exp\left(\beta|x|^2\right) - M_1\exp\left(\lambda|x|^2 T + \nu T\right) \geqslant$$
$$\geqslant -B_1(T)\exp\left(\beta_1(T)|x|^2\right)$$

при некоторых $B_1 > 0$ и $\beta_1 > 0$. Кроме того,

$$v(x,0) \geqslant 0.$$

В силу теоремы 8 мы приходим к утверждению задачи.

Задача 5. [12] Пусть L — это параболический в $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ оператор с непрерывными коэффициентами и для некоторой постоянной $M > 0$ выполнены неравенства

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M(|x|^2+1), \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(|x|+1), \quad c(x,t) \leqslant M. \tag{7.15}$$

Доказать, что если

$$Lu(x,t) \leqslant 0, \quad u(x,t) \geqslant -A(|x|^q+1) \tag{7.16}$$

при $(x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ для некоторых положительных постоянных A и q, то из условия

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{7.17}$$

вытекает неравенство

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]. \tag{7.18}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].) Рассмотрим вспомогательную функцию

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2A}{r_0^{2p-q}}(|x|^2+Kt)^p e^{\alpha t}, \quad 2p > q. \tag{7.19}$$

Выберем постоянные $K > 0$ и $\alpha > 0$ таким образом, чтобы для всех $r_0 > 0$ величина $Lw(x,t)$ была отрицательной. Действительно,

$$a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{4Ap}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\left[\frac{2x_i x_j}{|x|^2+Kt} + \delta_{ij}\right] a_{ij}(x,t),$$
$$b_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{4Ap}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} x_i b_i(x,t),$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{2A}{r_0^{2p-q}} \left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} \left[pK + \alpha \left(|x|^2 + Kt\right)\right].$$

Следовательно,

$$Lw(x,t) = \frac{2m}{r_0^{2p-q}} \left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} \Bigg[4p \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij} \frac{x_i x_j}{|x|^2 + Kt} + 2p \sum_{i=1}^{N} a_{ii} + \\ + 2p \sum_{i=1}^{N} x_i b_i + c\left(|x|^2 + Kt\right) - pK - \alpha\left(|x|^2 + Kt\right)\Bigg].$$

Рассмотрим два случая: $|x| \geqslant 1$ и $|x| < 1$. В первом случае с учетом неравенств

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M(1 + |x|^2) \leqslant 2M|x|^2, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(1 + |x|) \leqslant 2M|x|$$

получим следующие оценки:

$$4p \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij} \frac{x_i x_j}{|x|^2 + Kt} \leqslant 8pMN^2|x|^2,$$

$$2p \sum_{i=1}^{N} a_{ii} \leqslant 4pNM|x|^2, \quad 2p \sum_{i=1}^{N} x_i b_i \leqslant 4pNM|x|^2,$$

из которых вытекает неравенство

$$Lw(x,t) \leqslant \frac{2A}{r_0^{2p-q}} \left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} \times \\ \times \left\{\left[8pMN^2 + 8pNM + M - \alpha\right]|x|^2 - pK + K(M-\alpha)t\right\} < 0, \tag{7.20}$$

если

$$\alpha > M\left(8pN^2 + 8pN + 1\right). \tag{7.21}$$

Во втором случае заметим, что

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant 2M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant 2M, \quad c(x,t) \leqslant M. \tag{7.22}$$

Поэтому при $|x| < 1$ справедлива оценка

$$Lw(x,t) = \frac{2A}{r_0^{2p-q}} \left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} \times \\ \times \left[8pMN^2 + 8pNM + M - pK + (M-\alpha)Kt\right] < 0 \tag{7.23}$$

при выполнении условия (7.21) на $\alpha > 0$ и условия на $K > 0$

$$8pMN^2 + 8pNM + M < pK. \tag{7.24}$$

Таким образом, имеем при выполнении неравенств (7.21) и (7.24)

$$L(w(x,t)+u(x,t))<0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,T]. \tag{7.25}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$v(x,t)\stackrel{\mathrm{def}}{=}w(x,t)+u(x,t) \tag{7.26}$$

в замкнутом цилиндре $\overline{Ц^{0,T}_{0,r_0}}=\{|x|\leqslant r_0\}\otimes\{0\leqslant t\leqslant T\}$. При $t=0$ имеем

$$v(x,0)=u_0(x)+2A\frac{|x|^{2p}}{r_0^{2p-q}}\geqslant 0, \tag{7.27}$$

а при $r=r_0$ имеем

$$v(x,t)\geqslant\frac{2A}{r_0^{2p-q}}\left(r_0^2+Kt\right)^pe^{\alpha t}-A\left(r_0^q+1\right)\geqslant$$
$$\geqslant 2Ar_0^q-A(r_0^q+1)=A(r_0^q-1)>0 \tag{7.28}$$

при $r_0>1$. Согласно принципу максимума имеем

$$v(x,t)\geqslant 0\Rightarrow u(x,t)+w(x,t)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in\overline{Ц^{0,T}_{0,r_0}}. \tag{7.29}$$

Осталось при фиксированном $(x,t)\in\overline{Ц^{0,T}_{0,r_0}}$ перейти к пределу при $r_0\to\to+\infty$ и из явного вида (7.19) функции $w(x,t)$ получить следующее неравенство:

$$u(x,t)\geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes[0,T].$$

Контрпример к задаче 5. Условия (7.15), налагаемые на коэффициенты оператора L, нельзя ослабить, если ограничиться оценками коэффициентов через степени $|x|$. Действительно, при любом $\delta>>0$ функция

$$u(x,t)=\begin{cases}\displaystyle\int\limits_{F_\delta(x,t)}^{+\infty}\exp\{-y^2\}\,dy & \text{для} \quad 0<t\leqslant T,\\ 0 & \text{для} \quad t=0,\end{cases}$$

где

$$F_\delta(x,t)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)^\delta}{2\sqrt{t}},$$

является непрерывной и ограниченной в $\mathbb{R}^1\otimes[0,T]$, обращается в нуль при $t=0$ и удовлетворяет при $t>0$ уравнению

$$\frac{1}{\delta^2}\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)u_{xx}+$$
$$+\frac{1}{\delta^2}\left(x-\delta\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)u_x-u_t=0.$$

В этом уравнении коэффициент при u_{xx} растет не быстрее, чем $M|x|^{2+2\delta}$, а коэффициент при u_x растет не быстрее, чем $M|x|^{1+2\delta.}$ Следовательно, при таком росте коэффициентов нарушается единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций.

Задача 6. [12] Пусть коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ и $c(x,t)$ ограничены в $\Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$:

$$|a_{ij}(x,t)| < M, \quad |b_i(x,t)| < M, \quad |c(x,t)| < M, \tag{7.30}$$

а функция $u(x,t)$ непрерывна в Ω и удовлетворяет в $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ неравенствам

$$Lu(x,t) \leqslant 0, \quad u(x,t) \geqslant -\exp\left[\beta(|x|^2+1)\right], \tag{7.31}$$

где $\beta > 0$ — некоторая постоянная. Доказать, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T] \tag{7.32}$$

при условии

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{7.33}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].)

Для доказательства утверждения задачи нужно рассмотреть вспомогательную функцию

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left[2\beta(|x|^2+1)e^{\alpha t} - \beta(r_0^2+1)\right] \tag{7.34}$$

и повторить рассуждения при решении предыдущей задачи и проверить, что при надлежащим образом выбранной постоянной $\alpha > 0$ выполнено неравенство

$$Lw(x,t) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]. \tag{7.35}$$

Действительно, имеем

$$Lw(x,t) = w(x,t)e^{\alpha t}\left[4\beta\sum_{i=1}^N a_{ii} + 16\beta^2 e^{\alpha t}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}x_ix_j + \right.$$
$$\left. + 4\beta\sum_{i=1}^N b_ix_i + ce^{-\alpha t} - 2\beta\alpha(|x|^2+1)\right] < 0$$

при условии

$$t \leqslant t_0 = \frac{1}{\alpha},$$

где $\alpha > 0$ достаточно велико.

□ Действительно, имеют место следующие оценки:

$$4\beta\sum_{i=1}^N a_{ii} \leqslant 4\beta NM, \quad 16\beta^2 e^{\alpha t}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}x_ix_j \leqslant 16\beta^2 e^{\alpha t} MN^2|x|^2,$$

$$4\beta\sum_{i=1}^{N} b_i x_i \leqslant 4\beta MN|x| \leqslant 2\beta MN|x|^2 + 2\beta MN, \quad ce^{-\alpha t} \leqslant M.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$Lw(x,t) \leqslant w(x,t)e\Big[2\beta\left(8\beta eMN^2 + MN - \alpha\right)|x|^2 + \\ + 6pNM + M - 2\beta\alpha\Big] < 0$$

при достаточно большом $\alpha > 0$. ☒

Теперь рассмотрим новую функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x,t) + u(x,t). \tag{7.36}$$

В замкнутом цилиндре $\overline{\text{Ц}^{0,t_0}_{0,r_0}} = \{|x| \leqslant r_0\} \otimes \{0 \leqslant t \leqslant t_0\}$ при $t = 0$ имеем

$$v(x,0) = u_0(x) + w(x,0) \geqslant \exp\Big[2\beta(|x|^2+1) - \beta(r_0^2+1)\Big] \geqslant 0,$$

а при $r = r_0$ имеем

$$v(x,t) = \exp\Big[2\beta(r_0^2+1)e^{\alpha t} - \beta(r_0^2+1)\Big] + u_0(x) \geqslant \\ \geqslant \exp\Big[\beta(r_0^2+1)\Big] - \exp\Big[\beta(r_0^2+1)\Big] = 0. \tag{7.37}$$

В силу принципа максимума в замкнутом цилиндре $\overline{\text{Ц}^{0,t_0}_{0,r_0}}$ мы получим, что

$$v(x,t) = u(x,t) + w(x,t) \geqslant 0.$$

Переходя к пределу при $r_0 \to +\infty$ в выражении для $v(x,t)$ при фиксированном (x,t) мы получим, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,t_0].$$

Далее нужно повторить рассуждения последовательно в полосах

$$\frac{1}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{2}{\alpha}, \quad \frac{2}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{3}{\alpha}, \cdots \frac{n}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{n+1}{\alpha}, \cdots$$

и в результате получим, что утверждение задачи выполнено для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$.

З а м е ч а н и е к з а д а ч е 6. Для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}$$

известны более сильные результаты, чем рассмотренные. В частности, С. Тэклиндом доказано, что решение задачи Коши единственно в классе функций, удовлетворяющих условию

$$|u(x,t)| \leqslant \exp\left[\delta|x|h(|x|)\right] \quad \text{при} \quad |x| > 1,$$

где $\delta > 0$ — это произвольная постоянная, $h(r)$ — положительная неубывающая функция и

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dr}{h(r)} = +\infty.$$

Причем в случае сходимости последнего интеграла единственность решения задачи Коши может нарушаться.

Задача 7. [12] Пусть непрерывная и ограниченная в $\mathbb{R}^N \otimes [0, T]$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$Lu(x, t) = f(x, t) \quad \text{при} \quad (x, t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, T], \tag{7.38}$$

причем

$$|u(x, 0)| \leqslant M_1, \quad |f(x, t)| \leqslant M_2, \quad c(x, t) \leqslant M_3, \tag{7.39}$$

коэффициенты a_{ij} и b_i подчинены условиям (7.15). Тогда всюду в $\mathbb{R}^N \otimes [0, T]$ выполнено неравенство

$$|u(x, t)| \leqslant e^{M_3 t} \left(M_1 + M_2 t\right). \tag{7.40}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].)

Для доказательства рассмотрим вспомогательные функции

$$w_{\pm}(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{M_3 t} \left(M_1 + M_2 t\right) \pm u(x, t).$$

По условию задачи имеем

$$w_{\pm}(x, 0) \geqslant 0.$$

Вычислим $Lw_{\pm}(x, t)$. Имеем

$$Lw_{\pm}(x, t) = e^{M_3 t} \left[(c - M_3)(M_1 + M_2 t) - M_2\right] \pm f \leqslant -M_2 e^{M_3 t} \pm f \leqslant 0$$

Отметим, что в силу ограниченности в $\mathbb{R}^N \otimes [0, T]$ решения $u(x, t)$ найдется такая постоянная $A > 0$, что

$$u(x, t) \geqslant -A \Rightarrow u(x, t) \geqslant -A(|x|^q + 1).$$

В силу результата задачи 3 получим

$$w_{\pm}(x, t) \geqslant 0 \quad \text{всюду в} \quad \mathbb{R}^N \otimes [0, T].$$

§ 8. Теорема типа Жиро

Для того, чтобы исследовать вопрос о единственности решения *второй* и *третьей краевой задачи* нам необходимо доказать так называемую теорему типа Жиро о знаке косой производной. Предварительно дадим определение *свойства строгой сферичности изнутри.*

Определение 5. *Пусть $P_0 = (x_0, t_0)$ — это точка на границе ∂D области D. Если существует такой замкнутый шар $B(\overline{P}, R)$ с центром в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$, что $B \subset \overline{D}$, $B \cap \partial D = \{P_0\}$, и если $\overline{x} \neq x_0$,* *то мы скажем что P_0 обладает свойством строгой сферичности изнутри.*

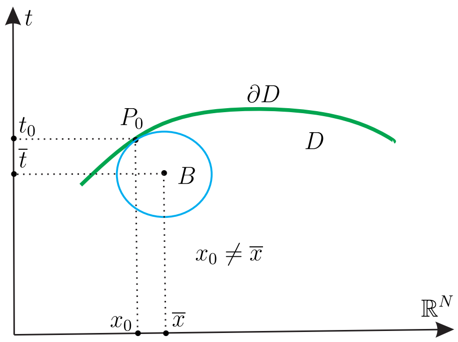

Рис. 24. К определению 4 строгой сферичности.

Замечание 13. Отметим, что если убрать требование $\overline{x} \neq x_0$ в определении 4, то мы получим *свойство сферичности изнутри*.

Замечание 14. Отметим, что свойство строгой сферичности не выполняется для многих естественных областей. Смотри рисунок 32. На этом рисунке, во–первых, отмечены точки A_0, B_0, C_0 и D_0, которые не обладают даже свойством сферичности (не строгой) изнутри, поскольку не существует малого шара, который коснулся бы этих точек оставаясь внутри области D. Далее, нижняя крышка $\overline{D} \cap \{t = 0\}$ цилиндра D обладает свойством сферичности изнутри, но никакая точка нижней крышки не обладает свойством строгой сферичности изнутри. Аналогичным образом верхняя крышка B_T цилиндра D также обладает лишь свойством сферичности изнутри, а не строгой сферичности изнутри. Наконец, в задачах математической физики лишь часть $S_0 := \partial D \backslash \left(\overline{\gamma(D)} \cup \overline{\gamma_0(D)}\right)$ боковой границы $S := \partial D \backslash (\gamma(D) \cup \gamma_0(D))$ может обладать свойством строгой сферичности изнутри [1]. Хотя, именно на всей боковой границе S в случае второй и третьей краевых задач ставится условия с косой производной.

Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ в области D и

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{8.1}$$

Предположим, что коэффициенты оператора L ограничены в D, удовлетворяют условиям (B), (C) и условию равномерной параболичности в D. Пусть решение $u(x,t)$ неравенства (8.1) достигает положительный максимум $M > 0$ в точке $P_0 \in S$:

$$u(P_0) = M \quad \text{в точке} \quad P_0 \in S := \partial D \backslash (\gamma(D) \cup \gamma_0(D)). \tag{8.2}$$

[1] Ясно, что $S_0 \subset S$.

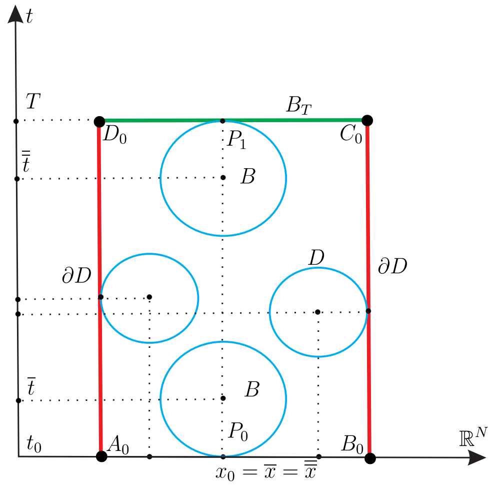

Рис. 25. К замечанию 14.

При этих условиях справедлива следующая *теорема типа Жиро*:

Теорема типа Жиро. *Если выполняются указанные выше условия, точка $P_0 \in S$ обладает свойством строгой сферичности изнутри и существует окрестность V точки P_0, такая, что*

$$u(x,t) < M \quad \textit{в} \quad D \cap V, \tag{8.3}$$

то для любого некасательного внутреннего направления l_{P_0} выполнено неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} < 0. \tag{8.4}$$

Замечание 15. Некасательным внутренним направлением мы называем направление из точки P_0 внутрь шара $B(\overline{P}, R)$ из условия строгой сферичности изнутри в точке $P_0 \in S$. Напомним определение

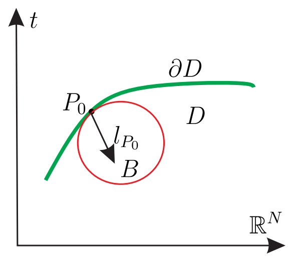

Рис. 26. Некасательное внутреннее направление и шар B.

производной по внутреннему направлению l_{P_0}. Рассмотрим луч, проходящий через точку $P_0 = (x_0, t_0) \in S$ и параллельный внутреннему направлению

$$l_{P_0} = (l_{x_0}, l_{t_0}) = (\cos\beta_{x_{01}}, ..., \cos\beta_{x_{0N}}, \cos\beta_{t_0}), \; \sum_{j=1}^{N} \cos^2\beta_{x_{0j}} + \cos^2\beta_{t_0} = 1.$$

Тогда производная функции $u(x,t)$ по внутреннему направлению l_{P_0} определяется следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} := \lim_{0<\lambda\to 0} \frac{u(x_0 + \lambda l_{x_0}, t_0 + \lambda l_{t_0}) - u(x_0, t_0)}{\lambda}. \tag{8.5}$$

Отметим, что при условиях теоремы выполнено неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} \leqslant 0, \tag{8.6}$$

поскольку в точке $P_0 = (x_0, t_0)$ у функции $u(x,t)$ максимум, а в части окрестности $D \cap V \supset B$ выполнено неравенство $u(x,t) < M$. Заметим также, что результат теоремы — это строгое неравенство.

Доказательство.

Шаг 1. Можно считать, что внутренность $\operatorname{int} B$ замкнутого шара $B(\overline{P}, R)$

$$\operatorname{int} B := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \sum_{j=1}^{N} (x_j - \overline{x}_j)^2 + |t - \overline{t}|^2 < R^2 \right\} \subset D \cap V \text{ [1]}.$$

Обозначим границу шара B через ∂B. Пусть

$$\pi := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \alpha_0 t + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j = \beta \right\} \text{ [2]}$$

— это гиперплоскость, которая делит пространство $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ на два полупространства π^- и π^+

$$\pi^- := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \alpha_0 t + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j < \beta \right\},$$

$$\pi^+ := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \alpha_0 t + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j > \beta \right\}$$

таким образом, чтобы

$$\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in \pi^-, \quad P_0 = (x_0, t_0) \in \pi^+.$$

---

[1] Можно просто выбрать шар B достаточно малым.

[2] α_0, α_j и β — это некоторые вещественные числа.

Так как $\overline{x} \neq x_0$, мы можем, варьируя вещественными числами α_0, α_j и β выбрать гиперплоскость π таким образом, чтобы

$$B^+ \stackrel{\text{def}}{=} \pi^+ \cap B \neq \varnothing \quad \text{и} \quad |x - \overline{x}| \geqslant a > 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in B^+.$$

При этом граница B^+ состоит из части $C_1 \in \partial B$ и другой части $C_2 \in \in B \cap \pi$.

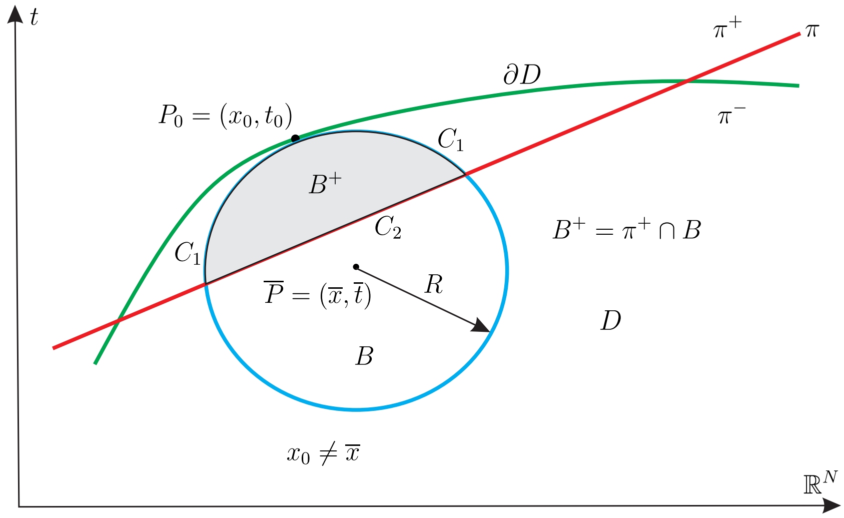

Рис. 27. Множество B^+ и его граница $C_1 \cup C_2$.

Шаг 2. Введем функцию

$$h(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left\{-\alpha \left[|x-\overline{x}|^2 + |t-\overline{t}|^2\right]\right\} - \exp\left\{-\alpha R^2\right\}. \tag{8.7}$$

Напомним, что R — это радиус замкнутого шара $B(\overline{P}, R)$. Имеем

$$h(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in C_1, \quad h(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{B^+}, \tag{8.8}$$

причем можно проверить, что [1])

$$Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad B^+ \tag{8.9}$$

при достаточно большом $\alpha > 0$.

□ Действительно, имеют место равенства

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -2\alpha(t-\overline{t}) \exp\left\{-\alpha \left[|x-\overline{x}|^2 + |t-\overline{t}|^2\right]\right\},$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = -2\alpha(x_i-\overline{x}_i) \exp\left\{-\alpha \left[|x-\overline{x}|^2 + |t-\overline{t}|^2\right]\right\},$$

[1]) Здесь существенно, что $x_0 \neq \overline{x}$ и поэтому выполнено следующее неравенство: $|x - \overline{x}| \geqslant a > 0$ для всех $(x,t) \in B^+$.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = -[2\alpha\delta_{ij} - 4\alpha^2(x_i - \overline{x}_i)(x_j - \overline{x}_j)] \exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2 + |t-\overline{t}|^2\right]\right\}.$$

Из этих равенств вытекает следующее выражение для $Lh(x,t)$:

$$Lh(x,t) = \left[4\alpha^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)(x_i - \overline{x}_i)(x_j - \overline{x}_j) - 2\alpha \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) - \right.$$
$$\left. - 2\alpha \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)(x_i - \overline{x}_i) + 2\alpha(t - \overline{t}) + c(x,t)\right] \times$$
$$\times \exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2 + |t-\overline{t}|^2\right]\right\} -$$
$$- c(x,t)\exp\left\{-\alpha R^2\right\}. \quad (8.10)$$

Поскольку по исходному предположению оператор L является равномерно параболическим в D, то поэтому найдется постоянная $m = m(D) > 0$ такая, что имеет место оценка снизу

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)(x_i - \overline{x}_i)(x_j - \overline{x}_j) \geqslant m|x-\overline{x}|^2 \geqslant ma^2 =: d_1 > 0 \quad (8.11)$$

для всех $(x,t) \in \overline{B}^+$. В шаре B справедливы неравенства сверху

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\right| + \left|\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)(x_i - \overline{x}_i)\right| + \left|t - \overline{t}\right| \leqslant K_1 < +\infty, \quad (8.12)$$

$$|c(x,t)| \leqslant K_2 < +\infty. \quad (8.13)$$

Из (8.10) и (8.11)–(8.13) вытекает неравенство снизу [1])

$$Lh(x,t) \geqslant \left[4\alpha^2 d_1 - 2\alpha K_1 - K_2\right] \exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2 + |t-\overline{t}|^2\right]\right\} > 0$$

при достаточно большом $\alpha > 0$. ⊠

Шаг 3. Введем следующую функцию:

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) + \varepsilon h(x,t), \quad \varepsilon > 0. \quad (8.14)$$

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция $v(x,t)$ будет удовлетворять условиям

$$v(x,t) < M \quad \text{на} \quad C_2, \quad v(x,t) = u(x,t) < M \quad \text{на} \quad C_1 \backslash \{P_0\}, \quad (8.15)$$

причем

$$v(P_0) = u(P_0) = M. \quad (8.16)$$

[1]) Напомним, что $c(x,t) \leqslant 0$.

Поскольку

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) + \varepsilon Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad B^+, \tag{8.17}$$

то функция $v(x,t)$ в силу принципа максимума не может принимать своего максимального значения $M > 0$ во внутренней точке B^+. Итак,

$$v(x,t) < M \quad \text{внутри} \quad B^+. \tag{8.18}$$

Шаг 4. Из (8.16), (8.18) и (8.5) вытекает, что

$$\frac{\partial v}{\partial l_{P_0}} \leqslant 0. \tag{8.19}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial h}{\partial n_{P_0}} > 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \tau_{P_0}} = 0, \tag{8.20}$$

где n_{P_0} — это внутренняя нормаль к сфере ∂B в точке P_0, а τ_{P_0} — это касательная к сфере ∂B в той же точке P_0.

□ Действительно, запишем уравнение (8.7) для функции $h(x,t)$ в обобщенной сферической системе координат

$$\begin{cases} (r, \varphi, \vartheta_1, ..., \vartheta_{N-1}), & \text{если} \quad N \geqslant 2; \\ (r, \varphi), & \text{если} \quad N = 1. \end{cases}$$

Это уравнение имеет следующий вид:

$$h = \exp\left(-\alpha r^2\right) - \exp\left(-\alpha R^2\right).$$

Производная по направлению <u>внешней нормали</u> в точке $P_0 \in \partial B$ равна

$$\frac{\partial h}{\partial r}(P_0) = -2\alpha R \exp\left(-\alpha R^2\right) < 0,$$

тогда производная по направлению n_{P_0} <u>внутренней нормали</u> в точке $P_0 \in \partial B$ равна

$$\frac{\partial h}{\partial n_{P_0}} = 2\alpha R \exp\left(-\alpha R^2\right) > 0.$$

Поскольку функция $h(x,t)$ в сферической системе координат зависит только от r, то ее производная по касательной τ_{P_0} равна нулю

$$\frac{\partial h}{\partial \tau_{P_0}} = 0. \quad \boxtimes$$

Заметим, что

$$\frac{\partial h}{\partial l_{P_0}} = \cos(l_{P_0}, n_{P_0}) \frac{\partial h}{\partial n_{P_0}} + \cos(l_{P_0}, \tau_{P_0}) \frac{\partial h}{\partial \tau_{P_0}} = \cos(l_{P_0}, n_{P_0}) \frac{\partial h}{\partial n_{P_0}} > 0,$$

поскольку

$$\cos(l_{P_0}, n_{P_0}) > 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial h}{\partial l_{P_0}} > 0. \tag{8.21}$$

Итак, из (8.19) и (8.21) вытекает, что

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} = \frac{\partial v}{\partial l_{P_0}} - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial l_{P_0}} < 0. \tag{8.22}$$

Лемма доказана.

Замечание 16. Важным усилением утверждения теоремы типа Жиро является теорема 7 О. А. Олейник из книги [3]. Результат теоремы типа Жиро можно, в частности, распространить на точки границы $\partial\gamma(D)$ верхней крышки [1] $\gamma(D)$.

Пусть точка $P_0 = (x_0, t_0) \in \partial B_{t_0}$, где $B_{t_0} \subset \gamma(D)$ — это связная компонента верхней крышки, расположенная на гиперплоскости $t = t_0$. Согласно определению верхней крышки $\gamma(D)$ и боковой границы $S :=$ $= \partial D \setminus \{\gamma(D) \cup \gamma_0(D)\}$ справедливо выражение

$$P_0 \subset \partial B_{t_0} \cap S.$$

Предположим, что существует такой шар A, что $P_0 \in \partial A$ и все его точки, лежащие в области $0 < t < t_0$, принадлежат D, причем радиус этого шара проведенный в точку P_0 не параллелен оси t. В этом случае для точки P_0 справедливо строгое неравенство (8.6). Этот случай изображен на следующем рисунке.

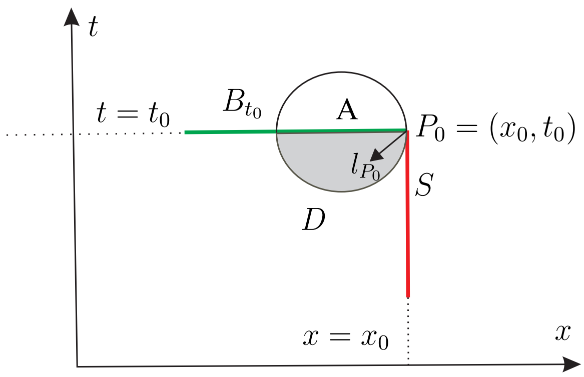

Рис. 28. Шар A.

Замечание 17. Предположение, что

$$u(x,t) < M \quad \text{в} \quad D \cap V,$$

[1] Само утверждение из работы [3] относится ко всем точкам боковой границы S. Просто для нас важен результат теоремы в случае цилиндрической области D.

является, конечно, существенным, так как в противном случае $u(x,t)$ могла бы быть постоянной в $D \cap V$ и тогда бы

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = 0.$$

Контрпример к теореме типа Жиро 1. Заметим, что если P_0 — это угловая точка границы ∂D, то теорема типа Жиро может оказаться неверной. Например, определим область D неравенствами

$$x^2 + t^2 < R^2, \quad t < \gamma_1 x, \quad t < \gamma_2 x, \quad \gamma_1 > 0 > \gamma_2.$$

Пусть

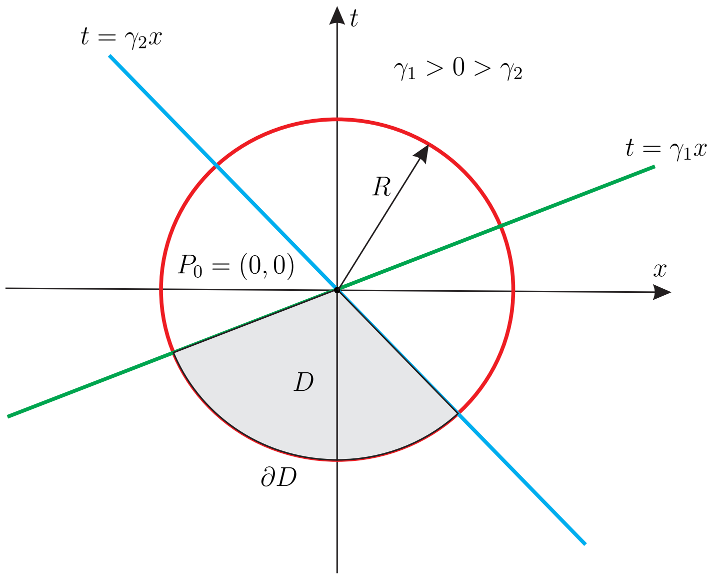

Рис. 29. Область D с угловой точкой $P_0 = (0,0)$.

$$P_0 = (0,0), \quad Lu(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$
$$u(x,t) = (t - \gamma_1 x)(\gamma_2 x - t) + 1,$$

то

$$u(x,t) < 1 \quad \text{в} \quad D, \quad u(x,t) = 1 \quad \text{в} \quad P_0,$$
$$Lu(x,t) = -2\gamma_1\gamma_2 + \overline{\overline{o}}(|x| + |t|) > 0,$$

если $R > 0$ достаточно малое. Однако,

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} = 0$$

для любого направления l_{P_0}. Проверьте сами!

Контрпример к теореме типа Жиро 2. Заметим, что условие строгой сферичности изнутри нельзя заменить на условие сферичности изнутри, т.е. условие $x_0 \neq \overline{x}$ существенно. Действительно, рассмотрим область $D = \{(x,t) : \ x \in \mathbb{R}^1, \ t > 0\}$. Пусть

$$P_0 = (0,0), \quad Lu(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad u(x,t) = 1 - t^2.$$

Для функции $u(x,t)$ имеем

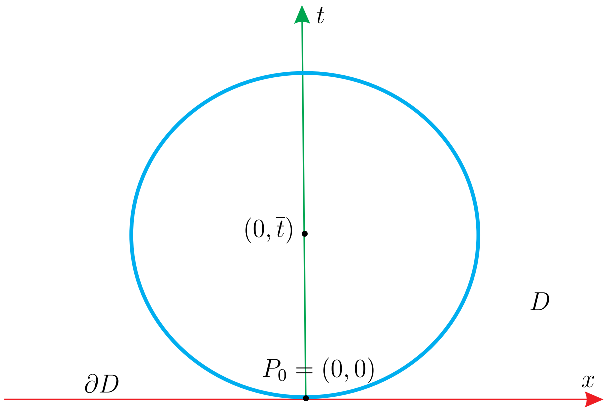

Рис. 30. Область D с условием нестрогой сферичности всей границы ∂D.

$$Lu(x,t) = 2t > 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u(P_0) = 1, \quad u(x,t) < 1 \quad \text{в} \quad D,$$

но при этом

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} = 0$$

для любого направления l_{P_0}. Проверьте сами!

§ 9. Вторая и третья краевые задачи

Будем пользоваться обозначениями первого параграфа. Пусть $D := Q \otimes (0,T) \subset \mathbb{R}^{N+1}$ — это цилиндрическая область, $Q \subset \mathbb{R}^N$ — область, $B = Q \otimes \{t = 0\}$ — нижняя крышка цилиндра D, $B_T = Q \otimes \{t = T\}$ — верхняя крышка цилиндра D, $S := \partial D \setminus (B \cup B_T) = \partial Q \otimes [0,T]$ — это боковая граница. Пусть функции $f(x,t) \in \mathbb{C}(D \cup B_T)$, $\varphi(x) \in \mathbb{C}(\overline{B})$ и $\psi(x,t) \in \mathbb{C}(S)$.

Постановка третьей краевой задачи. *Найти функцию* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cup \mathbb{C}^{1,0}_{x,t}(D \cup S) \cup \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$, *удовлетворяющую уравнению*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{9.1}$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B} \tag{9.2}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t)u(x,t) = \psi(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S, \tag{9.3}$$

где $\nu_{x,t}$ *— это конормаль в точке* $(x,t) \in S$. *В том случае, если* $\beta(x,t) = 0$ *задача* (9.1)–(9.3) *носит название второй краевой задачи.*

Замечание 18. Отметим, что каждая точка части $S_0 := = \partial D \setminus \left(\overline{B} \cup \overline{B}_T\right)$ боковой границы $S := \partial D \setminus (B \cup B_T)$ цилиндрической области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, очевидно, удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри.

Справедлива следующая теорема:

Теорема единственности решения третьей краевой задачи. *Пусть* L *— это равномерно параболический оператор с непрерывными и ограниченными в цилиндрической области* D *коэффициентами. Предположим, что* $c(x,t) \leqslant 0$, $\beta(x,t) \leqslant 0$. *Тогда существует не более одного решения третьей краевой задачи.*

Доказательство. В силу линейности задачи нам нужно доказать, что если $f(x,t) \equiv 0$ в $D \cup B_T$, $\varphi(x) \equiv 0$ в $\overline{B}$ и $\psi(x,t) \equiv 0$ на S, то $u(x,t) \equiv 0$ в D.

Шаг 1. Допустим, что тем не менее $u(x,t) \not\equiv 0$. Можно считать, что $u(x,t)$ имеет положительный максимум $M > 0$ в $\overline{D}$. Если

$$u(P_0) = M, \quad P_0 = (x_0, t_0),$$

то $P_0 \notin B_{t_0}$ при $0 < t_0 \leqslant T$, так как из сильного принципа максимума теоремы 5 следовало бы, что

$$u(x,t) \equiv M \quad \text{при} \quad (x,t) \in S(P_0) = (D \cup B_T) \cap \{0 < t \leqslant t_0\}.$$

По условию $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, поэтому

$$u(x,0) = M > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in B,$$

но это противоречит нашему предположению, что $\varphi(x) = 0$ на $\overline{B}$.

Шаг 2. Предположим теперь, что

$$u(P_0) = M > 0 \quad \text{в точке} \quad P_0 = (x_0, t_0) \in S_0 := \partial D \setminus \left(\overline{B} \cup \overline{B}_T\right),$$

причем в силу шага 1 имеем

$$u(x,t) < M \quad \text{для всех} \quad V \cap D,$$

где V — некоторая окрестность точки P_0. В противном случае мы точно также как и на первом шаге получим, что $u(x,t) = 0$. Поскольку всякая точка $P \in S_0$ удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри, то мы можем применить теорему типа Жиро и получить, что

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{P_0}} < 0 \Rightarrow 0 > \frac{\partial u}{\partial \nu_{P_0}} = -\beta(P_0)u(P_0) \geqslant 0 \tag{9.4}$$

и получить противоречие.

Рассмотрим теперь случай $P_0 \in S \backslash S_0$. Ясно, что такие точки P_0 не удовлетворяют условию строгой сферичности изнутри, но теперь нам нужно воспользоваться замечанием 16 к теореме типа Жиро и получить, что и в этом случае выполнено строгое неравенство (9.4) и снова получить противоречие.

Следовательно, $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Теорема доказана.

Замечание 19. Заметим, что требование строгой сферичности на множестве $S \cap \{t = T\}$ в случае произвольной области D является очень ограничительным — это означает, что область D должная выглядеть «приблизительно» так:

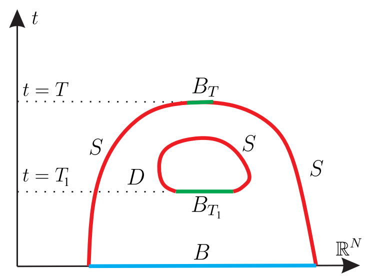

Рис. 31. Область D с условием сферичности точек боковой границы S.

Однако, условие строгой сферичности множества точек $S \cap \{t = T\}$ можно заменить требованием $\beta(x,T) < 0$. Более того, имеет место следующее утверждение:

Задача 8. Доказать единственность решения третьей краевой задачи без требования строгой сферичности боковой границы S при условии

$$\beta(x,t) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S.$$

Указание. В качестве наводящих соображений отметим, что если не требовать условия строгой сферичности изнутри множества точек боковой границы S, то и нельзя применить теорему Жиро — это означает, что в данном случае можно доказать единственность третьей краевой задачи без теоремы типа Жиро.

Решение. В модификации нуждается только доказательство теоремы единственности третьей краевой задачи на шаге 3. Таким образом, имеем

$$u(P_0) = M > 0 \quad \text{в некоторой точке} \quad P_0 = (x_0, t_0) \in S,$$

причем в силу шага 2 имеем

$$u(x,t) < M \quad \text{для всех} \quad V \cap D,$$

где V — некоторая окрестность точки P_0. Тогда в этой точке выполнено противоречивые неравенства:

$$0 \geqslant \frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} = -\beta(P_0)u(P_0) > 0.$$

§ 10. Теоремы сравнения — нелинейный случай

В этом параграфе мы рассмотрим теоремы сравнения для *нелинейных краевых задач* достаточно общего вида. Именно сначала рассмотрим следующую *первую краевую задачу*:

$$u_t - \Delta u = f(x,t,u,D_x u) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{10.1}$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad B \cup S, \tag{10.2}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$. В этом параграфе мы будем использовать введенные в первом параграфе обозначения D, S, B, а также следующие:

$$D_\tau \overset{\text{def}}{=} D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad B_\tau \overset{\text{def}}{=} D \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau \overset{\text{def}}{=} S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}.$$

При этом мы будем предполагать, что $D \subset \mathbb{R}^N$ — это область и $B_\tau \subset \subset \mathbb{R}^N$ — это область (может быть неограниченная) для каждого $\tau \in \in (0,T)$.

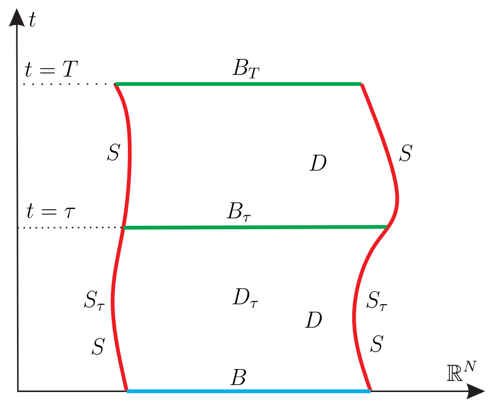

Рис. 32. Область D и множества D_τ, B_τ и S_τ.

В дальнейшем в спецкурсе профессора Н. Н. Нефедова студентам кафедры математики будет изложен *метод верхних и нижних решений* доказательства разрешимости краевых задач для нелинейных уравнений параболического и эллиптического типов [8]. Метод основан на признаке сравнения для соответствующих нелинейных краевых задач.

Поэтому мы докажем слабый признак сравнения классических решений первой краевой задачи (10.1), (10.2).

Справедлива следующая теорема:

Теорема 10. *Пусть* $v(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *принадлежат классу* $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{D})$. *Пусть, кроме того, функция* $f(x,t,p,p_i)$ *при* $i = \overline{1,N}$ *является непрерывной по всем переменным* (x,t,p,p_i) *в области*

$$E \stackrel{\mathrm{def}}{=} D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N.$$

Если

$$v_t - \Delta v > f(x,t,v,D_x v) \quad \text{в} \quad D, \tag{10.3}$$

$$w_t - \Delta w \leqslant f(x,t,w,D_x w) \quad \text{в} \quad D, \tag{10.4}$$

и если

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{на} \quad B \cup S, \tag{10.5}$$

тогда

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{в} \quad D. \tag{10.6}$$

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим следующее множество точек $\mathfrak{M} \subset (0,T)$ таких, что

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{для всех} \quad x \in \overline{B_t} \quad \text{для всех} \quad 0 \leqslant t < \sigma,$$

где $\sigma \in \mathfrak{M}$. Если мы докажем, что

$$\sup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \{\sigma\} = T,$$

то теорема будет доказана.

Замечание 20. На следующих двух рисунках изображены области D, для которой множество $\mathfrak{M} = \{t_1, t_2, T\}$.

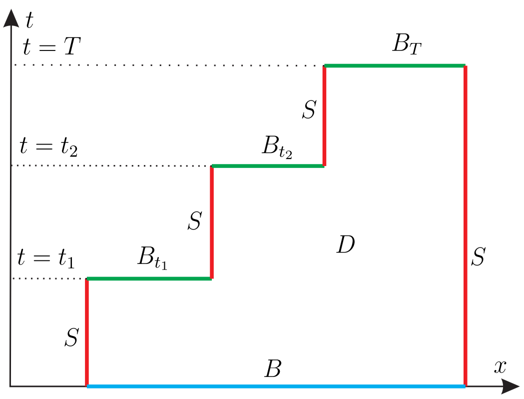

Рис. 33. Область D и соответствующее множество $\mathfrak{M} = \{t_1, t_2, T\}$.

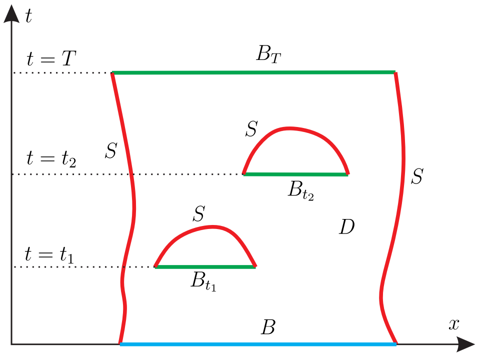

Рис. 34. Область D и соответствующее множество $\mathfrak{M} = \{t_1, t_2, T\}$.

Шаг 2. Пусть
$$t_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \{\sigma\}. \tag{10.7}$$

В силу (10.5) и того, что по условию теоремы $v(x,t), w(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, выполнено неравенство $t_0 > 0$. Если $t_0 < T$, то функция
$$z(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} v(x,t) - w(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad D_{t_0}, \quad z(x,t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad B_{t_0}, \tag{10.8}$$
причем найдется такая точка $P_0 = (x_0, t_0) \in \overline{B_{t_0}}$, в которой
$$z(P_0) = 0. \tag{10.9}$$

С другой стороны, в силу того, что $\partial B_{t_0} \in S$ и выполнено строгое неравенство (10.5) точка $P_0 \notin \partial B_{t_0}$. Следовательно, $P_0 \in B_{t_0}$ и является точкой минимума функции $z(x,t)$ в области B_{t_0}. Итак, в точке P_0 выполнены необходимое и достаточное условие минимума
$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(P_0) = 0, \quad \Delta z(P_0) \geqslant 0. \tag{10.10}$$

Шаг 3. В силу равенств (10.9) и (10.10) и неравенств (10.12), (10.13) выполнено равенство
$$f(x_0, t_0, v(P_0), D_x v(P_0)) = f(x_0, t_0, w(P_0), D_x w(P_0)) \Rightarrow \\ \Rightarrow v_t(P_0) - \Delta v(P_0) > w_t(P_0) - \Delta w(P_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow z_t(P_0) > \Delta z(P_0) \geqslant 0 \Rightarrow v_t(P_0) > w_t(P_0). \tag{10.11}$$

С другой стороны, в силу определения (10.7) имеем [1]
$$0 = z(P_0) < z(P) \quad \text{для всех} \quad P \in D_{t_0}.$$

Следовательно,
$$z_t(P_0) \leqslant 0 \Rightarrow v_t(P_0) \leqslant w_t(P_0),$$

[1] Заметим, что согласно определению $B_{t_0} \notin D_{t_0}$

что противоречит неравенству (10.11).

Полученное противоречие доказывает, что $t_0 = T$

Теорема доказана.

Замечание 21. Заметим, что серия из двух условий (10.12) и (10.13) может быть заменена на следующую серию:

$$v_t - \Delta v \geqslant f(x,t,v,D_x v) \quad \text{в} \quad D, \tag{10.12}$$

$$w_t - \Delta w < f(x,t,w,D_x w) \quad \text{в} \quad D, \tag{10.13}$$

Теперь мы рассмотрим примеры применения теоремы 10 сравнения решений.

Задача 9. [12] Пусть

$$\frac{\partial v}{\partial t} > \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + av^2 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,4M), \quad a > 0, \tag{10.14}$$

$$v(x,0) > \frac{\mu}{M}, \quad v(0,t) > \frac{\mu}{M}, \quad v(1,t) > \frac{\mu}{N} \tag{10.15}$$

при $(x,t) \in [0,1] \otimes [0,4M]$, а константы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$a\mu > 8M + \frac{1}{4}, \quad a > 0, \quad M > 0, \quad \mu > 0, \tag{10.16}$$

тогда

$$v(1/2,t) \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to 4M. \tag{10.17}$$

Решение. Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu}{M - tx(1-x)}. \tag{10.18}$$

Заметим, что при условии (10.16) имеет место следующее неравенство:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \leqslant \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^2 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,4M), \quad a > 0. \tag{10.19}$$

□ Действительно,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\mu t}{(M - tx(1-x))^2}[2x-1], \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\mu x(1-x)}{(M - tx(1-x))^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\mu t^2}{(M - tx(1-x))^3}[2x-1]^2 - \frac{2\mu t}{(M - tx(1-x))^2},$$

$$w^2 = \frac{\mu^2}{(M - tx(1-x))^2}.$$

Теперь осталось получить условие на величину $a > 0$, чтобы было в области $D = (0,1) \otimes (0,4M)$ было выполнено неравенство

$$\frac{\mu x(1-x)}{(M - tx(1-x))^2} \leqslant \frac{\mu t^2}{(M - tx(1-x))^3}[2x-1]^2 -$$

$$- \frac{2\mu t}{(M - tx(1-x))^2} + a\frac{\mu^2}{(M - tx(1-x))^2}.$$

Достаточным условием является, очевидно, следующее неравенство:

$$\mu x(1-x) + 2\mu t < a\mu^2 \Rightarrow a\mu > \frac{1}{4} + 8M. \quad \boxtimes$$

Причем

$$w(x,0) = \frac{\mu}{M}, \quad w(0,t) = \frac{\mu}{M}, \quad w(1,t) = \frac{\mu}{N}. \tag{10.20}$$

Тогда применяя теорему 10, мы получим, что

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,4M). \tag{10.21}$$

Следовательно, при $x = 1/2$ имеем

$$v(1/2,t) > \frac{4\mu}{4M - t}.$$

З а д а ч а 10. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p \in (0,1), \tag{10.22}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.23}$$

Прежде всего будем рассматривать только классические решения этой задачи Коши, т. е. $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно доказать, что за конечное время решение этой задачи обращается в нуль всюду в пространстве $\mathbb{R}^N$.

Р е ш е н и е. Предположим, что

$$0 \leqslant u_0(x) \leqslant M, \quad M > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.24}$$

1. Прежде всего отметим, что из сильного принципа сравнения, который мы сформулируем ниже, и из условия $u_0(x) \geqslant 0$ вытекает неравенство $u(x,t) \geqslant 0$.

2. Функция $v(x,t) = M + \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$ является решением следующего дифференциального неравенства:

$$v_t - \Delta v > -|v|^p, \quad v(x,0) = M + \varepsilon > u_0(x). \tag{10.25}$$

Поэтому если в теореме 10 взять в качестве $w(x,t) = u(x,t)$, то мы получим следующее неравенство:

$$u(x,t) < M + \varepsilon \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+.$$

В пределе при $\varepsilon \to +0$ получим искомое неравенство

$$u(x,t) \leqslant M \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{10.26}$$

Итак, $0 \leqslant u(x,t) \leqslant M$.

3. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t + z^p = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0. \tag{10.27}$$

нетрудно проверить, что решением этой задачи является следующая функция:

$$z(t) = \begin{cases} \left(M^{1-p} - (1-p)t\right)^{1/(1-p)}, & \text{если} \quad t \in [0, t_0]; \\ 0, & \text{если} \quad t > t_0, \end{cases} \tag{10.28}$$

где

$$t_0 = \frac{M^{1-p}}{1-p}. \tag{10.29}$$

Функция

$$v(x,t) = z(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{10.30}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_t - \Delta v > -v^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{10.31}$$

□ Действительно, функция $z = z(t)$ удовлетворяет равенству

$$z_t - \Delta z = -z^p \Rightarrow (z+\varepsilon)_t - \Delta(z+\varepsilon) = -z^p > -(z+\varepsilon)^p. \quad \boxtimes$$

Кроме того,

$$v(x,0) = M + \varepsilon > u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.32}$$

Опять применим теорему сравнения 10, в которой возьмем $w(x,t) = u(x,t)$ и получим неравенство

$$u(x,t) < v(x,t) = z(t) + \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{10.33}$$

Итак, мы делаем важный вывод — *каждое решение задачи Коши* (10.22), (10.23) *обращается в нуль всюду в* $\mathbb{R}^N$ *за конечное время* $0 < t_1 \leqslant t_0$ *при условиях* $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$ *и* $u_0(x) \not\equiv 0$, *где время* $t_0 > 0$ *определено явной формулой* (10.29).

Задача 11. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p > 1, \tag{10.34}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.35}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно получить достаточные условия разрушения решения этой задачи за конечное время.

Решение.

1. Прежде всего заметим, что

$$\Delta u - u_t = -|u|^p \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

В предположении, что решение $u(x,t)$ ограничено для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ при некотором малом $T > 0$ можно из теоремы 3 о принципе максимума для ограниченных решений в неограниченных областях получить, что $u(x,t) \geqslant 0$ для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$.

2. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t = z^p \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0. \tag{10.36}$$

Её решение дается следующей явной формулой:

$$z(t) = \bigl(M^{1-p} - (p-1)t\bigr)^{-1/(p-1)} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < t_0, \tag{10.37}$$

где

$$t_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{(p-1)M^{p-1}}. \tag{10.38}$$

Отметим, что функция $z = z(t)$ является монотонно возрастающей, причем

$$\lim_{t\to t_0} z(t) = +\infty.$$

3. Предположим, что выполнено следующее неравенство:

$$u_0(x) \geqslant M > 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.39}$$

Введем функцию:

$$w(x,t) = z(t) - \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, M). \tag{10.40}$$

Эта функция удовлетворяет дифференциальному неравенству:

$$w_t - \Delta w > w^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{10.41}$$

□ Действительно,

$$z_t - \Delta z = z^p \Rightarrow (z-\varepsilon)_t - \Delta(z-\varepsilon) = z^p > (z-\varepsilon)^p$$

при $\varepsilon \in (0, M)$. ⊠

Кроме того,

$$w(x,0) = M - \varepsilon < M \leqslant u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

4. Осталось воспользоваться теоремой 10, в которой нужно взять $v(x,t) = u(x,t)$ и получить следующее неравенство:

$$u(x,t) > z(t) - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ мы получим искомую оценку снизу

$$u(x,t) \geqslant z(t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{10.42}$$

Таким образом, мы приходим к следующему важному выводу — *при условии $u_0(x) \geqslant M > 0$ выполнена оценка* (10.42), *из которой вытекает, что для некоторого $0 < t_1 \leqslant t_0$ решение задачи Коши* (10.34), (10.35) *разрушается за конечное время*:

$$\limsup_{t\to t_1} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u(x,t) = +\infty. \tag{10.43}$$

З а д а ч а 1 2 . Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p \in (0,1), \tag{10.44}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.45}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно показать, что в нелинейном случае единственность решения этой задачи может быть нарушена, даже если решение ищется в классе А. Н. Тихонова.

Р е ш е н и е . Действительно, как и в предыдущем примере, имеем $u(x,t) \geqslant 0$. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t = z^p \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = 0. \tag{10.46}$$

Его семейство всех решений (их бесконечно много) может быть представлено в следующем виде:

$$z(t) = (1-p)^{1/(1-p)} \begin{cases} (t-t_0)^{1/(1-p)}, & \text{если} \quad t \geqslant t_0; \\ 0, & \text{если} \quad t \in [0, t_0], \end{cases} \tag{10.47}$$

где $t_0 \geqslant 0$ — любое неотрицательное число. Ясно, что решения $u(x,t) = z(t)$ удовлетворяют условиям задачи Коши (10.44) и (10.45).

З а д а ч а 1 3 . Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p > 1, \tag{10.48}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.49}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно получить оценку сверху на скорость убывания решения при $t \to +\infty$ этой задачи.

Р е ш е н и е . Как и в первом примере, используя сильный признак сравнения можно доказать, что $u(x,t) \geqslant 0$

Предположим, что $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t + z^p = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0, \quad p > 1. \tag{10.50}$$

Единственное решение дается следующей формулой:

$$z(t) = \left(M^{1-p} + (p-1)t\right)^{-1/(p-1)}, \quad t \geqslant 0. \tag{10.51}$$

Как и ранее, можно легко показать, что функция

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} z(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{10.52}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_t - \Delta v > -v^p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{10.53}$$

причем

$$v(x,0) = M + \varepsilon > M \geqslant u_0(x) = u(x,0) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.54}$$

Осталось применить теорему сравнения 10, в которой положить $w(x,t) = u(x,t)$, и получить оценку

$$0 \leqslant u(x,t) < v(x,t) = z(t) + \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t) =$$
$$= \frac{1}{(M^{1-p} + (p-1)t)^{1/(p-1)}} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_{+}. \tag{10.55}$$

З а д а ч а д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я 1. Рассмотреть задачу Коши

$$u_t - \Delta u + |\nabla u|^q + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_{+}, \tag{10.56}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{10.57}$$

при условиях $q > 0$, $p \in (0,1)$, $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$ и $u(x,t) \geqslant 0$. Доказать, что для решения этой задачи имеет место неравенство (10.33)

З а д а ч а д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я 2. Рассмотреть задачу Коши

$$u_t - \Delta u = |\nabla u|^q + |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_{+}, \tag{10.58}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{10.59}$$

при условиях $q > 0$, $1 < p$, $0 < M \leqslant u_0(x)$. Доказать, что для решения этой задачи имеет место неравенство (10.42).

Теперь мы рассмотрим *нелинейную третью краевую задачу* и докажем признак сравнения для нее. Именно сначала рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u_t - \Delta u = f(x,t,u,D_x u) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{10.60}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{на} \quad \overline{B}, \tag{10.61}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t,u(x,t)) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad S, \tag{10.62}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$.

Справедлива следующая теорема *о признаке сравнения для третьей краевой задачи*:

Т е о р е м а 11. *Пусть все предположения теоремы* 10 *остаются без изменения. Если*

$$v_t - \Delta v > f(x,t,v,D_x v) \quad \textit{в} \quad D, \tag{10.63}$$

$$w_t - \Delta w \leqslant f(x,t,w,D_x w) \quad \textit{в} \quad D \tag{10.64}$$

и если

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{на} \quad \overline{B}, \tag{10.65}$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t,v(x,t)) < \frac{\partial w(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t,w(x,t)) \quad \textit{на} \quad S, \quad (10.66)$$

где $\beta = \beta(x,t,p)$ *— это любая функция определенная на множестве* $S \otimes \mathbb{R}^1$, $\nu_{x,t}$ *— внутренняя конормаль. Тогда*

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{в} \quad D. \quad (10.67)$$

Доказательство.

Здесь нужно заметить, что доказательство этой теоремы в точности повторяет доказательство предыдущей теоремы. Только точка P_0 не может принадлежать ∂B_{t_0}, поскольку с одной стороны в силу принципа максимума

$$\frac{\partial z}{\partial \nu_{P_0}} \geqslant 0,$$

а, с другой стороны, в силу неравенства (10.66) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial \nu_{P_0}} < 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 22. Заметим, что для цилиндрической области D строгое неравенство (10.66) можно заменить на нестрогое неравенство

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t,v(x,t)) \leqslant \frac{\partial w(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t,w(x,t)) \quad \text{на} \quad S \quad (10.68)$$

и при этом результат теоремы остается в силе, если применить теорему типа Жиро.

Замечание 23. Заметим, что результат теоремы сравнения остается в силе при замене строгих неравенств на нестрогие. Результатом также будет нестрогое неравенство.

Задача 14. [14] Рассмотрим следующую задачу с *нелинейными граничными условиями*:

$$u_t = \Delta u \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \quad (10.69)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n_x} = u^p(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes [0,T], \quad p > 1, \quad (10.70)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \quad (10.71)$$

где n_x — это вектор внешней нормали к ляпуновской границе $\partial\Omega \in \in A^{1,h}$ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Нужно доказать, что всякое нетривиальное решение $u(x,t) \in \mathbb{C}_t^{(1)}((0,T]; \mathbb{C}_x^{(2)}(\overline{\Omega})) \cap \mathbb{C}_{x,t}^{1,0}(\overline{\Omega} \otimes [0,T])$ разрушается за конечное время.

Решение.

Шаг 1. Прежде всего докажем, что

$$\inf_{x\in\Omega} u(x,\varepsilon) = c > 0 \quad \text{для достаточно малого} \quad \varepsilon > 0. \quad (10.72)$$

☐ Действительно, в силу доказанного признака сравнения и замечания 23 имеем

$$u(x,t) \geqslant 0,$$

поскольку $v(x,t) = 0$ удовлетворяет уравнению (10.69), граничному условию (10.70) и $u_0(x) \geqslant 0 = v(x,0)$. Теперь заметим, что если

$$u(x_0,\varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \in \Omega,$$

то в силу сильного принципа максимума имеем

$$u(x,t) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \otimes [0,\varepsilon],$$

а, стало быть, $u_0(x) = 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$. Это противоречит тому, что $u_0(x) \not\equiv 0$. Кроме того, если $u(x,t) \not\equiv 0$ при $(x,t) \in \Omega \otimes [0,\varepsilon]$ и

$$u(x_0,\varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \in \partial\Omega,$$

то в этой точке минимума в силу граничного условия (10.70) и теоремы типа Жиро получим

$$\frac{\partial u}{\partial n_x}(x_0,\varepsilon) = 0 \Rightarrow u(x,\varepsilon) = 0 \; \forall\, x \in \overline{\Omega} \Rightarrow u(x,0) = 0 \; \forall\, x \in \overline{\Omega}. \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Меняя если необходимо $t = 0$ на $t = \varepsilon > 0$ без ограничения общности можем сразу же считать, что

$$\inf_{x \in \Omega} u_0(x) = c > 0. \tag{10.73}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: [1])

$$\varphi_t = \Delta\varphi \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \tag{10.74}$$

$$\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial n_x} = \varphi^p(x,t) - c^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes [0,T], \tag{10.75}$$

$$\varphi(x,0) = c > 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{10.76}$$

Сравнивая $\varphi(x,t)$ с функцией $u(x,t)$ мы получим неравенство

$$u(x,t) \geqslant \varphi(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0,T]. \tag{10.77}$$

Шаг 3. Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x,t+\eta) - \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad \eta > 0. \tag{10.78}$$

Эта функция удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\psi_t = \Delta\psi \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T-\eta], \tag{10.79}$$

[1]) Отметим, что внимательный читатель заметит, что решение следующей третьей краевой задачи удовлетворяет условию согласования начального и граничного условий.

$$\frac{\partial\psi}{\partial n_x} = \frac{\partial\varphi(x,t+\eta)}{\partial n_x} - \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n_x} = \\ = (\varphi^p(x,t+\eta) - \varphi^p(x,t)) = \\ = p\xi^{p-1}(x,t)\psi(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0, T-\eta], \quad (10.80)$$

где $\xi(x,t) \in [\varphi(x,t), \varphi(x,t+\eta)]$,

$$\psi(x,0) = \varphi(x,\eta) - c \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (10.81)$$

Используя признак сравнения мы получим, что

$$\psi(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0, T-\eta) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \quad (10.82)$$

Шаг 4. Отметим, что в классе

$$\varphi(x,t) \in \mathbb{C}_t^{(1)}((0,T]; \mathbb{C}_x^{(2)}(\overline{\Omega})) \cap \mathbb{C}_{x,t}^{0,1}(\overline{\Omega} \otimes [0,T])$$

функция

$$z(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi_t(x,t)$$

удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$z_t = \Delta z \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T),$$

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial n_x} = p\varphi^{p-1}(x,t) z(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T),$$

$$z(x,0) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Аналогично доказательству свойства (10.72) мы получим, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\inf_{x\in\Omega} z(x,\varepsilon) = \inf_{x\in\Omega} \varphi_t(x,\varepsilon) > 0. \quad (10.83)$$

Шаг 5. Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi_t(x,t) - \delta\varphi^p(x,t). \quad (10.84)$$

Прежде всего имеет место цепочка выражений

$$w_t - \Delta w = \varphi_{tt} - \delta p\varphi^{p-1}\varphi_t - \Delta\varphi_t + \delta\Delta\varphi^p = \\ = -\delta p\varphi^{p-1}\Delta\varphi + p(p-1)\delta\varphi^{p-2}|D_x\varphi|^2 + \delta p\varphi^{p-1}\Delta\varphi = \\ = p(p-1)\delta\varphi^{p-2}|D_x\varphi|^2 \geqslant 0, \quad (10.85)$$

поскольку

$$\varphi_{tt} = \Delta\varphi_t.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial w}{\partial n_x} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial n_x} - \delta\frac{\partial\varphi^p}{\partial n_x} = p\varphi^{p-1}\left(\varphi_t - \delta\frac{\partial\varphi}{\partial n_x}\right) =$$

$$= p\varphi^{p-1}\left(\varphi_t - \delta\varphi^p + \delta c^p\right) = p\varphi^{p-1}w + \delta p c^p \varphi^{p-1} \geqslant p\varphi^{p-1}w. \quad (10.86)$$

Кроме того, при достаточно малом $\delta > 0$ в силу (10.83) выполнено следующее неравенство:

$$w(x,\varepsilon) = \varphi_t(x,\varepsilon) - \delta\varphi^p(x,\varepsilon) \geqslant 0. \quad (10.87)$$

Используя признак сравнения получим, что

$$w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]. \quad (10.88)$$

Шаг 6. Итак, выполнено неравенство

$$\varphi_t(x,t) \geqslant \delta\varphi^p(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]. \quad (10.89)$$

Решением этого дифференциального неравенства является следующее неравенство:

$$\varphi(x,t) \geqslant \left(\varphi(x,\varepsilon) - (p-1)\delta(t-\varepsilon)\right)^{-1/(p-1)} \quad (10.90)$$

для всех $(x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]$. В силу неравенства (10.77) мы получим, что имеет место неравенство

$$u(x,t) \geqslant \left(\varphi(x,\varepsilon) - (p-1)\delta(t-\varepsilon)\right)^{-1/(p-1)} \quad (10.91)$$

для всех $(x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]$. Это неравенство означает, что $T < +\infty$.

Таким образом, утверждение задачи доказано.

§ 11. Случай нелинейного эллиптического оператора общего вида. Теорема сравнения

В этом параграфе мы докажем признак сравнения для общего оператора (эллиптического оператора) следующего вида:

$$L(u)(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (11.1)$$

в котором функция $F = F(x, t, p, p_i, p_{ij})$ определена на множестве $D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$, на котором она является непрерывно дифференцируемой функцией от $N^2 + N + 3$ переменных. Потребуем, чтобы функция $F = F(x, t, p, p_i, p_{ij})$ определяла эллиптический оператор. Для этого достаточно потребовать, чтобы было выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \xi_i \xi_j > 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N \quad (11.2)$$

и для всех $(x, t, p, p_i, p_{ij}) \in D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$. Теперь предположим, что область D является цилиндрической:

$$D = \Omega \otimes (0,T), \; S = \partial\Omega \otimes [0,T], \; B = \Omega \otimes \{t = 0\}, \; B_T = \Omega \otimes \{t = T\}.$$

Рассмотрим следующее нелинейное параболическое уравнение:

$$L(u)(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{11.3}$$

а также дифференциальное неравенство

$$L(w)(x,t) \leqslant f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T. \tag{11.4}$$

Введем функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - w(x,t). \tag{11.5}$$

В силу выражений (11.3) и (11.4) для функции $v(x,t)$ в области D выполнено следующее неравенство:

$$F(x,t,u,u_{x_i},u_{x_ix_j}) - F(x,t,w_i,w_{x_i},w_{x_ix_j}) - \\ - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{11.6}$$

Теперь применим формулу Адамара среднего значения следующего вида:

$$F(x,t,u,u_{x_i},u_{x_ix_j}) - F(x,t,w,w_{x_i},w_{x_ix_j}) = \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)v(x,t), \tag{11.7}$$

где

$$(a_{ij}(x,t), b_i(x,t), c(x,t)) = \int\limits_0^1 \left(F_{p_{ij}}, F_{p_i}, F_p\right)\Big(x,t,\vartheta u + (1-\vartheta)w, \\ ,\vartheta u_{x_i} + (1-\vartheta)w_{x_i}, \vartheta u_{x_ix_j} + (1-\vartheta)w_{x_ix_j}\Big)\,ds. \tag{11.8}$$

Итак, с учетом (11.6) и (11.7) мы получим следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t)v(x,t) - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \geqslant 0 \tag{11.9}$$

в области D. Предположим, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D = S \cup B, \tag{11.10}$$

тогда применяя принцип максимума (теоремы 2, 3) для решения $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ в ограниченной и неограниченной цилиндрической области D мы получим, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{11.11}$$

Таким образом, мы приходим к следующему сильному признаку сравнения для нелинейной первой краевой задачи [17]:

Т е о р е м а 12. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ — *это решение уравнения* (11.3) *в цилиндрической области* D [1]. *Предположим, кроме того, функция* $u(x,t)$ *удовлетворяет граничным условиям*

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{на} \quad \overline{B} = \overline{\Omega}, \tag{11.12}$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes [0,T]. \tag{11.13}$$

Пусть $v(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *класса* $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *удовлетворяют неравенствам*

$$L(w)(x,t) \leqslant f(x,t) \leqslant L(v)(x,t) \quad \text{в} \quad D, \tag{11.14}$$

причем оператор L *является параболическим в подобласти* E *области* $D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$ *следующего вида*:

$$\begin{gathered} E = \Big\{(x,t,p,p_i,p_{ij}) : \\ p \in \{\vartheta u(x,t) + (1-\vartheta)v(x,t)\} \cup \{\vartheta u(x,t) + (1-\vartheta)w(x,t)\}, \\ p_i \in \{\vartheta u_{x_i}(x,t) + (1-\vartheta)v_{x_i}(x,t)\} \cup \{\vartheta u_{x_i}(x,t) + (1-\vartheta)w_{x_i}(x,t)\}, \\ p_{ij} \in \{\vartheta u_{x_i x_j}(x,t) + (1-\vartheta)v_{x_i x_j}(x,t)\} \cup \\ \cup \{\vartheta u_{x_i x_i}(x,t) + (1-\vartheta)w_{x_i x_j}(x,t)\}, (x,t) \in D,\ i,j = \overline{1,N}\Big\}. \end{gathered}$$

Если

$$v(x,0) \leqslant u_0(x) \leqslant w(x,0) \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}, \tag{11.15}$$

$$v(x,t) \leqslant \psi(x,t) \leqslant w(x,t) \quad \text{на} \quad S, \tag{11.16}$$

тогда

$$v(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant w(x,t) \quad \text{в} \quad D. \tag{11.17}$$

З а д а ч а 15. [10] Рассмотрим следующую первую краевую задачу для *уравнения нелинейной диффузии*:

$$u_t = \Delta u^{1+p} \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,T), \quad p > 0, \quad T > 0 \tag{11.18}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{11.19}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes [0,T]. \tag{11.20}$$

Рассматривая решения этой задачи с разделенными переменными, с помощью признака сравнения получить оценки решения во времени.

Р е ш е н и е. Прежде всего заметим, что $u(x,t) \geqslant 0$ в силу теоремы 12, в которой нужно взять $v(x,t) = 0$. Будем искать частное решение уравнения (11.18) в виде

$$u_a(x,t) = f_a(x)\varphi_a(t).$$

[1] Ограниченной или неограниченной.

Подставляя в уравнение (11.18), мы получим равенство

$$\varphi_{at}(t)f_a(x) = \varphi_a^{1+p}(t)\Delta f_a^{1+p}(x) \Rightarrow \frac{\varphi_{at}(t)}{\varphi_a^{1+p}(t)} = \frac{\Delta f_a^{1+p}(x)}{f_a(x)} = \lambda.$$

Нужно рассмотреть два случая: $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$.

Случай первый: глобальная разрешимость. Для удобства положим

$$\lambda = -\frac{1}{p}.$$

Откуда получим два уравнения

$$\varphi_{at}(t) + \frac{1}{p}\varphi_a^{1+p}(t) = 0, \quad \Delta f_a^{1+p}(x) + \frac{1}{p}f_a(x) = 0, \quad (x,t) \in D. \tag{11.21}$$

Функция $\varphi_a(t)$ имеет следующий явный вид:

$$\varphi_a(t) = \frac{1}{(a+t)^{1/p}}, \tag{11.22}$$

где $a > 0$ — произвольная постоянная. А относительно функции $f_a(x)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла граничному условию

$$f_a(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{11.23}$$

Итак, функция

$$u_a(x,t) \overset{\text{def}}{=} \frac{f_a(x)}{(a+t)^{1/p}}, \quad a > 0 \tag{11.24}$$

удовлетворяет уравнению

$$u_{at} = \Delta u_a^{p+1} \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,+\infty), \tag{11.25}$$

и граничным условиям

$$u_a(x,0) = \frac{f_a(x)}{a^{1/p}} \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}, \tag{11.26}$$

$$u_a(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes [0,+\infty). \tag{11.27}$$

Пусть начальное условие $u_0(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{f_a(x)}{a_1^{1/p}} \leqslant u_0(x) \leqslant \frac{f_a(x)}{a_2^{1/p}}, \quad a_1 > 0,\ a_2 > 0, \tag{11.28}$$

тогда в силу теоремы 12, в которой

$$v(x,t) = \frac{f_a(x)}{(a_1+t)^{1/p}}, \quad w(x,t) = \frac{f_a(x)}{(a_2+t)^{1/p}},$$

получим неравенства

$$\frac{f_a(x)}{(a_1+t)^{1/p}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{f_a(x)}{(a_2+t)^{1/p}} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0,+\infty). \tag{11.29}$$

Отметим, что существует (см. [10]) не нулевое решение $f_a(x) \not\equiv 0$ краевой задачи

$$\Delta f_a^{1+p}(x) + \frac{1}{p} f_a(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad f_a(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{11.30}$$

Случай второй: разрушение за конечное время. Для удобства положим

$$\lambda = \frac{1}{p}.$$

Рассуждая аналогичным образом, мы получим следующую функцию:

$$u_b(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T-t)^{1/p}}, \quad T > 0 \tag{11.31}$$

— это произвольная постоянная,

$$\Delta f_b^{p+1}(x) - \frac{1}{p} f_b(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{11.32}$$

$$f_b(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{11.33}$$

Нетривиальное решение краевой задачи (11.32), (11.33) существует (см. монографию [19]). Предположим, что начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{f_b(x)}{T_1^{1/p}} \leqslant u_0(x) \leqslant \frac{f_b(x)}{T_2^{1/p}}, \quad 0 < T_2 < T_1, \tag{11.34}$$

тогда в силу теоремы 12, в которой

$$v(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T_1-t)^{1/p}}, \quad w(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T_2-t)^{1/p}},$$

получим неравенства

$$\frac{f_b(x)}{(T_1-t)^{1/p}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{f_b(x)}{(T_2-t)^{1/p}} \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad t \in [0,T_2). \tag{11.35}$$

Отметим, что из неравенства снизу в (11.35) вытекает *разрушение за конечное время* $T_0 \in [0,T_1]$.

Список литературы

1. *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В., Свешников А. Г.* Лекции по математической физике. М.: Издательство МГУ; Наука, 2004.— 416 с.
2. *Вентцель Т. Д., Горицкий А. Ю., Капустина Т. О. и др.* Сборник задач по уравнениям с частными производными. Под редакцией А. С. Шамаева. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005, 158 с.
3. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа// УМН, 17:3(105), 1962, 3–146 с.
4. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Новосибирск: Научная книга, 1998, 178 с.
5. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. Москва: Наука, 1985, 376 с.
6. *Кудряшов Н. А.* Методы нелинейной математической физики. Издательский дом «Интеллект», 2010.– 368 с.
7. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва: Наука, 1971, 288 с.
8. *Нефедов Н. Н.* Дополнительные главы к курсу Методы математической физики. "Нелинейные эллиптические уравнения. Метод дифференциальных неравенств.". Москва: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
9. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. I часть. Москва: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. – 252 с.
10. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва: Наука, 1987, 480 с.
11. *Тихонов А. Н.* Теорема единственности для уравнения теплопроводности// Мат. сборник.— 1935.– т. 42, N 2, – с. 189–216.
12. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Мир, 1968, 428 с.
13. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003, 562 с. — (Университетская серия; Т. 7).
14. *Hu Bei* Blow-up theories for semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathematics, 2018. Springer, Heidelberg, 2011. 125 pp.
15. *Krylov N. V.* Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. Graduate Studies in Mathematics Volume 96 American Mathematical Society. 2000, 374 pp.
16. *Patrizia Pucci, James Serrin* The Maximum Principle. Birkhauser, Basel–Boston–Berlin. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Volume 73. 2007, 240 pp.
17. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1967, 261 pp.

18. *Vicentiu D. Radulescu* Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations: Monotonicity, Analytic, and Variational Methods. Hindawi Publishing Corporation. 2008, 205 pp.
19. *Vazquez J. L.* The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007, 624 pp.
20. *Zhuoqun Wu, Jingxue Yin, Chunpeng Wang* Elliptic and Parabolic Equations. World Scientific. 2006, 425 pp.