МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

М. О. Корпусов

Конспект лекций по курсу «Параболические уравнения» для студентов кафедры математики

Москва
Физический факультет МГУ
2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Данный конспект лекций является компиляцией из книг, указанных в списке литературы (большой частью из книг А. Фридмана [12], Л. К. Эванса [13], Н. В. Крылова [4] и немного из книг О. А. Олейник и А. М. Ильина и А. С. Калашникова [9], [3] и Е. М. Ландиса [7]) и адаптированных к восприятию студентов 4–го курса кафедры математики физического факультета МГУ. В связи с отсутствием необходимых сведений из курса функционального анализа, читаемых в восьмом семестре 4 курса, в конспекте отсутствует рассмотрение слабых решений параболических уравнений. Однако, этот пробел будет ликвидирован в девятом семестре 5 курса, где будут рассмотрены слабые решения нелинейных уравнений в частных производных, когда понятие слабого решения является более необходимым, чем в линейном случае.

Сначала мы детально изучаем уравнение теплопроводности во всем пространстве $\mathbb{R}^N$. Строим решение задачи Коши, доказываем слабый принцип максимума и доказываем результат о единственности решения задачи Коши в классе А. Н. Тихонова. Далее рассматривается слабый и сильный принцип максимума в случае общего параболического оператора с некоторыми следствиями и доказательство единственности решения задачи Коши в классе Тихонова. На основе параболических пространств Гельдера и так называемых оценок Шаудера, вывод некоторых согласно методу Сафонова приводится, методом продолжения по параметру доказана теорема об однозначной разрешимости первой краевой задачи для общего равномерно параболического оператора второго порядка с гельдеровскими коэффициентами и гельдеровской правой частью.

В учебном пособии приведены подробные доказательства задач и упражнений из книг [2], [4], [12] и [17] по ходу работы.

Автор конспекта лекций хочет выразить признательность профессору Н. Н. Нефедову за предложение читать данный спецкурс.

Книга набрана и сверстана в пакете LaTeX2e.

Тематическая лекция 1

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В этой лекции мы рассмотрим уравнение теплопроводности. Для него докажем слабый принцип максимума, рассмотрим задачу Коши и введем класс А. Н. Тихонова, в котором имеет место единственность решения задачи Коши.

§ 1. Уравнение теплопроводности

Как известно из курса ММФ к параболическим уравнениям относится уравнение теплопроводности

$$u_t - \Delta u = 0, \tag{1.1}$$

в котором $u(x,t) \geqslant 0$ — это температура в точке x и в момент времени $t > 0$. Для исследования уравнения теплопроводности (1.1) необходимо построить так называемое *фундаментальное решение,* которое в терминах *обобщенных функций* определяется как решение следующего уравнения в пространстве $\mathcal{D}^{'}(\mathbb{R}^N)$:

$$\mathcal{E}_t - \Delta\mathcal{E} = \delta(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \geqslant 0, \tag{1.2}$$

где $\delta(x,t)$ — это дельта–функция Дирака, а равенство в уравнении (1.2) не является поточечным равенством и его точный смысл будет нам в дальнейшем понятен из курса «Функциональный анализ», который мы только начали изучать. Решение уравнения (1.2) может быть получено при помощи так называемого преобразования Фурье и оно имеет следующий явный вид:

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right), \tag{1.3}$$

где $\vartheta(t)$ — это функция Хевисайда, определенная равенством

$$\vartheta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \geqslant 0; \\ 0, & \text{если} \quad t < 0. \end{cases}$$

Однако, построить фундаментальное решение можно используя симметрию уравнения (1.1) относительно преобразования

$$(x,t) \to (\lambda x, \lambda^2 t).$$

Итак, будем искать *частное решение* уравнения теплопроводности (1.1) в следующем автомодельном виде:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^\alpha} v\,(y)\,, \quad y = \frac{x}{t^\beta}. \tag{1.4}$$

После подстановки этого выражения в уравнение (1.1) мы получим следующее уравнение:

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} (y, D_y) v(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0, \tag{1.5}$$

где $D_y = (\partial_{y_1}, ..., \partial_{y_N})$. Положим в этом уравнении $\beta = 1/2$, тогда получим

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2}(y, D_y) v(y) + \Delta v(y) = 0. \tag{1.6}$$

Упростим это уравнение предположив, что функция $v(y)$ радиальна, т. е.

$$v = w(|y|) \Rightarrow \alpha w + \frac{1}{2} r w^{'} + w^{''} + \frac{N-1}{r} w^{'} = 0, \quad r = |y|. \tag{1.7}$$

Положив в этом уравнении $\alpha = N/2$, получим более простое уравнение

$$(r^{N-1} w^{'})^{'} + \frac{1}{2} (r^N w)^{'} = 0. \tag{1.8}$$

Таким образом,

$$r^{N-1} w^{'} + \frac{1}{2} r^N w = a,$$

где a — константа. Положим $a = 0$, тогда

$$w^{'} = -\frac{1}{2} r w \Rightarrow w(r) = b e^{-r^2/4} \Rightarrow u(x,t) = \frac{b}{t^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

Константу $b > 0$ выберем так, чтобы имело место равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{b}{t^{N/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{(4\pi)^{N/2}}.$$

Итак, с учетом того, что $t \geqslant 0$ мы приходим к фундаментальному решению (1.3).

§ 2. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0, +\infty), \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.2}$$

Докажем, что при некоторых условиях на начальную функцию $u_0(x)$ классическое решение задачи (2.1), (2.2) дается следующей формулой:

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\,dy. \tag{2.3}$$

З а м е ч а н и е 1. Заметим, что мы ниже используем следующее обозначение:

$$\mathbb{C}_b(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{u(z) \in \mathbb{C}(\Omega) : \; |u(z)| \leqslant B < +\infty\right\},$$

где $B = B(u) > 0$ — это постоянная своя для каждого $u(z)$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^M$ — это область и $M \in \mathbb{N}$.

Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 1. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^N)$ *и* $u(x,t)$ *определено формулой* (2.3). *Тогда*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)),$$

$u(x,t)$ *удовлетворяет уравнению* (2.1) *и выполнено предельное свойство*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0),\; x\in\mathbb{R}^N,\; t>0} u(x,t) = u_0(x_0) \quad \textit{для любого} \quad x_0 \in \mathbb{R}^N. \tag{2.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Поскольку функция

$$\frac{1}{t^{N/2}} e^{-|x|^2/(4t)}$$

бесконечное число раз дифференцируема и интегралы от производных в (2.3) равномерно сходятся на любом множестве $\Omega \otimes [\delta, +\infty) \subset \subset \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)$ для любого $\delta > 0$ и для любого замкнутого, ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, имеем $u(x,t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$.

Шаг 2. Кроме того,

$$u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left[\mathcal{E}_t(x-y,t) - \Delta_x \mathcal{E}(x-y,t)\right] u_0(y)\,dy = 0 \tag{2.5}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$.

Шаг 3. Фиксируем $x_0 \in \mathbb{R}^N$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|u_0(y) - u_0(x_0)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |y - x_0| < \delta, \quad y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.6}$$

Пусть $|x - x_0| < \delta/2$, то с учетом равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left(-|y|^2/(4t)\right) dy = 1, \quad t > 0$$

справедлива следующая цепочка выражений:

$$|u(x,t)-u_0(x_0)| = \left| \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y,t)[u_0(y)-u_0(x_0)]\,dy \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t)|u_0(y)-u_0(x_0)|\,dy +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t)|u_0(y)-u_0(x_0)|\,dy = I_1 + I_2. \quad (2.7)$$

Прежде всего справедливы неравенства

$$I_1 \leqslant \varepsilon \int\limits_{B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t) \leqslant \varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y,t) = \varepsilon. \quad (2.8)$$

Кроме того, если

$$|x-x_0| \leqslant \delta/2,\ |y-x_0| \geqslant \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y-x_0| \leqslant |y-x| + |x-x_0| \leqslant |y-x| + \delta/2 \leqslant |y-x| + \frac{1}{2}|y-x_0| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}|y-x_0| \leqslant |y-x|.$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка неравенств:

$$I_2 \leqslant 2 \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u_0(x)| \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(x_0,\delta)} \mathcal{E}(x-y,t)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1}{t^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(x_0,\delta)} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_1}{t^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N\setminus B(x_0,\delta)} \exp\left(-\frac{|y-x_0|^2}{16t}\right) dy =$$

$$= \frac{c_2}{t^{N/2}} \int\limits_{\delta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{r^2}{16t}\right) r^{N-1}\,dr = c_2 \int\limits_{\delta/\sqrt{t}}^{+\infty} \exp(-z^2/16) z^{N-1}\,dz \to +0$$

при $t \to +0$. [1] Таким образом, если

$$|x-x_0| < \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad t > 0 \quad \text{достаточно мало},$$

[1] Здесь мы сделали замену переменных $z = y - x_0$ и перешли к сферической системе координат.

то
$$|u(x,t) - u_0(x_0)| < 2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Нелинейное уравнение Бюргерса [6]. Существует важная связь между уравнением теплопроводности
$$u_t = \mu u_{xx}, \quad t > 0, \quad \mu > 0, \quad u(x,t) \geqslant 0 \tag{2.9}$$
и уравнением Бюргерса
$$v_t + v v_x = \mu v_{xx}, \tag{2.10}$$
устанавливаемая следующей заменой *Коула–Хопфа*
$$v(x,t) = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \ln u(x,t). \tag{2.11}$$

Действительно, учитывая замену (2.11), получим
$$v_t + v v_x - \mu v_{xx} = -2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{u} \left(u_t - \mu u_{xx} \right) \right] = 0 \tag{2.12}$$
в силу уравнения (2.9). Преобразование Коула–Хопфа позволяет найти решение задачи Коши для уравнения Бюргерса.

Действительно, пусть в начальный момент времени
$$v(x,0) = \varphi(x), \tag{2.13}$$
тогда из (2.11) получаем
$$u(x,0) = \Psi(x) = \exp\left[-\frac{1}{2\mu} \int\limits_0^x \varphi(y)\, dy \right]. \tag{2.14}$$
Решение задачи Коши (2.9), (2.14) как мы уже показали ниже дается формулой
$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\mu t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Psi(z) \exp\left[-\frac{(x-z)^2}{4\mu t} \right] dz. \tag{2.15}$$
Используя (2.15), получаем решение задачи Коши (2.10), (2.13) для уравнения Бюргерса в следующем виде:
$$v(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-z}{t} \exp\left\{ -\frac{G(z,x,t)}{2\mu} \right\} dz \Bigg/ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{G(z,x,t)}{2\mu} \right\} dz, \tag{2.16}$$
где
$$G(z,x,t) = \frac{(x-z)^2}{2t} + \int\limits_0^z \varphi(y)\, dy. \tag{2.17}$$

§ 3. Неоднородная задача Коши

Теперь мы рассмотрим следующую задачу:

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{3.1}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.2}$$

Решение неоднородной задачи Коши (3.1), (3.2) будем искать в виде *интеграла Дюамеля*:

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(x-y,t-s) f(y,s)\,dy\,ds =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s)\,dy\,ds \tag{3.3}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$.

З а м е ч а н и е 2. Заметим, что ниже мы используем следующие пространства:

$$\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)),$$

которое является пространством функций $u(x,t)$ таких, что

$$u(x,t),\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i},\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j},\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)), \quad i,j = \overline{1,N}.$$

Кроме того, определим носитель функции $u(x,t)$

$$\operatorname{supp}(u(x,t)) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{(x,t) \in D:\ u(x,t) \neq 0\}}.$$

Символом $\mathbb{C}_0(D)$ мы обозначаем пространство функций $u(x,t) \in \mathbb{C}(D)$, у которых компактен носитель $\operatorname{supp}(u(x,t)) \subset \mathbb{R}^M$, $M \in \mathbb{N}$.

Справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 2. *Пусть функция* $u(x,t)$ *определена формулой* (3.3) *и функция* $f(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty)) \cap \mathbb{C}_0(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$. *Тогда* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$, $u(x,t)$ *удовлетворяет уравнению* (3.1) *и*

$$\lim_{(x,t)\to(x_0,0),\ x\in\mathbb{R}^N,\ t>0} u(x,t) = 0 \quad \text{для каждой точки} \quad x_0 \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Прежде всего сделаем замену переменных в выражении (3.3):

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) f(x-y,t-s)\,dy\,ds. \tag{3.5}$$

Поскольку $f(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$ и финитна, а функция $\mathcal{E} = \mathcal{E}(y,s)$ гладкая в окрестности $s = t > 0$, получаем

$$u_t(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) f_t(x-y,t-s)\,dy\,ds + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x-y,t-s)\,dy\,ds \quad \text{при} \quad i,j = \overline{1,N}.$$

Таким образом, u, u_t, $D_x u$ и $D^2_x u$ [1] принадлежат $\mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$.

Шаг 2. Заметим, что

$$\frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial t} = -\frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial s},$$

$$\Delta_x f(x-y,t-s) = \Delta_y f(x-y,t-s).$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = \\
&= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) f(x-y,t-s)\right] dy\,ds + \\
&\qquad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy = \\
&= \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) f(x-y,t-s)\right] dy\,ds + \\
&\qquad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t) f(x-y,0)\,dy = \\
&= \int\limits_\varepsilon^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) f(x-y,t-s)\right] dy\,ds + \\
&+ \int\limits_0^\varepsilon \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s) \left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) f(x-y,t-s)\right] dy\,ds +
\end{aligned}$$

---

[1] Символами $D_x u$ и $D^2_x u$ мы обозначили любую частную производную первого порядка и любую частную производную второго порядка соответственно.

$$+\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,t)f(x-y,0)\,dy =: I_1 + I_2 + J. \quad (3.6)$$

Прежде всего имеем

$$|I_2| \leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,+\infty)} \left[|f_t(x,t)| + |\Delta_x f(x,t)|\right] \int\limits_0^{\varepsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s)\,dy\,ds \leqslant c_1\varepsilon. \quad (3.7)$$

Справедлива цепочка выражений.

$$\int\limits_{\varepsilon}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s)\frac{\partial f(x-y,t-s)}{\partial s}\,dy\,ds = \int\limits_{\varepsilon}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial\left(\mathcal{E}(y,s)f(x-y,t-s)\right)}{\partial s}\,dy\,ds -$$
$$-\int\limits_{\varepsilon}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y,t-s)\frac{\partial\mathcal{E}(y,s)}{\partial s}\,dy\,ds = \int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,t)f(x-y,0)\,dy -$$
$$-\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)\,dy - \int\limits_{\varepsilon}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y,t-s)\frac{\partial\mathcal{E}(y,s)}{\partial s}\,dy\,ds.$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_1 = \int\limits_{\varepsilon}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s)\left[\left(-\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right) f(x-y,t-s)\right]dy\,ds =$$
$$= \int\limits_{\varepsilon}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^N} f(x-y,t-s)\left[\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right)\mathcal{E}(y,s)\right]dy\,ds +$$
$$+\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)\,dy - \int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,t)f(x-y,0)\,dy =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)\,dy - J, \quad (3.8)$$

поскольку

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y\right)\mathcal{E}(y,s) = 0, \quad s > 0, \quad y\in\mathbb{R}^N.$$

Кроме того, в силу выкладок шага 3 теоремы 1

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N}\mathcal{E}(y,\varepsilon)f(x-y,t-\varepsilon)\,dy \to f(x,t) \quad \text{при} \quad \varepsilon\to+0.$$

Заметим, что с учетом выражения (3.8) из (3.6) мы видим, что

$$I_1 + J = \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,\varepsilon) f(x-y, t-\varepsilon)\, dy.$$

Следовательно, мы доказали, что функция $u(x,t)$, определенная формулой (3.3), удовлетворяет уравнению (3.1).

Шаг 3. Наконец, имеем

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |u(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,+\infty)} |f(x,t)| \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}^N} \mathcal{E}(y,s)\, dy\, ds = \\ = c_1 t \to +0 \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Комбинируя результаты этих двух теорем, мы получим, что при указанных условиях на $u_0(x)$ и $f(x,t)$ одно из классических решений неоднородной задачи Коши

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{3.9}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{3.10}$$

дается формулой

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4t}\right) u_0(y)\, dy + \\ + \int\limits_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right) f(y,s)\, dy\, ds. \tag{3.11}$$

§ 4. Слабый принцип максимума для уравнения теплопроводности

Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$ — это открытое ограниченное множество. Тогда положим

$$D := U \otimes (0,T), \quad \partial' D := B \cup S, \quad S := \partial U \otimes [0,T],$$

$$B_T := U \otimes \{t = T\}, \quad B := U \otimes \{t = 0\}.$$

В дальнейшем мы будем использовать следующую терминологию. Открытое множество $B_T \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t=T\}$ называется *верхней крышкой*, открытое множество $B \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t=0\}$ называется *нижней крышкой*, замкнутое в $\mathbb{R}^{N+1}$ множество S называется *боковой границей* цилин-

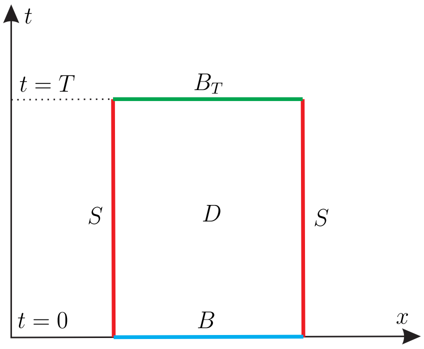


Рис. 1. Область D и множества S, B и B_T.

дрической области D. Полная граница ∂D открытого множества D имеет вид

$$\partial D = S \cup B \cup B_T,$$

но в дальнейшем (в принципе максимума) важную роль играет только часть $\partial' D \subset \partial D$, имеющая вид

$$\partial' D \stackrel{\text{def}}{=} B \cup S,$$

называемая *параболической границей*. Кроме того, важной является часть параболической границы

$$\partial'' D \stackrel{\text{def}}{=} B \cup (S \backslash \partial B_T)\,,$$

где $\partial B_T = \partial U \otimes \{t = T\}$ — это граница верхней крышки $B_T = U \otimes \{t = T\} \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = T\}$.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ — *решение уравнения теплопроводности*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{4.1}$$

тогда

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t) = \max_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t), \tag{4.2}$$

$$\min_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t) = \min_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t). \tag{4.3}$$

Доказательство.

Прежде всего докажем, что *если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *такое решение уравнения теплопроводности, что*

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \partial'' D, \tag{4.4}$$

то отсюда следует, что

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D. \tag{4.5}$$

Шаг 1. Выберем константу $\gamma > 0$ и определим следующую функцию:

$$v(x,t) = u(x,t) - \frac{\gamma}{T-t}. \tag{4.6}$$

Пусть z_γ — это точка в $\overline{D}$, в которой $v(x,t)$ принимает максимальное положительное значение [1]. Прежде всего заметим, что в силу ограниченности решения $u(x,t)$ в D

$$v(z) \to -\infty \quad \text{при} \quad z \to \overline{B}_T = \{x \in \overline{U},\ t = T\}.$$

Поэтому z_γ не может принадлежать замыканию верхней крышке $\overline{B}_T$, т. е.

$$z_\gamma \in D \cup \partial'' D.$$

Шаг 2. Если $v(z_\gamma) \geqslant 0$, то z_γ не может лежать в D, т. е. быть внутренней точкой цилиндрической области D.

□ Действительно, в противном случае имеем

$$\Delta v(z_\gamma) \leqslant 0, \quad v_t(z_\gamma) = 0, \quad i = \overline{1,N}.$$

Поэтому в точке z_γ выполнена следующая цепочка выражений:

$$0 = \Delta u(x,t) - u_t = \Delta v(z_\gamma) - v_t(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t)^2} < 0. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Полученное противоречие доказывает, что либо $v(z_\gamma) < 0$ в D либо $z_\gamma \in \partial'' D$ и тогда в силу (4.4) имеем $v(z_\gamma) \leqslant 0$. Итак, в любом случае имеем

$$v(x,t) \leqslant v(z_\gamma) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow u(x,t) \leqslant \frac{\gamma}{T-t} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Поскольку $u(x,t)$ не зависит от произвольного $\gamma > 0$, то для всякого фиксированного $(x,t) \in D$ устремим $\gamma \to +0$ и получим неравенство

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Шаг 4. Теперь докажем равенство (4.2). Действительно, пусть

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t), \quad v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - M.$$

[1] Если максимальное значение неположительное, то в силу произвольности $\gamma > 0$ мы предельным переходом $\gamma \to +0$ для каждого фиксированного $(x,t) \in D$ приходим к утверждению теоремы.

Тогда функция $v(x,t)$ удовлетворяет тоже уравнению теплопроводности

$$\Delta v - v_t = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \quad \text{и} \quad v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Следовательно, по доказанному имеем

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \Rightarrow u(x,t) \leqslant M \Rightarrow \\ \Rightarrow \max_{(x,t)\in\overline{D}} u(x,t) = M = \max_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t).$$

Шаг 5. Теперь докажем равенство (4.3). Определим следующую величину:

$$m \stackrel{\text{def}}{=} \min_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t).$$

Рассмотрим функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - m \Rightarrow v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D.$$

Итак, функция $-v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta(-v(x,t)) - (-v(x,t))_t = 0 \quad \text{в} \quad D,$$

$$-v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial' D.$$

Следовательно, по–доказанному имеем

$$-v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow v(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Итак,

$$u(x,t) \geqslant m \quad \text{в} \quad D.$$

Теорема доказана.

Замечание 4. Отметим, что решение $u(x,t) \neq const$ уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u$$

может достигать глобального минимального и глобального максимального значений на $\overline{D}$ во внутренних точках области D. Действительно, рассмотрим следующий пример:

Пример. [9] Рассмотрим область $D = \{|x| < 1\} \otimes (0,T)$, в которой рассматривается уравнение теплопроводности

$$u_t = u_{xx}. \tag{4.7}$$

Пусть $t_0 \in (0,T)$, $x_0 = 2$ и введем следующую функцию:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad (x,t) \in \{|x| \leqslant 1\} \otimes [0,t_0]; \\ \mathcal{E}(x,t;x_0,t_0), & \text{если} \quad (x,t) \in \{|x| \leqslant 1\} \otimes (t_0,T], \end{cases} \tag{4.8}$$

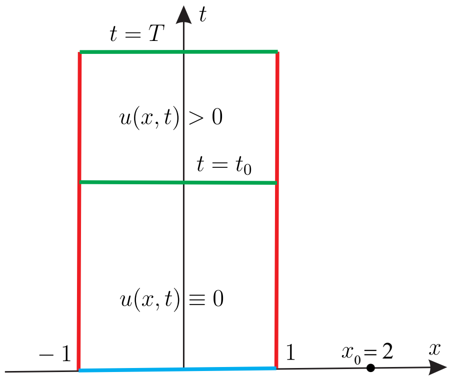


Рис. 2. К примеру.

где

$$\mathcal{E}(x,t;x_0,t_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vartheta(t-t_0)}{\sqrt{4\pi(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{|x-x_0|^2}{4(t-t_0)}\right\}, \quad x_0 = 2.$$

Ясно, что такая функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности (4.8), поскольку сшивка при $t = t_0$ является бесконечное число раз гладкой, так как $x_0 = 2$. Минимальным значением функции $u(x,t)$ является 0 и это минимальное значение достигается внутри области D. Заметим, однако, что тем не менее при $t \leqslant t_0$ функция $u(x,t) = 0$. И этот результат может быть получен в общем виде и носит название *сильного принципа максимума*.

Замечание 5. Отметим, что этот пример не означает, что нарушена единственность.

Замечание 6. Заметим, что в случае *эллиптического* оператора минимальное и максимальное значения решение $u(x) \not\equiv const$ уравнения Лапласа

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{в} \quad D$$

не может достигаться внутри области D. В этом серьезное отличие эллиптического случая от параболического.

Замечание 7. Фактически, используя методику доказательства на шагах 1–3 может быть доказано следующее первое утверждение: *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Delta u - u_t \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad D, \tag{4.9}$$

$$u \leqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial' D, \tag{4.10}$$

то $u \leqslant 0$ *в* D. Применением этого утверждения к функции $-u(x,t)$, получим также следующее второе утверждение: *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\Delta u - u_t \leqslant 0 \quad \textit{в} \quad D, \tag{4.11}$$

$$u \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial' D, \tag{4.12}$$

то $u \geqslant 0$ *в* D.

Прежде, чем рассматривать ниже следующие задачи, применения принципа максимума, мы предлагаем следующий рисунок цилиндрической области $D = (a, b) \otimes (0, t_0)$, причем

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{x = a\} \otimes \{0 \leqslant t \leqslant t_0\} \cup \{x = b\} \otimes \{0 \leqslant t \leqslant t_0\},$$

$$B \stackrel{\text{def}}{=} \{a < x < b\} \otimes \{t = 0\},$$

$$B_{t_0} \stackrel{\text{def}}{=} \{a < x < b\} \otimes \{t = t_0\},$$

причем $\partial D = S \cup B \cup B_{t_0}$, а *нормальная граница* или *параболическая граница* $\partial' D = S \cup B$. Напомним, что область $B \subset \mathbb{R}^1 \otimes \{t = 0\}$ называется *нижней крышкой*, область $B_{t_0} \subset \mathbb{R}^1 \otimes \{t = t_0\}$ называется *верхней крышкой*, а множество S называется *боковой границей*. Множества S, B и B_{t_0} попарно непересекаются.

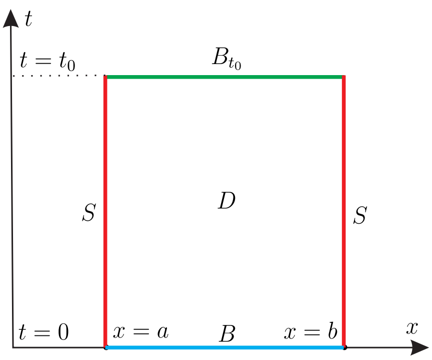


Рис. 3. К задачам.

Замечание 8. Заметим, что множество S является замкнутым и не связным в $\mathbb{R}^2$.

Задача 1. [2] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{D})$ — это решение в $\overline{D} = [0,1] \otimes [0,1]$ задачи

$$u_t = u_{xx} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{D},$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0 \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$u|_{t=0} \not\equiv 0 \quad \text{при} \quad x \in (0,1),$$

причем выполнены условия согласования $u(0,0) = u(1,0) = 0$. Может ли функция

$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^1 u^2(x,t)\,dx$$

иметь максимум при $t \in (0,1)$?

Решение. Итак, предположим, что в некоторой точке $t_0 \in (0,1)$ достигается максимум функции $f(t)$. Поскольку $f(t) \geqslant 0$ и решение $u(x,t) \neq 0$, то

$$f(t_0) > 0.$$

Тогда имеет место цепочка выражений

$$f^{'}(t_0) = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 u(x,t_0)u_t(x,t_0)\,dx = 0 \Rightarrow \int\limits_0^1 u(x,t_0)u_{xx}(x,t_0)\,dx = 0.$$

Интегрируя по частям в последнем равенстве, с учетом граничных условий в рассматриваемом классе гладкости получим равенство

$$-\int\limits_0^1 (u_x(x,t_0))^2\,dx = 0 \Rightarrow u_x(x,t_0) = 0 \Rightarrow u(x,t_0) = const \quad \forall x \in [0,1],$$

из которого опять в силу граничных условий получим $u(x,t_0) = 0$, что в свою очередь означает

$$f(t_0) = \int\limits_0^1 u^2(x,t_0)\,dx = 0.$$

Но это противоречит определению точки $t_0 \in (0,1)$.

Задача 2. [2] Пусть $u(x,t)$ — это регулярное решение в $D = (0,\pi) \otimes (0,+\infty)$ задачи

$$u_t = u_{xx}, \quad u|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = 0, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{4.13}$$

где $\varphi(0) = \varphi^{'}(\pi) = 0$. Проверить, что

1. Выполнено ли неравенство

$$\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| \leqslant \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|? \tag{4.14}$$

2. Верно ли, что

$$\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| \leqslant \frac{1}{2} \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|? \tag{4.15}$$

Решение. Для того чтобы в дальнейшем воспользоваться принципом максимума, нам нужно получить эквивалентную задачу, но с условиями Коши–Дирихле. С этой целью продолжим функцию $u(x,t)$

четным образом через точку $x = \pi$ на множество $x \in (\pi, 2\pi)$, т. е. положим

$$\widetilde{u}(x,t) = u(2\pi - x, t) \quad \text{при} \quad x \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \widetilde{u}_x(\pi,t) = u_x(\pi,t) = 0.$$

Построенная функция является решением краевой задачи

$$\widetilde{u}_t = \widetilde{u}_{xx}, \quad x \in (0, 2\pi), \quad t > 0, \tag{4.16}$$

$$\widetilde{u}|_{x=0} = \widetilde{u}|_{x=2\pi} = 0, \quad \widetilde{u}|_{t=0} = \widetilde{\varphi}, \tag{4.17}$$

где функция $\widetilde{\varphi}(x)$ четным образом продолженная на интервал $(\pi, 2\pi)$. Задачи (4.13) и (4.16), (4.17) эквивалентны. Теперь мы можем применить принцип максимума и получить, что максимум модуля функции $\widetilde{u}(x,t)$ достигается при $t = 0$, поскольку на боковой границе при $x = 0$ и $x = 2\pi$ $\widetilde{u}(x,t) = 0$. Итак,

$$\sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| = \sup_{0<x<2\pi} |\widetilde{u}(x,1)| \leqslant \sup_{0<x<2\pi} |\widetilde{\varphi}(x)| = \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)|. \tag{4.18}$$

Тем самым утверждение (4.14) доказано.

Неравенство (4.15) неверно. Действительно, возьмем

$$\varphi(x) = \sin(x/2),$$

которому соответствует решение [1])

$$u(x,t) = e^{-t/4}\sin(x/2) \Rightarrow \sup_{0<x<\pi} |u(x,1)| = e^{-1/4}, \quad \sup_{0<x<\pi} |\varphi(x)| = 1.$$

Заметим, что

$$e^{-1/4} > \frac{1}{2},$$

поскольку $e < 2^4$.

Задача 3. [2] Пусть $D = (0,1) \otimes (0,1)$. Существует ли функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ — решение следующей первой краевой задачи:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{в} \quad D, \tag{4.19}$$

$$u|_{t=0} = 2\sin \pi x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.20}$$

$$u|_{x=0} = \sin \pi t, \quad u|_{x=1} = \sin \pi t + 2\sin \pi t \quad \text{при} \quad 0 < t \leqslant 1, \tag{4.21}$$

$$u|_{t=1} = 3\sin \pi x \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1? \tag{4.22}$$

Решение. Эта задача для самостоятельного решения.

Задача 4. [2] Существует ли решение $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\overline{Q})$ задачи

$$u_t = u_{xx} + 1 \quad \text{в} \quad \overline{Q}, \quad Q = \Big\{(x,t):\ x^2 + t^2 < 1\Big\}, \tag{4.23}$$

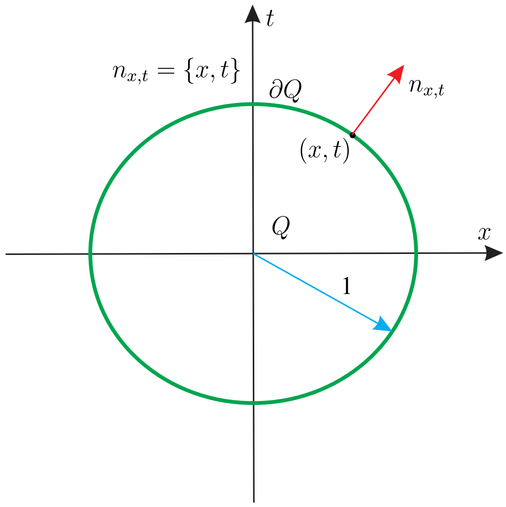


Рис. 4. К задаче 4.

$$xu_x = tu \quad \text{при} \quad (x, t) \in \partial Q = \Big\{(x, t) : \ x^2 + t^2 = 1\Big\}? \tag{4.24}$$

Решение. Используя формулу Грина в $\mathbb{R}^2$, получим равенства

$$\int\limits_Q u_t \, dx \, dt = \int\limits_{\partial Q} u(x, t) \cos(n_{x,t}, e_t) \, dl, \tag{4.25}$$

$$\int\limits_Q u_{xx} \, dx \, dt = \int\limits_{\partial Q} u_x(x, t) \cos(n_{x,t}, e_x) \, dl, \tag{4.26}$$

где $n_{x,t}$ — это внешняя нормаль в точке $(x, t) \in \partial Q$. Легко проверить, что

$$n_{x,t} = (x, t), \quad \cos(n_{x,t}, e_t) = t, \quad \cos(n_{x,t}, e_x) = x.$$

Поэтому интегрируя обе части уравнения (4.23), мы получим равенство

$$\int\limits_{\partial Q} u(x, t) t \, dl = \int\limits_{\partial Q} u_x(x, t) x \, dl + 2\pi,$$

а с учетом граничного условия (4.24) мы получим противоречивое равенство

$$0 = 2\pi.$$

Задача 5. [2] Пусть функции $u_k(x, t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D_k) \cap \mathbb{C}(\overline{D}_k)$, $k = 1, 2$, являются решениями в

$$D_k \stackrel{\text{def}}{=} (-k, k) \otimes (0, T)$$

[1]) Полученное методом разделенных переменных.

краевых задач

$$(u_k)_t = (u_k)_{xx}, \quad u_k|_{x=\pm k} = 0, \quad u_k|_{t=0} = \varphi(x), \quad |x| \leqslant k. \tag{4.27}$$

Здесь $\varphi(x) \in \mathbb{C}^{(1)}([-2,2])$, $\varphi(x) \geqslant 0$ при $|x| \leqslant 1$ и $\varphi(x) = 0$ при $1 \leqslant |x| \leqslant 2$, $\varphi(x) \not\equiv 0$. Доказать, что

$$u_1(x,t) \leqslant u_2(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in [-1,1] \otimes (0,T]. \tag{4.28}$$

Решение. Прежде всего заметим, что в силу принципа максимума $u_k(x,t) \geqslant 0$ в D_k. Рассмотрим разность

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u_2(x,t) - u_1(x,t).$$

Введенная функция удовлетворяет задаче

$$v_t = v_{xx}, \quad v|_{x=\pm 1} > 0, \quad v|_{t=0} = 0. \tag{4.29}$$

В силу принципа максимума имеем $v(x,t) \geqslant 0$ в D, т. е. выполнено неравенство (4.28).

Задача 6*. [1] [2] Функция $u(x,t) \not\equiv const$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = u_{xx}$$

в области $D \equiv \{(x,t):\ 0 < t < T,\ 0 < x < 5 - \exp(-t)\}$. Доказать, что глобальный максимум этой функции на $\overline{D}$ не может достигаться ни во внутренних точках области D, ни при $t = T$.

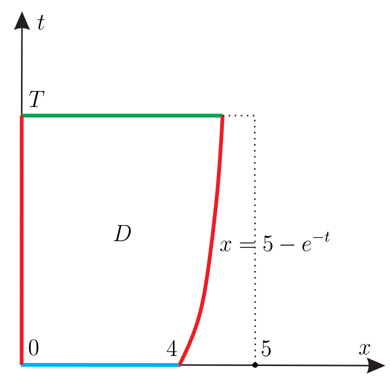


Рис. 5. К задаче 6.

Указание. Проследите доказательство теоремы 3. Можно и в данном случае не цилиндрической области доказать принцип максимума рассматривая функцию

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\gamma}{T-t}.$$

[1] Эта задача повышенной сложности.

Р е ш е н и е. Эта задача для самостоятельной работы.

З а д а ч а 7. [2], [4] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ является решением уравнения

$$u_t = \Delta u + f(x), \quad f(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D, \tag{4.30}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D. \tag{4.31}$$

Докажите, что $u_t(x,t) \geqslant 0$ в D.

Р е ш е н и е. Итак, в области D выполнено неравенство

$$\Delta u - u_t \leqslant 0,$$

тогда с учетом второго утверждения в замечании 7 и равенства (4.31) получим, что выполнено неравенство

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{4.32}$$

Рассмотрим функцию

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t+\varepsilon) - u(x,t), \quad \varepsilon > 0. \tag{4.33}$$

Эта функция удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$w_t = \Delta w \quad \text{в} \quad D_\varepsilon = U \otimes (0, T-\varepsilon), \tag{4.34}$$

причем

$$w(x,t) = u(x,t+\varepsilon) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial^{'} D_\varepsilon, \tag{4.35}$$

поскольку

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad \partial^{'} D \supset \partial^{'} D_\varepsilon.$$

Применяя теперь второе утверждение из замечания 7, получим

$$w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_\varepsilon \Rightarrow \frac{u(x,t+\varepsilon) - u(x,t)}{\varepsilon} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D_\varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{u(x,t+\varepsilon) - u(x,t)}{\varepsilon} = u_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{4.36}$$

З а д а ч а 8. В а р и а н т н е р а в е н с т в а Ч е б ы ш е в а. [4] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ является решением дифференциального неравенства

$$\Delta u - u_t \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,T). \tag{4.37}$$

Предположим, что

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes [0,T], \tag{4.38}$$

$$u(x,t) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{B} = \overline{\Omega} \otimes \{t = 0\}. \tag{4.39}$$

Пусть $v = v(x)$ — это гладкая неотрицательная функция в $\overline{\Omega}$ такая, что

$$\Delta v(x) \leqslant -1 \quad \text{при} \quad x \in \Omega. \tag{4.40}$$

Доказать, что

$$u(x,t) \leqslant \frac{v(x)}{t} \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \tag{4.41}$$

Решение. Прежде всего заметим, что в силу принципа максимума имеем [1])

$$u(x,t) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D. \tag{4.42}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную функцию:

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - \frac{v(x)}{t}. \tag{4.43}$$

Прежде всего применим к этой функции оператор

$$\Delta - \frac{\partial}{\partial t}$$

и получим следующее выражение:

$$\Delta w - w_t = \Delta u - u_t - \frac{\Delta v(x)}{t} - \frac{v(x)}{t^2} \geqslant \\ \geqslant -\frac{\Delta v(x)}{t} - \frac{v(x)}{t^2} \geqslant \frac{1}{t^2}\left(t - v(x)\right). \tag{4.44}$$

Разобьем область D на три части

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3,$$

$$D_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t) \in D: \ v(x) > t\}, \quad D_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t) \in D: \ v(x) < t\},$$
$$D_3 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x,t) \in D: \ v(x) = t\}.$$

На множестве D_1 выполнено неравенство

$$\frac{v(x)}{t} > 1 \geqslant u(x,t) \Rightarrow w(x,t) \leqslant 0. \tag{4.45}$$

На множестве $D_2 \cup D_3$ в силу (4.44) выполнено неравенство

$$v(x) \leqslant t \Rightarrow \Delta w - w_t \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_2 \cup D_3. \tag{4.46}$$

Теперь заметим, что в силу определения (4.43) функции $w(x,t)$ и неравенств (4.38), (4.39) на параболической границе $\partial' D = S \cup \overline{B}$ области D выполнено неравенство

$$w(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D. \tag{4.47}$$

[1]) Нужно применить утверждение 1 замечания 7 к функции $u(x,t) - 1$.

Часть границы множества $D_2 \cup D_3$, не входящая в $\partial' D$ совпадает с $D_3 \backslash D$ и на множестве D_3 имеет место следующее неравенство:

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{v(x)}{t} \leqslant 1 - 1 = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_3. \tag{4.48}$$

Итак, в силу утверждения 1 из замечания 7 мы из неравенств (4.46), (4.47) и (4.48) получим неравенство

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{v(x)}{t} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_2. \tag{4.49}$$

Следовательно, объединяя неравенства (4.45), (4.48) и (4.49), получим неравенство

$$w(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D.$$

З а д а ч а 9. [2] Справедлив ли принцип максимума в области $D = \Omega \otimes (0,T)$ для обратно параболического уравнения

$$u_t + \Delta u = 0 \tag{4.50}$$

в том виде, в каком он справедлив для уравнения теплопроводности?

О т в е т. Нет.

Р е ш е н и е. Глобальный максимум и минимум функции $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ может достигаться при $(x,t) \in B_T \cup S$. Таким образом, в *принципе максимума* для уравнения (4.50) нужно заменить B на B_T.

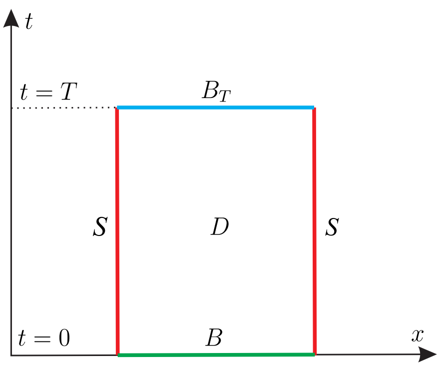


Рис. 6. К задаче 9.

З а д а ч а д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я 1. Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ и, кроме того, $f(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$. Рассмотрите неоднородное уравнение теплопроводности

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T),$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — это ограниченная область с гладкой границей. Докажите, что имеют место неравенства

$$\min_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t) - T \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)| \leqslant u(x,t) \leqslant \\ \leqslant \max_{(x,t)\in\partial' D} u(x,t) + T \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)|.$$

Указание. Необходимо рассмотреть следующие две функции:

$$v_1(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) + tK, \quad v_2(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - tK,$$

$$K \stackrel{\text{def}}{=} \max_{(x,t)\in\overline{D}} |f(x,t)|.$$

§ 5. Слабый принцип максимума для задачи Коши

Сейчас мы рассмотрим важный *слабый принцип максимума* для задачи Коши для уравнения теплопроводности, который позволит доказать, как его следствие, единственность решения задачи Коши. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 4. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,T]) \cap \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,T])$ *— это решение задачи Коши*

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{5.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{5.2}$$

удовлетворяющее условию роста

$$u(x,t) \leqslant M e^{\beta|x|^2} \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T], \tag{5.3}$$

где $M > 0$ *и* $\beta > 0$ *— это константы. Тогда*

$$\sup_{(x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes[0,T]} u(x,t) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} g(x). \tag{5.4}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего допустим, что

$$4\beta T < 1 \Rightarrow 4\beta(T+\varepsilon) < 1 \tag{5.5}$$

при некотором малом $\varepsilon > 0$. Фиксируем $y \in \mathbb{R}^N$, $\mu > 0$ и определим функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \tag{5.6}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t > 0$. Прямым вычислением можно показать [1], что

$$v_t - \Delta v = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]. \tag{5.7}$$

Шаг 2. Фиксируем $r > 0$ и положим

$$U \stackrel{\text{def}}{=} B(y,r), \quad D = B(y,r) \otimes (0,T), \quad B(y,r) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{x \in \mathbb{R}^N : \ |x-y| < r\right\}.$$

В силу теоремы 3 имеем

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} v(x,t) = \max_{(x,t)\in\partial' D} v(x,t). \tag{5.8}$$

Шаг 3. Если $x \in \mathbb{R}^N$ и $t = 0$ то

$$v(x,0) = u(x,0) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{N/2}} \exp\left(\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}\right) \leqslant u(x,0) = u_0(x). \tag{5.9}$$

Если $(x,t) \in S$, т. е. $|x-y| = r$ и $t \in [0,T]$, то

$$|x| \leqslant |x-y| + |y| = r + |y|$$

и имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} v(x,t) = u(x,t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \leqslant \\ \leqslant M \exp\left(\beta|x|^2\right) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}\right) \leqslant \\ \leqslant M \exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{N/2}} \exp\left(\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}\right). \end{aligned} \tag{5.10}$$

В силу неравенства (5.5) при некотором $\gamma > 0$ имеет место равенство

$$\frac{1}{4(T+\varepsilon)} = \beta + \gamma.$$

Пусть

$$c_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x) \in (-\infty, +\infty). \tag{5.11}$$

Продолжим оценивать правую часть неравенства (5.10) и получим

$v(x,t) \leqslant$

[1] Поскольку $t \in [0,T]$, а $\varepsilon > 0$, то сингулярности как у фундаментального решения у функции $v(x,t)$ на сегменте $[0,T]$ нет.

$$\leqslant M\exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \mu(4(\beta+\gamma))^{N/2}\exp((\beta+\gamma)r^2) \to -\infty \quad (5.12)$$

при $r \to +\infty$. Следовательно, при достаточно большом $r > 0$ будет выполнено неравенство

$$M\exp\left(\beta(|y|+r)^2\right) - \mu(4(\beta+\gamma))^{N/2}\exp((\beta+\gamma)r^2) \leqslant c_1 = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x).$$

Итак, при некотором таком $r > 0$ будем иметь

$$v(x,t) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x). \quad (5.13)$$

Шаг 4. Итак, в силу (5.9), (5.13) и (5.8) имеем

$$v(y,t) \leqslant \sup_{(x,t)\in D} v(x,t) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x)$$

для всех $y \in \mathbb{R}^N$ и $t \in [0,T]$. Переходя к пределу при $\mu \to +0$ мы получим утверждение теоремы.

Шаг 5. Если условие (5.5) не выполняется, тогда нужно применить схему доказательства на временных интервалах

$$[0,T_1], \quad [T_1, 2T_1], ..., [(n-1)T_1, nT_1], ...,$$

при $T_1 = 1/(8\beta)$. При этом на втором шаге, например, начальным условием является функция $u(x,T_1)$. И мы в результате получим следующую цепочку неравенств:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x) \geqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u(x,T_1) \geqslant \cdots \geqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u(x,nT_1) \geqslant u(x,t)$$

при $t \in [nT_1, (n+1)T_1]$ и $x \in \mathbb{R}^N$.

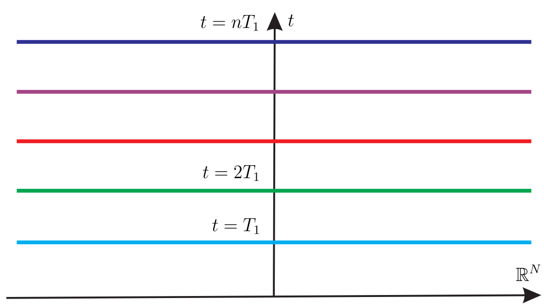


Рис. 7. К шагу 5.

Теорема доказана.

Следствие 1. *При условиях теоремы и неравенства*

$$u(x,t) \geqslant -Me^{\beta|x|^2} \quad \text{при} \quad x\in\mathbb{R}^N, \quad t\in[0,T]$$

выполнено следующее равенство:

$$\inf_{(x,t)\in\mathbb{R}^N} u(x,t) = \inf_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x).$$

Доказательство. Действительно, достаточно рассмотреть вместо функции $u(x,t)$ функцию $-u(x,t)$.

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть выполнено неравенство*

$$|u(x,t)| \leqslant Me^{\beta|x|^2} \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T]$$

при $M > 0$ *и* $\beta > 0$. *Если* $u(x,0) \leqslant 0$, *то* $u(x,t) \leqslant 0$ *для всех* $(x,t) \in \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$. *Если* $u(x,0) \geqslant 0$, *то* $u(x,t) \geqslant 0$ *для всех* $(x,t) \in \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$.

Доказательство. Действительно, в силу теоремы справедлива следующая цепочка неравенств:

$$u(x,t) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}^N} u_0(x) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T].$$

Аналогично в силу следствия 1 приходим ко второму утверждению.

Следствие доказано.

Задача 10. [4] Пусть функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ удовлетворяет условию роста (5.3) и является решением задачи Коши

$$u_t = \Delta u \quad \text{в} \quad D = (0,T) \otimes \mathbb{R}^N, \quad u(x,0) = u_0(x) \quad \text{в} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (5.14)$$

причем начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leqslant a|x-y|^\delta, \quad \delta \in (0,1). \quad (5.15)$$

Тогда

$$|u(x,t) - u(y,t)| \leqslant a|x-y|^\delta \quad \text{при} \quad t \in (0,T). \quad (5.16)$$

Кроме того,

$$|u(x,t) - u(x,s)| \leqslant b|t-s|^{\delta/2} \quad \text{при} \quad t,s \in (0,T), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (5.17)$$

Решение. Доказательство проведем за несколько шагов.

Шаг 1. Прежде всего введем функцию

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x+y,t) - u(x,t) \quad (5.18)$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}^N$. Эта функция удовлетоворяет уравнению

$$w_t = \Delta w, \quad w(x,0) = u_0(x+y) - u_0(x), \quad |w(x,0)| \leqslant a|y|^\delta.$$

Введем две функции

$$v_1(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x,t) - a|y|^\delta, \quad v_2(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x,t) + a|y|^\delta.$$

Эти функции удовлетворяют задачам

$$v_{kt} = \Delta v_k, \quad k = 1, 2,$$

$$v_1(x,0) \leqslant 0, \quad v_2(x,0) \geqslant 0.$$

Применяя слабый принцип максимума (следствие 2), мы получим, что

$$v_1(x,t) \leqslant 0, \quad v_2(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D.$$

Следовательно,

$$|w(x,t)| \leqslant a|y|^\delta. \tag{5.19}$$

Шаг 2. Теперь мы можем доказать неравенство (5.17). Действительно, введем следующую функцию:

$$w(x,t;y,s) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t+s) - u(y,s). \tag{5.20}$$

При $t = 0$ по–доказанному имеем

$$|w(x,0;y,s)| = |u(x,s) - u(y,s)| \leqslant a|x-y|^\delta. \tag{5.21}$$

Заметим, что из арифметического неравенства Юнга

$$a_1 a_2 \leqslant \frac{1}{q_1} a_1^{q_1} + \frac{1}{q_2} a_2^{q_2}, \quad \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = 1, \quad a_1, a_2 \geqslant 0$$

вытекает арифметическое трехпараметрическое неравенство Юнга

$$a_1 a_2 \leqslant \varepsilon a_1^{q_1} + \mu(\varepsilon) a_2^{q_2}, \quad \mu(\varepsilon) = \frac{1}{q_2 (q_1 \varepsilon)^{q_2/q_1}}. \tag{5.22}$$

Применяя неравенство (5.22) при

$$q_1 = \frac{2}{\delta}, \quad q_2 = \frac{2}{2-\delta},$$

мы получим следующее неравенство:

$$a|x-y|^\delta \leqslant \varepsilon |x-y|^2 + \mu(\varepsilon), \quad \mu = \mu(\varepsilon) = \frac{c_1}{\varepsilon^{\delta/(2-\delta)}}, \quad \delta \in (0,1). \tag{5.23}$$

Используя это неравенство из (5.21), мы получим следующее неравенство:

$$-\varepsilon|x-y|^2 - \mu(\varepsilon) \leqslant u(x,s) - u(y,s) \leqslant \varepsilon |x-y|^2 + \mu(\varepsilon), \tag{5.24}$$

причем выполнено двустороннее неравенство

$$-\varepsilon v(x,0;y) - \mu(\varepsilon) \leqslant w(x,0;y,s) \leqslant \varepsilon v(x,0;y) + \mu(\varepsilon), \tag{5.25}$$

где функция

$$v(x,t;y) = |x-y|^2 + 2Nt$$

при фиксированном $y \in \mathbb{R}^N$ является решением уравнения теплопроводности. Поэтому в силу принципа максимума [1)] получим, что имеет место неравенство

$$-\varepsilon(|x-y|^2 + 2Nt) - \mu(\varepsilon) \leqslant w(x,t;y,s) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon(|x-y|^2 + 2Nt) + \mu(\varepsilon). \tag{5.26}$$

Шаг 3. Положим в этом неравенстве $x = y$ и получим неравенства

$$-\varepsilon 2Nt - \mu(\varepsilon) \leqslant u(x,t+s) - u(x,s) \leqslant \varepsilon 2Nt + \mu(\varepsilon). \tag{5.27}$$

Осталось выбрать оптимальное $\varepsilon > 0$. Возьмем

$$\varepsilon = \frac{1}{t^\alpha}.$$

Рассмотрим выражение

$$2Nt^{1-\alpha} + c_1 t^{\alpha\delta/(2-\delta)}, \tag{5.28}$$

в котором мы положим

$$1 - \alpha = \alpha\frac{\delta}{2-\delta} \Rightarrow \alpha = \frac{2-\delta}{2}.$$

В результате выражение (5.28) примет следующий вид:

$$(2N + c_1)t^{\delta/2}. \tag{5.29}$$

Итак, неравенства (5.27) примут следующий вид:

$$|u(x,t+s) - u(x,s)| \leqslant bt^{\delta/2}, \quad b = 2N + c_1. \tag{5.30}$$

Замечание 9. Комбинируя неравенства (5.16) и (5.17) мы приходим к следующему неравенству:

$$|u(x,t) - u(y,s)| \leqslant c_2\left(|x-y|^\delta + |t-s|^{\delta/2}\right). \tag{5.31}$$

И это итоговое неравенство является следствием лишь условия (5.15) на начальную функцию $u_0(x)$ и принципа максимума!

[1)] Нужно опять рассмотреть две функции: $w_1 = w - \varepsilon v - \mu(\varepsilon)$ и $w_2 = w + \varepsilon v + \mu(\varepsilon)$, и воспользоваться следствием 2.

§ 6. Единственность решения задачи Коши

Теперь мы можем доказать важный результат, доказанный А. Н. Тихоновым [11], о единственности решения задачи Коши при дополнительном условии, которое мы уже ввели, на рост решения при $|x| \to +$ $+\infty$, называемым условием А. Н. Тихонова. Справедливо следующее утверждение:

Т е о р е м а 5. *Пусть* $u_0(x) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N)$, $f(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,T])$. *Тогда существует не более одного решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,T]) \cap$ $\cap\, \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,T])$ *задачи Коши*

$$u_t - \Delta u = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{6.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{6.2}$$

в классе А. Н. Тихонова

$$|u(x,t)| \leqslant M \exp\left(\beta |x|^2\right) \quad \textit{при} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad t \in [0,T], \tag{6.3}$$

где $M > 0$ *и* $\beta > 0$ *— константы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть утверждение не выполнено и существует два различных решения $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда рассмотрим функцию

$$w_1(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

которая удовлетворяет соответствующей однородной задаче Коши и условию

$$w_1(x,t) \leqslant 2M \exp\left(\beta |x|^2\right), \quad w_1(x,0) = 0,$$

причем константа M значения не имеет. Поэтому в силу теоремы 4 имеем

$$w_1(x,t) \leqslant 0.$$

Теперь рассмотрим функцию

$$w_2(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u_2(x,t) - u_1(x,t) = -w_1(x,t)$$

и точно также получим, что

$$w_2(x,t) \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$u_1(x,t) = u_2(x,t).$$

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Замечание о классе единственности А. Н. Тихонова. Отметим, что есть результаты, которые говорят о том, что существует бесконечно много решений однородной задачи Коши

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T), \tag{6.4}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{6.5}$$

А. Н. Тихонов предложил пример к теореме единственности о том, что условие роста А. Н. Тихонова нельзя заменить на более слабое вида

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^N} |u(x,t)| \exp\left[-k|x|^{2+\varepsilon}\right] dx\, dt < +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{6.6}$$

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t \in [0,1], \quad u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{6.7}$$

Будем искать решения задачи Коши (6.7) в классе

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^1} |u(x,t)| \exp\left[-k|x|^{2+\varepsilon}\right] dx\, dt < +\infty \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \tag{6.8}$$

В качестве решения возьмем ряд следующего вида:

$$u(x,t) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(t)}{(2m)!} x^{2m}. \tag{6.9}$$

Можно проверить, что формально ряд (6.9) является решением уравнения теплопроводности.

Известно, что для любого $\delta > 0$ существуют бесконечно дифференцируемые функции $f(t)$, тождественно не равные нулю, удовлетворяющие условиям

$$f(t) = 0, \quad \text{если} \quad t < 0 \quad \text{и} \quad t > 1, \qquad \left|f^{(m)}(t)\right| \leqslant C^m m^{(1+\delta)m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ряд (6.9) и его производные первого порядка по t и второго порядка по x сходится равномерно в любой ограниченной области переменных (x,t) при условии $\delta < 1$. При этом имеет место следующие неравенства:

$$|u(x,t)| \leqslant C_1 + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{C_2^m x^{2m}}{m^{2m-(1+\delta)m}} \leqslant C_3 \exp\left[C_4 |x|^{2/(1-\delta)}\right].$$

Каждое такое решение, за исключением $u(x,t) \equiv 0$, растет «очень быстро» при $|x| \to +\infty$.

Задача 11. [2] Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^1 \otimes (0,T)) \cap \mathbb{C}_b(\mathbb{R}^1 \otimes [0,T])$ — неотрицательное ограниченное решение уравнения теплопроводности

$$u_t = \Delta u \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^3 \otimes (0,T), \tag{6.10}$$

причем

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,T). \tag{6.11}$$

Доказать, что $u(x,t) = 0$ в слое $\mathbb{R}^3 \otimes (0,T)$.

Решение. Это задача для самостоятельного решения.

Тематическая лекция 2

ПРИНЦИП МАКСИМУМА

В этой лекции мы докажем сильный принцип максимума и рассмотрим его приложения.

§ 1. Области. Верхняя и нижняя крышки

Давайте сформулируем некоторые понятия и определения, связанные с рассмотрением областей $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, где изучаются решения параболических уравнений.

Итак, ограниченная область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, изображенная на следующем рисунке имеет границу ∂D, состоящую из следующих частей: из

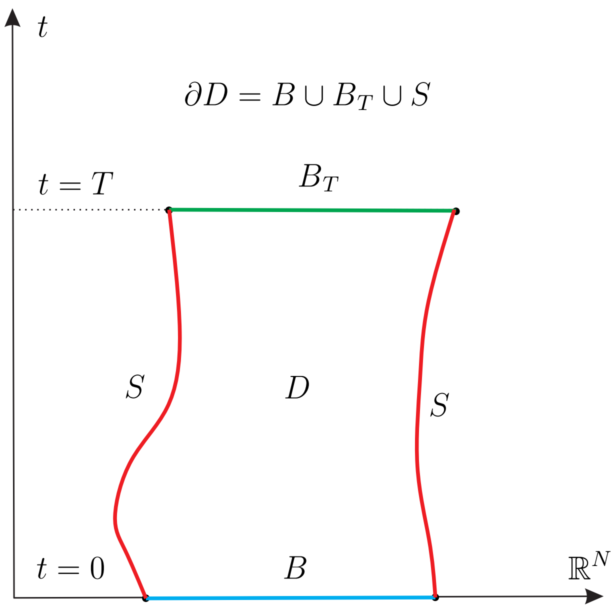


Рис. 8. Граница ∂D области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

основания B при $t = 0$, называемого нижней крышкой

$$\overline{B} = B \cup \partial B, \quad \overline{B} \stackrel{\text{def}}{=} \partial D \cap \{t = 0\},$$

из верхней крышки B_T

$$\overline{B}_T = B_T \cup \partial B_T, \quad \overline{B}_T \stackrel{\text{def}}{=} \partial D \cap \{t = T\}$$

и из боковой границы

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \partial D \setminus (B \cup B_T) = (\partial D \cap \{0 < t < T\}) \cup \partial B_T \cup \partial B.$$

При этом мы в основном рассматриваем такие области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, что множества

$$B \quad \text{и} \quad B_T$$

являются областями в соответствующих гиперплоскостях $t = 0$ и $t = T$. Символом $\overline{B}$ мы обозначили замыкание в $\mathbb{R}^N \otimes \{t = 0\}$ области B, $\overline{B}_T$ — замыкание в $\mathbb{R}^N \otimes \{t = T\}$ области B_T, а символами ∂B и ∂B_T мы обозначили границы областей $B \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = 0\}$ и $B_T \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = T\}$, соответственно.

Отметим, что граничные условия для решений параболического уравнения задаются не на всей границе ∂D области D, а только на ее части

$$\partial' D \stackrel{\text{def}}{=} B \cup S,$$

называемой нормальной границей или параболической границей. И это связано со слабым принципом максимума.

На практике довольно часто область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ может быть представлена в виде цилиндра $D = \Omega \otimes (0, T)$ или в более общем случае $D = \Omega \otimes (T_0, T)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Такую область называют цлиндрической. Пример цилиндрической области приведен на рисунке 9. С другой стороны, много практических примеров, так называемых областей с подвижной границей, когда область D является нецилиндрической. Пример, нецилиндрической области изображен на рисунке 10.

Введем следующие обозначения (см. рисунок 11):

$$B_\tau \stackrel{\text{def}}{=} D \cap \{t = \tau\}, \quad D_\tau \stackrel{\text{def}}{=} D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad S_\tau \stackrel{\text{def}}{=} S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}$$

для любого $\tau \in (0, T)$. Мы будем в дальнейшем рассматривать в основном такие области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, что множества B_τ для всех $\tau \in$ $\in [0, T]$ являются областями (связными и открытыми множествами) на соответствующих гиперплоскостях $t = \tau$. Хотя принцип максимума будет доказан для достаточно общих областей D.

Теперь мы введем строго математически определения верхней и нижней крышек. И убедимся, что некоторые связные части нижней крышки могут располагаться «выше» некоторых связных частей верхних крышек.

Пусть

$$\text{Ц}_{x_0,R}^{t_1,t_2} \stackrel{\text{def}}{=} \bigl\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ |x - x_0| < R, \ t_1 < t < t_2\bigr\}$$

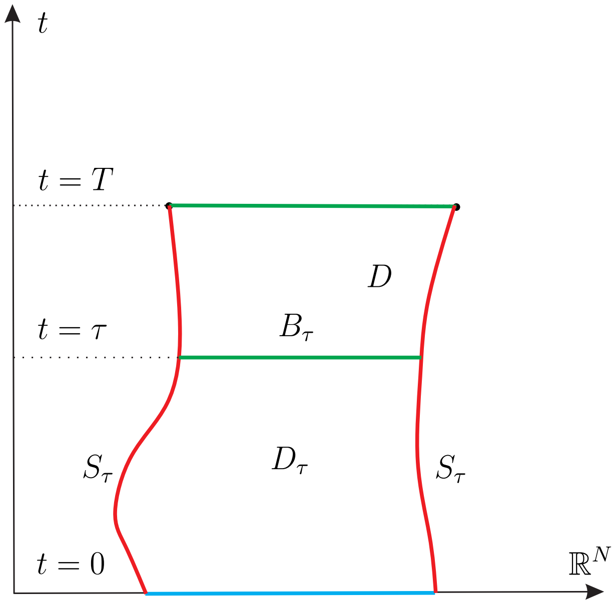


Рис. 9. Множества D_τ, B_τ и S_τ.

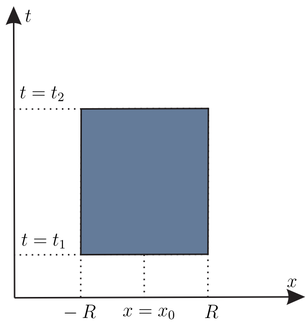


Рис. 10. Цилиндр $Ц^{t_1,t_2}_{x_0,R}$.

— это цилиндр (область) в $\mathbb{R}^{N+1}$. Дадим определения.

Определение 1. *Верхней крышкой* $\gamma(D)$ *области* $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *называется подмножество граничных точек* $M = (x, t) \in \partial D$ *таких, что для любой точки* $M = (x, t) \in \gamma(D)$ *найдется такое* $h > 0$, *что выполнены следующие свойства*

$$Ц^{t-h,t}_{x,h} \subset D \quad и \quad Ц^{t,t+h}_{x,h} \subset \mathbb{R}^{N+1} \backslash D.$$

Определение 2. *Нижней крышкой* $\gamma_0(D)$ *области* $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *называется подмножество граничных точек* $M = (x, t) \in \partial D$ *таких,* *что для любой точки $M = (x, t) \in \gamma_0(D)$ найдется такое $h > 0$, что выполнены следующие свойства*

$$Ц_{x,h}^{t,t+h} \subset D \quad \text{и} \quad Ц_{x,h}^{t-h,t} \subset \mathbb{R}^{N+1} \backslash D.$$

Определение 3. *Множество граничных точек $S(D) := = \partial D \backslash (\gamma(D) \cup \gamma_0(D))$ называется боковой границей* [1] *области D. Множество $\partial' D := \partial D \backslash \gamma(D)$ называется параболической границей области D.*

На следующем рисунке мы изобразили область D ограниченную границей ∂D, состоящую согласно определениям 1–3 из непересекающихся частей — нижней крышке $\gamma_0(D)$, изображенной на рисунке отрезками [1-6] и [7-8] синего цвета, верхней крышки $\gamma(D)$, изображенной на рисунке отрезками [2-3], [4-5] и [9-10] зеленого цвета. Наконец, линиями красного цвета на рисунке изображена боковая граница $S(D)$. Как мы обещали, мы привели пример части нижней

$$\partial D = \gamma(D) \cup \gamma_0(D) \cup S(D)$$

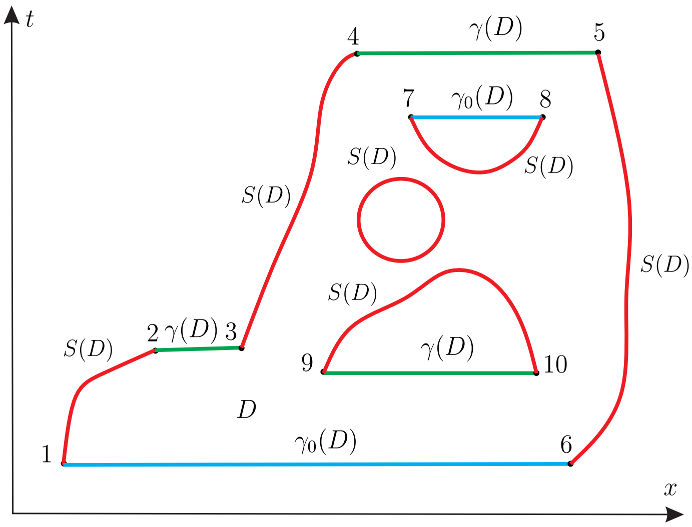


Рис. 11. Граница ∂D области D и ее части — верхняя крышка $\gamma(D)$, нижняя крышка $\gamma_0(D)$ и боковая граница $S(D)$.

крышки $[7 - 8]$, расположенной выше двух связных частей верхней крышки [2-3] и [9-10]. Кроме того, для корректной постановки, например, первой краевой задачи (см. следующий параграф) нужно задавать

[1] Если понятно для какой области D множество $S(D)$ является боковой границей, мы будем использовать обозначение S.

решение $u(x,t)$ параболического уравнения только на параболической границе $\partial' D$. В частности, мы должны задать значение функции $u(x,t)$ на отрезке [7-8] — связном отрезке нижней крышки $\gamma_0(D)$.

Отметим, что можно привести пример области D, для которой верхняя крышка $\gamma(D) = \varnothing$ и нижняя крышка $\gamma_0(D) = \varnothing$. Аналитически такая область может быть задана следующим образом:

$$D = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \sum_{j=1}^{N} |x_j - a_j|^2 + |t - t_0|^2 < 1 \right\}.$$

Очевидно, что для этой области D граница области ∂D совпадает с боковой границей $S(D)$.

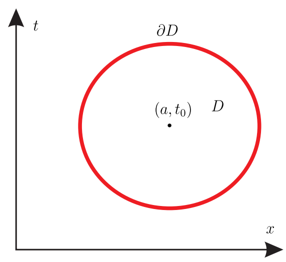


Рис. 12. Область D, для которой и нижняя и верхняя крышки — пустые множества.

Заметим, что в основном мы рассматриваем области D, которые имеют более привычный вид, изображенный на рисунке 11.

Сделаем ряд замечаний относительно обозначений. В случае областей $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, для которых верхняя крышка $\gamma(D)$ состоит только из одной связной компоненты, лежащей на гиперплоскости $t = T > 0$ мы будем использовать обозначение B_T вместо $\gamma(D)$. Аналогично в том случае, если нижняя крышка $\gamma_0(D)$ состоит только из одной связной компоненты, лежащей на гиперплоскости $t = 0$, мы будем использовать обозначение B вместо $\gamma_0(D)$.

Кроме того, связные компоненты верхней крышки $\gamma(D)$ будем обозначать символом B_t, а связные компоненты нижней крышки $\gamma_0(D)$ будем обозначать символом B^t.

§ 2. Постановка задач для параболических операторов

В курсе лекций мы будем рассматривать не только задачу Коши и первую краевую задачу, а также вторую и третью краевые задачи. Прежде всего дадим определение параболического оператора в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$.

Оператор L, определенный равенством

$$Lu(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \quad (2.1)$$

называется параболическим в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, если для всех $(x,t) \in$ $\in D$ и для каждого $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N$ выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j > 0. \quad (2.2)$$

Иначе говоря, оператор L называется параболическим в области D, если его часть

$$L_0 u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u \quad (2.3)$$

для всех $(x,t) \in D$ является эллиптическим оператором по переменным x_i, $i = \overline{1,N}$ с параметром t. Дадим определение локально равномерно параболического оператора.

Определение локально равномерно параболического оператора. *Оператор L называется локально равномерно параболическим, если для всех $(x,t) \in Q$ из компактного множества $Q \subset D$ найдутся такие постоянные $m = m(Q) > 0$ и $\Lambda = \Lambda(Q) > 0$, что выполнены неравенства*

$$m(Q)|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \leqslant \Lambda(Q)|\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \quad (2.4)$$

Замечание 1. Это определение означает, что эллиптический оператор L_0 является локально равномерно эллиптическим с параметром t.

Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют следующим условиям:

(A) Оператор L — локально равномерно параболический в D;
(B) коэффициенты оператора L — непрерывные функции в $D \cup \gamma(D)$;
(C) $c(x,t) \leqslant 0$ в D.

Определение классического решения параболического уравнения. *Функция $u = u(x,t)$ называется классическим решением параболического уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \in \mathbb{C}(D \cup \gamma(D)),$$

если

$$u(x,t), \quad \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{C}(D \cup \gamma(D)),$$

где оператор L *определен равенством* (2.1) *и выполнено условие* (B) *относительно его коэффициентов. Другими словами,* $u(x,t) \in$
$\in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D))$.

Замечание 2. Отметим, что в расшифровке нуждается условие, что

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup \gamma(D)).$$

Действительно, пусть $B_{t_1} \subset \gamma(D)$ — это произвольная связная компонента верхней крышки (очевидно, что множество B_{t_1} — это открытое и связное множество в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N \otimes \{t = t_1\}$. Тогда для функции $u(x,t) \in \mathbb{C}(D \cup B_{t_1})$ запись

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup B_{t_1})$$

означает, что

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D) \quad \text{и} \quad \exists \lim_{t \to t_1 - 0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_t^- u(x,t_1),$$

где D_t^- — это левая односторонняя производная по t функции $u(x,t)$. Положим по определению

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \begin{cases} \partial u(x,t)/\partial t, & \text{если} \quad (x,t) \in D; \\ D_t^- u(x,t), & \text{если} \quad (x,t_1) \in B_{t_1}. \end{cases}$$

Очевидно, что при этом

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup B_{t_1}).$$

Дадим постановку задачи Коши.

Задача Коши. *Найти классическое решение*

$$u(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes [0,+\infty)) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$$

уравнения

$$Lu(x,t) = f(x,t)\ ^{1)} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty), \tag{2.5}$$

удовлетворяющего начальному (*граничному при* $t = 0$) *условию*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.6}$$

---

[1] Мы предполагаем, что $f(x,t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^N \otimes (0,+\infty))$.

Замечание 3. Сразу же заметим, что задача Коши имеет, вообще говоря, неединственное решение. Для того чтобы классическое решение задачи Коши было единственным достаточно потребовать выполнения следующих неравенств:

$$|u_0(x)| \leqslant M \exp\left(\beta|x|^2\right), \quad |f(x,t)| \leqslant M \exp\left(\beta|x|^2\right) \tag{2.7}$$

при $x \in \mathbb{R}^N$ и $t \geqslant 0$ для некоторых постоянных $M > 0$ и $\beta > 0$.

Дадим постановку первой краевой задачи в предположении, что рассматривается такая область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}_+$, для которой

$$\gamma(D) = B_T \quad \text{и} \quad \gamma_0(D) = B,$$

и область D расположена между гиперплоскостями $t = 0$ и $t = T$.

Первая краевая задача. *Найти классическое решение $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$ в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}_+$, удовлетворяющее уравнению*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.8}$$

начальному условию на замыкании нижней крышки

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B}, \tag{2.9}$$

а также граничному условию на боковой границе S

$$u(x,t) = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S \stackrel{\text{def}}{=} \partial D \backslash (B \cup B_T)\,. \tag{2.10}$$

Замечание 4. Отметим, что граничные условия (2.9) и (2.10) можно объединить в одно граничное условие

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D \tag{2.11}$$

на параболической границе $\partial' D = B \cup S$ полной границы ∂D. При этом граничная функция $\psi(x,t) \in \mathbb{C}(\partial' D)$. Как мы видим специфика первой краевой задачи для параболического оператора L — это отсутствие граничного условия на верхней крышке B_T области D.

Вторую и третью краевые задачи для параболического оператора L мы будем формулировать в случае цилиндрической области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Для этого нам нужно ввести *производную по внутренней нормали* $\partial/\partial n_{x,t}$ и *производную по внутренней конормали* $\partial/\partial \nu_{x,t}$ к боковой границе $S := \partial D \backslash (B \cup B_T)$.

В каждой точке $(x,t) \in S$ определено непрерывное векторное поле внутренних нормалей $n_{x,t}$, лежащее для любого $t = \tau \in [0,T]$ на гиперплоскости $t = \tau$ и определенное своими углами $\cos(n_{x,t}, e_i)$. Тогда вектор внутренней конормали $\nu_{x,t}$ определен следующим образом:

$$\nu_{x,t} = \frac{1}{a(x,t)} \left(\sum_{i=1}^{N} a_{i1}(x,t)\cos(n_{x,t}, e_i), \cdots, \sum_{i=1}^{N} a_{iN}(x,t)\cos(n_{x,t}, e_i), 0 \right),$$

где

$$a(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \left[\sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x,t)\cos(n_{x,t}, e_j) \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Граничным оператором нормальной производной называется следую-

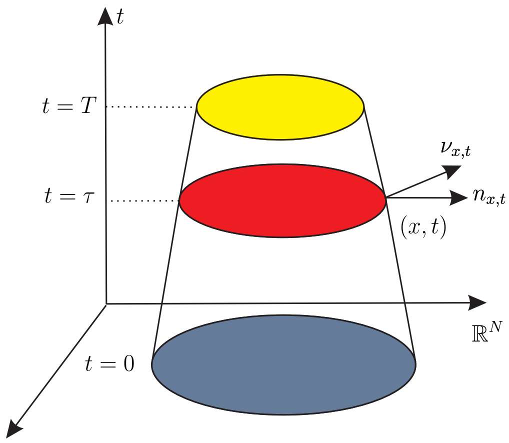


Рис. 13. Векторы <u>внешней</u> нормали $n_{x,t}$ и <u>внешней</u> конормали $\nu_{x,t}$.

щее выражение:

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial n_{x,t}}\right|_S \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \cos(n_{x,t}, e_i) \left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_S, \tag{2.12}$$

а оператором конормальной производной в случае оператора L с матрицей $(a_{ij}(x,t))$ называется величина

$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}}\right|_S \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{a(x,t)} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\cos(n_{x,t}, e_i) \left.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_S. \tag{2.13}$$

В т о р а я к р а е в а я з а д а ч а. *Найти классическое решение* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{1,0}_{x,t}(D \cup S) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$ *уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.14}$$

удовлетворяющее начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B} \tag{2.15}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S. \tag{2.16}$$

Третья краевая задача. *Найти классическое решение* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{1,0}_{x,t}(D \cup S) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$ *уравнения*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{2.17}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B} \tag{2.18}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t)u(x,t) = g(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S. \tag{2.19}$$

Ясно, чтобы классическое решение второй и третьей краевых задач существовало с необходимостью нужно требовать выполнимости условий согласования начального и граничного условия на границе ∂B нижней крышки B.

Замечание 5. Отметим, что можно задать на боковой границе S также общее граничное условие следующего вида:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial l_{x,t}} + \beta(x,t)u(x,t) = g(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S, \tag{2.20}$$

где векторное внутреннее поле $l_{x,t}$ является непрерывным векторным полем на S нигде не совпадающее с касательным направлением к поверхности S.

Помимо перечисленных задач можно рассматривать также задачу Стефана со свободной границей (см. подробное рассмотрение этой задачи в книге [12]), когда заранее граница области D полностью неизвестна. Однако, эту задачу мы рассматривать не будем и поэтому не формулируем.

В постановках второй и третьей краевых задач мы предполагаем, что область D цилиндрическая и поэтому $\gamma(D) = B_T$ и $\gamma_0(D) = B$.

§ 3. Слабый принцип максимума

Пусть параболический оператор L удовлетворяет условиям (B) и (C). Справедливо важное утверждение, называемое *слабым принципом максимума.*

Лемма 1. *Предположим, что либо $Lu > 0$ всюду в $D \cup \gamma(D)$, либо $Lu \geqslant 0$ и $c(x,t) < 0$ всюду в $D \cup \gamma(D)$. Тогда $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D))$ не может иметь положительного локального максимума в $D \cup \gamma(D)$.*

Доказательство.

Пусть $u = u(x,t)$ имеет положительный локальный максимум в точке $P_0 = z_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma(D)$. Докажем, что

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0) \frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0. \tag{3.1}$$

$\square$ В самом деле, линейным невырожденным преобразованием

$$y = \widehat{C} x$$

область D преобразуется в область D^* и справедливо равенство

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0) \frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij}(y_0,t_0) \frac{\partial^2 v(y_0)}{\partial y_i \partial y_j}, \tag{3.2}$$

где

$$v(y,t) := u(\widehat{C}^{-1} y, t), \quad y_0 = \widehat{C} x_0, \quad (b_{ij}(y_0,t_0)) := \widehat{C}(a_{ij}(x_0,t_0))\widehat{C}^T.$$

Выберем матрицу $\widehat{C}$ так, чтобы $b_{ij}(y_0,t_0) = \delta_{ij}$ [1]. Функция $v(y,t)$ имеет в точке $(y_0,t_0) \in D^* \cup \gamma(D^*)$ тоже положительный максимум. Следовательно, выполнено неравенство

$$\frac{\partial^2 v(y_0)}{\partial y_i^2} \leqslant 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1,1}^{N,N} b_{ij}(y_0,t_0) \frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_i \partial y_j} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 v(y_0,t_0)}{\partial y_i^2} \leqslant 0. \quad \boxtimes$$

Таким образом, отсюда в силу (3.2) выполнено неравенство (3.1). Наконец, в точке $P_0 = (x_0,t_0)$ выполнены необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial t} \geqslant 0.$$

[1] Что, очевидно, можно сделать, применив сначала ортогональный поворот, а затем применив невырожденное преобразование типа растяжения.

Последнее неравенство требует пояснений. Действительно, если $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, т. е. является внутренней точкой области D, то в точке локального экстремума (максимума) выполнено необходимое условие

$$\frac{\partial u(x_0, t_0)}{\partial t} = 0.$$

Предположим теперь, что $(x_0, t_0) \in \gamma(D)$, т. е. найдется связная компонента $B_{t_0} \in \gamma(D)$, которой принадлежит точка (x_0, t_0). Докажем, что в наших обозначениях выполнено неравенство

$$D_t^- u(x_0, t_0) \geqslant 0. \tag{3.3}$$

□ Действительно, поскольку в точке $(x_0, t_0) \in B_{t_0}$ достигается локальный максимум, то согласно определению верхней крышки имеет место неравенство

$$\frac{u(x_0, t_0) - u(x_0, t)}{t_0 - t} \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x_0, t) \in \text{Ц}_{x_0,h}^{t_0-h,t_0}$$

при некотором достаточно малом $h > 0$. Отсюда в пределе при $\text{Ц}_{x_0,h}^{t_0-h,t_0} \ni (x_0, t) \to (x_0, t_0)$ получим неравенство (3.3). ⊠

В итоге имеют место неравенства.

$$Lu(x_0, t_0) \leqslant c(x_0, t_0) u(x_0, t_0). \tag{3.4}$$

Поскольку $u(x_0, t_0) > 0$, то мы приходим к противоречию в неравенстве (3.4) в каждом из двух случаев

$$Lu > 0 \quad \text{и} \quad c(x,t) \leqslant 0 \quad \text{либо} \quad Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad c(x,t) < 0.$$

Лемма доказана.

Приложение слабого принципа максимума. В качестве приложения слабого принципа максимума рассмотрим вопрос о *единственности решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$ *следующей нелинейной первой краевой задачи*:

$$Lu(x,t) = f(x,t,u,D_x u) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{3.5}$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad B \cup S, \tag{3.6}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$. Будем предполагать, что функция $f = f(x,t,p,p_1,...,p_N)$ определена на множестве $(D \cup B_T) \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N$. Пусть решение $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$.

Справедлива следующая теорема единственности:

Теорема 1. *Пусть L — это параболический оператор с коэффициентами $a_{ij}(x,t), b_i(x,t), c(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ и пусть $f(x,t,p,p_1,...,p_N)$ является неубывающей по переменной $p \in \mathbb{R}^1$ функцией. Тогда существует не более одного решения задачи* (3.5), (3.6).

Доказательство.

Шаг 1. Сначала мы рассмотрим случай $c(x,t) \leqslant 0$ и функция $f = f(x,t,p,p_1,....,p_N)$ является строго возрастающей по $p \in \mathbb{R}^1$.

Предположим, что $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — это два решения задачи (3.5) и (3.6). Если

$$u_1(x,t) \not\equiv u_2(x,t),$$

то можно предположить, что

$$u_1(x,t) > u_2(x,t) \quad \text{в некоторых точках} \quad D \cup B_T,$$

поскольку по исходному предположению $u_1(x,t), u_2(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$. Поэтому функция

$$u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u_1(x,t) - u_2(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$$

будет иметь положительный максимум в $\overline{D}$.

Предположим, что $P_0 = (x_0,t_0) \in D \cup B_T$ — это точка, где достигается локальный максимум. Ясно, что

$$D_x u_1(P_0) = D_x u_2(P_0), \quad u_1(P_0) > u_2(P_0).$$

Поэтому мы получаем, что

$$Lu(P_0) = f(x_0,t_0,u_1(x_0,t_0), D_x u_1(x_0,t_0)) - \\ - f(x_0,t_0,u_2(x_0,t_0), D_x u_2(x_0,t_0)) > 0.$$

С другой стороны, при доказательстве слабого принципа максимума мы доказали, что

$$Lu(P_0) \leqslant 0$$

в каждой точке $P_0 = (x_0,t_0) \in D \cup B_T$, в которой $u(x,t)$ имеет положительный максимум. Пришли к противоречию.

Поэтому точка P_0 должна принадлежать только параболической границе $\partial' D := S \cup B$, где согласно определению $u(x,t)$ выполнено равенство

$$u(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Итак, утверждение теоремы в рассматриваемом случае доказано.

Шаг 2. Чтобы доказать теорему в общем случае, сделаем преобразование

$$v(x,t) = e^{-\lambda t} u(x,t),$$

которое переводит уравнение (3.5) в следующее:

$$(L - c(x,t)I)v(x,t) = \widehat{f}(x,t,v,D_x v) \stackrel{\text{def}}{=} \\ = f(x,t,ve^{\lambda t}, e^{\lambda t} D_x v)e^{-\lambda t} + (\lambda - c(x,t))v.$$

Выберем

$$\lambda > \sup_{(x,t)\in D} c(x,t),$$

тогда функция $\widehat{f}(x,t,v,D_x v)$ будет строго возрастающей по v, а коэффициент при $v(x,t)$ в выражении

$$(L - c(x,t)I)v(x,t)$$

равен нулю. Таким образом, осталось применить результат, полученный на первом шаге.

Теорема доказана.

Обратно параболическое уравнение. Интересным представляется результат о принципе максимума для решений обратно параболического уравнения следующего вида:

$$L_p u(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad D \cup \gamma_0(D)\ ^{1)}, \tag{3.7}$$

где

$$L_p u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u + \frac{\partial u}{\partial t}. \tag{3.8}$$

Заметим, что по аналогии с пространством $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D\cup\gamma(D))$ нам нужно определить пространство $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D\cup\gamma_0(D))$. В этом случае опять требуется расшифровать запись

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D\cup\gamma_0(D))$$

в том случае, если $(x,t)\in\gamma_0(D)$. Тогда найдется связная компонента $B^{t_1}\subset\gamma_0(D)$ такая, что $(x,t)\in B^{t_1}$ и при этом

$$\exists \lim_{t\to t_1+0} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D_t^+ u(x,t_1),$$

где D_t^+ — это правая односторонняя производная по t функции $u(x,t)$. Положим по определению

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \begin{cases} \partial u(x,t)/\partial t, & \text{если} \quad (x,t)\in D; \\ D_t^+ u(x,t), & \text{если} \quad (x,t_1)\in B^{t_1}. \end{cases}$$

[1]) Напомним, что $\gamma_0(D)$ — это нижняя крышка области D, а $\gamma(D)$ — это верхняя крышка.

Очевидно, что при этом

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \in \mathbb{C}(D \cup B^{t_1}).$$

Заметим, что справедлив следующий слабый принцип максимума для решений $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$.

Лемма 2. *Предположим, что либо $L_p u(x,t) > 0$ всюду в $D \cup \gamma_0(D)$, либо $L_p u(x,t) \geqslant 0$ и $c(x,t) < 0$ всюду в $D \cup \gamma_0(D)$. Тогда $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$ не может иметь положительного локального максимума в $D \cup \gamma_0(D)$.*

Доказательство.

Доказательство этого утверждения в целом повторяет доказательство леммы 1. Одно важное изменение относится к случаю, когда локальный положительный максимум $M > 0$ решения дифференциального неравенства достигается в точке $P_0 = (x_0, t_0) \in \gamma_0(D)$. В этом случае нужно доказать, что

$$D_t^+ u(x_0, t_0) \leqslant 0.$$

□ Действительно, если $(x_0, t_0) \in \gamma_0(D)$, то найдется связная часть B^{t_0} нижней крышки $\gamma_0(D)$ такая, что $(x_0, t_0) \in B^{t_0}$. Поскольку в этой точке достигается локальный максимум, то найдется такое $h > 0$, что имеет место неравенство

$$\frac{u(x_0,t_0) - u(x_0,t)}{t_0 - t} \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x_0, t) \in \text{Ц}^{t_0+h,t_0}_{x_0,h}.$$

Отсюда в пределе при $\text{Ц}^{t_0+h,t_0}_{x_0,h} \ni (x_0,t) \to (x_0,t_0)$ мы получим неравенство

$$D_t^+ u(x_0, t_0) \leqslant 0. \quad \boxtimes$$

Дальнейшие рассуждения в точности повторяются.

Лемма доказана.

§ 4. Слабый принцип максимума в цилиндрической области

Рассмотрим частный случай цилиндрической ограниченной области $D = \Omega \otimes (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

Справедлив следующий принцип максимума:

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — ограниченная область, выполнены условия* (B) *и* (C) *относительно коэффициентов параболического оператора L в области D и $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$. Если*

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad (x,t) \in D, \tag{4.1}$$

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{при} \quad (x,t) \in \partial'' D \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\Omega} \otimes \{t=0\} \cup \partial\Omega \otimes (0,T) \text{ [1]}. \tag{4.2}$$

[1] Граница $\partial'' D \subset \partial' D$.

Тогда $u(x,t) \leqslant 0$ *в* D.

Доказательство.

Шаг 1. Выберем константу $\gamma > 0$ и определим следующую функцию:

$$v(x,t) := u(x,t) - \frac{\gamma}{T-t}. \tag{4.3}$$

Пусть z_γ — это точка в $\overline{D}$, в которой $v(x,t)$ принимает максимальное положительное значение. [1]) Прежде всего заметим, что в силу ограниченности решения $u(x,t)$ в D

$$v(z) \to -\infty \quad \text{при} \quad z \to B_T = \{x \in \Omega,\ t = T\}.$$

Поэтому $z_\gamma \notin \overline{B}_T$ и $z_\gamma \in D \cup \partial'' D$.

Шаг 2. Если $v(z_\gamma) \geqslant 0$, то z_γ не может лежать в D, т. е. быть внутренней точкой цилиндрической области D.

□ Действительно, в противном случае (как и ранее при доказательстве слабого принципа максимума в лемме 1) имеем

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(z_\gamma)\frac{\partial^2 v(z_\gamma)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0, \quad v_t(z_\gamma) = v_{x_i}(z_\gamma) = 0, \quad i = \overline{1,N}.$$

Заметим, что имеет место равенство

$$-u_t = -v_t - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\gamma}{T-t} = -v_t - \frac{\gamma}{(T-t)^2}.$$

Поэтому в точке z_γ выполнена следующая цепочка неравенств:

$$0 \leqslant Lu(x,t) = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(z_\gamma)\frac{\partial^2 v(z_\gamma)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(z_\gamma)\frac{\partial v(z_\gamma)}{\partial x_i} +$$
$$+ c(z_\gamma)u(z_\gamma) - v_t(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leqslant c(z_\gamma)u(z_\gamma) - \frac{\gamma}{(T-t)^2} \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{\gamma}{(T-t)^2} + c(z_\gamma)v(z_\gamma) + c(z_\gamma)\frac{\gamma}{T-t} \leqslant -\frac{\gamma}{(T-t)^2} + c(z_\gamma)\frac{\gamma}{T-t} < 0. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Полученное противоречие доказывает, что либо $v(z_\gamma) < 0$ в D либо $z_\gamma \in \partial'' D$ и тогда в силу (4.2) имеем $v(z_\gamma) \leqslant 0$. Итак, в любом случае имеем

$$v(x,t) \leqslant v(z_\gamma) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \Rightarrow u(x,t) \leqslant \frac{\gamma}{T-t} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

---

[1]) Если максимальное значение неположительно, то предельным переходом при $\gamma \to +0$ мы получим сразу же требуемое утверждение.

Поскольку $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ не зависит от произвольного $\gamma > 0$, то для всякого фиксированного $(x,t) \in D$ устремим $\gamma \to +0$ и получим неравенство

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим обобщение этой теоремы на случай неограниченной области. Итак, справедлива следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (A), (B), (C), *коэффициенты оператора L являются ограниченными функциями в D и $u(x,t) \in \in \mathbb{C}_b(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$* [1]*. Если*

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \textit{в} \quad (x,t) \in D, \tag{4.4}$$

$$u(x,t) \leqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial'' D \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \overline{\Omega},\ t = 0\} \cup \{x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T)\}. \tag{4.5}$$

Тогда $u(x,t) \leqslant 0$ в D.

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим следующую функцию:

$$v_0(x,t) = \operatorname{ch}(|x|)\exp(\lambda t), \quad \lambda > 0. \tag{4.6}$$

Непосредственно можно проверить, что выполнено неравенство

$$Lv_0(x,t) \leqslant 0 \tag{4.7}$$

для достаточно большой константе $\lambda > 0$.

□ Действительно, справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial x_i} = \operatorname{sh}(|x|)\frac{x_i}{|x|}\exp(\lambda t),$$

$$\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \left(\operatorname{ch}(|x|)\frac{x_i x_j}{|x|^2} + \frac{\operatorname{sh}(|x|)}{|x|}\delta_{ij} - \frac{\operatorname{sh}(|x|)}{|x|}\frac{x_i x_j}{|x|^2}\right)\exp(\lambda t),$$

$$\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial t} = \lambda \operatorname{ch}(|x|)\exp(\lambda t).$$

Теперь нужно отдельно рассмотреть случаи $|x| \leqslant \delta$ и $|x| \geqslant \delta$, где $\delta \in \in (0,1)$ достаточно мало. Предположим, что

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M, \quad |c(x,t)| \leqslant M \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in D.$$

Рассмотрим <u>случай $|x| \leqslant \delta$.</u> Воспользуемся очевидными неравенствами

$$\frac{|\operatorname{sh}(|x|)|}{|x|} \leqslant 2, \quad 1 \leqslant \operatorname{ch}(|x|) \leqslant 2 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant \delta.$$

---

[1] Т. е. функция $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ и ограничена в D. Напомним, что область $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ является неограниченной.

Поэтому имеют место следующие оценки:

$$\left|\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v_0(x,t)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant 6MN^2\exp(\lambda t), \tag{4.8}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial x_i}\right| \leqslant MN2\delta\exp(\lambda t), \tag{4.9}$$

$$|c(x,t)v_0(x,t)| \leqslant 2M\exp(\lambda t), \tag{4.10}$$

$$-\frac{\partial v_0(x,t)}{\partial t} = -\lambda\,\mathrm{ch}(|x|)\exp(\lambda t) \leqslant -\lambda\exp(\lambda t). \tag{4.11}$$

В силу (4.8)–(4.11) мы приходим к следующему неравенству:

$$Lv_0(x,t) \leqslant \Big[6MN^2 + 2MN\delta + 2M - \lambda\Big]\exp(\lambda t) \leqslant 0$$

для всех $(x,t) \in D \cap \{|x| \leqslant \delta\}$ при условии, что $\lambda > 0$ достаточно велико.

Рассмотрим теперь случай $|x| \geqslant \delta$. Тогда справедливы оценки

$$|\mathrm{sh}(|x|)| \leqslant e^{\delta}, \quad 1 \leqslant \mathrm{ch}(|x|) \leqslant e^{\delta}, \quad \frac{1}{|x|} \leqslant \frac{1}{\delta}.$$

С учетом этих неравенств приходим к следующему выражению:

$$Lv_0(x,t) \leqslant \left[e^{\delta}MN^2\left(1+\frac{2}{\delta}\right) + e^{\delta}MN + e^{\delta}M - \lambda\right]\exp(\lambda t) \leqslant 0$$

для всех $(x,t) \in D \cap \{|x| \geqslant \delta\}$ при условии, что $\lambda > 0$ достаточно велико. Итак, неравенство (4.7) доказано. ⊠

Шаг 2. Положим

$$m := \sup_{(x,t)\in D}|u(x,t)|, \quad D_{T,R} \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\Omega \cap B_R] \otimes (0,T), \tag{4.12}$$

где $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : \ |x| < R\}$. Тогда функция

$$w_R(x,t) := u(x,t) - v_0(x,t)\frac{m}{\mathrm{ch}(R)} \tag{4.13}$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$w_R(x,t) \leqslant 0 \tag{4.14}$$

для всех

$$(x,t) \in \partial' D_{T,R} = \{\overline{\Omega} \cap \overline{B}_R,\ t = 0\} \cup \{\partial\Omega \cap \partial B_R,\ t \in (0,T)\}.$$

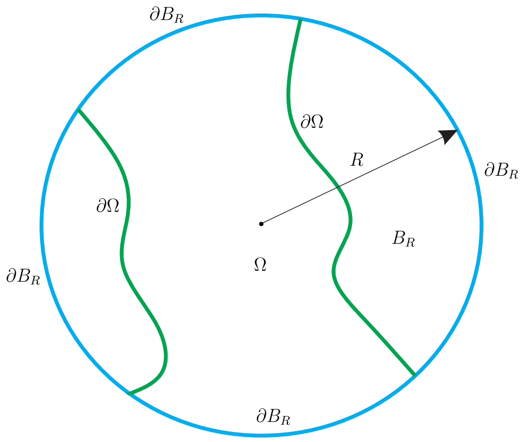


Рис. 14. Множество $\Omega \cap B_R$.

$\square$ Действительно, в силу условия (4.5) $u(x,t) \leqslant 0$ на $\partial' D$ и поэтому $w_R(x,t) \leqslant 0$ на $\partial' D \cap B_R$, а при $x \in \partial B_R$ имеем

$$w_R(x,t)\Big|_{|x|=R} = (u(x,t) - me^{\lambda t})\Big|_{|x|=R} \leqslant (u(x,t) - m)\Big|_{|x|=R} \leqslant 0. \quad \boxtimes$$

С другой стороны, из неравенств (4.4) и (4.7) имеем

$$Lw_R(x,t) \geqslant 0. \tag{4.15}$$

В силу ограниченности области $D_{T,R}$ выполнен результат теоремы 2

$$w_R(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D_{T,R} \Rightarrow u(x,t) \leqslant v_0(x,t)\frac{m}{\operatorname{ch} R}.$$

Переходя к пределу при $R \to +\infty$ получим результат теоремы.

Теорема доказана.

Замечание 6. Заметим, что в формулировке теорем 2 и 3 мы используем понятие ограниченного решения, а именно условие, что решение $u(x,t)$ ограничено в рассматриваемой цилиндрической области.

§ 5. Сильный принцип максимума

Доказательство основного утверждения этого параграфа — принципа максимума, мы будем проводить для произвольной ограниченной области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$. Нам потребуются новые понятия.

Обозначения. Пусть $P_0 = (x_0, t_0)$ — любая точка из D. Обозначим через $S(P_0)$ множество всех точек $Q = \{(x,t)\}$ в D, таких, что их можно соединить с P_0 простой непрерывной кривой, лежащей в D, вдоль которой координата t не убывает от Q к P_0. Через $C(P_0)$ мы обозначим компоненту пересечения $D \cap \{t = t_0\}$, которая содержит P_0. Заметим, что $S(P_0) \supset C(P_0)$. Отметим, что может быть так, что $D \cap \cap \{t = t_0\} \notin S(P_0)$. Приведите сами пример!

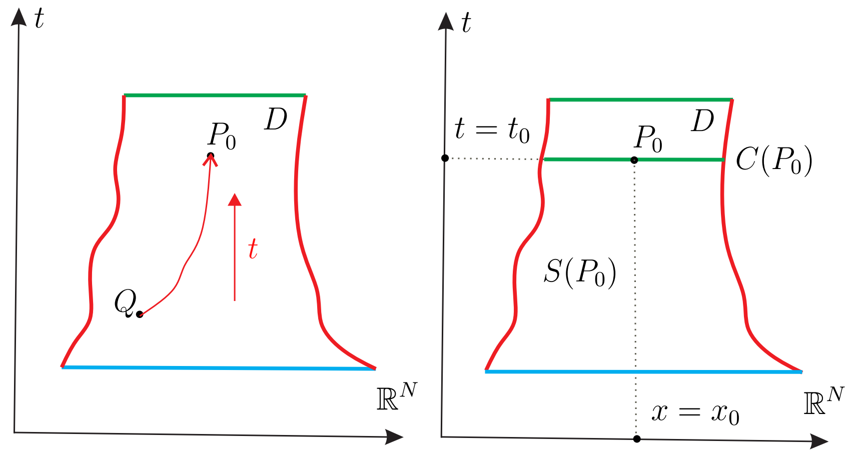


Рис. 15. Множества $S(P_0)$ и $C(P_0)$.

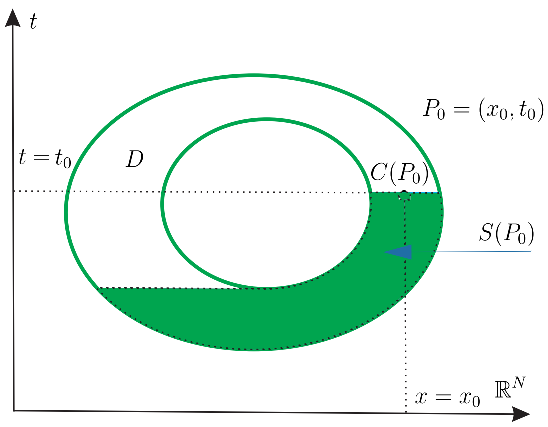


Рис. 16. Множества $S(P_0)$ и $C(P_0)$ в случае «гладкой» двусвязной области D.

Теперь мы можем сформулировать основное утверждение этой лекции, называемое сильным принципом максимума.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Если* $Lu \geqslant 0$ $(Lu \leqslant 0)$ *в* D *и если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ *имеет в* D *положительный глобальный максимум* (*отрицательный глобальный минимум*), *который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, *то* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in S(P_0)$.

Доказательство теоремы. Докажем эту теорему в случае, если функция $u(x,t)$ имеет глобальный положительный максимум M в D. Для того чтобы доказать эту важную теорему нам нужно доказать ряд вспомогательных лемм.

Этап I. Докажем следующее утверждение:

Лемма 3. *Пусть $Lu \geqslant 0$ в D, и пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ имеет положительный глобальный максимум M в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in D$. Предположим, что D содержит замкнутый эллипсоид E :*

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i (x_i - x_i^*)^2 + \lambda_0 (t - t^*)^2 \leqslant R^2, \quad \lambda_0 > 0, \quad \lambda_i > 0, \quad R > 0, \quad i = \overline{1, N}$$

и что $u(x,t) < M$ во внутренних точках $(x,t) \in E$ и $u(\overline{x}, \overline{t}) = M$ в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ на границе ∂E эллипсоида E. Тогда $\overline{x} = x^*$, где $x^* = (x_1^*, ..., x_N^*)$.

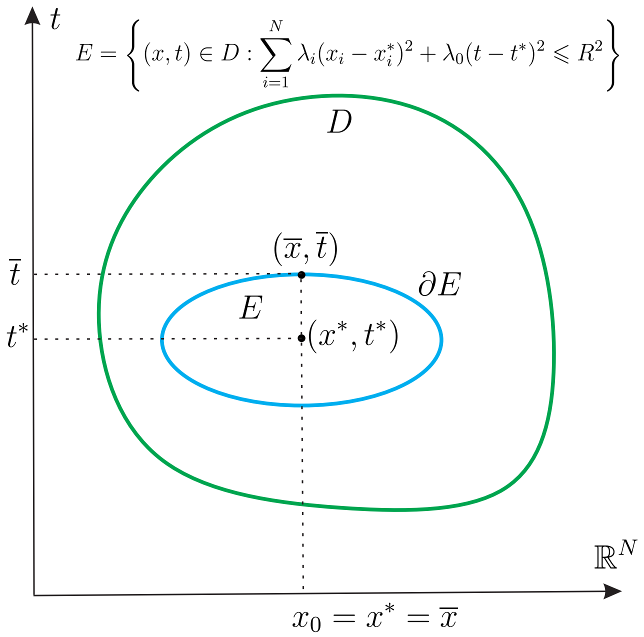


Рис. 17. Эллипсоид E в формулировке леммы 3.

Доказательство.

Шаг 1. Без ограничения общности можно считать, что $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ — это единственная точка на ∂E, в которой $u(\overline{x}, \overline{t}) = M$, так как в противном случае [1] мы можем взять меньший замкнутый эллипсоид

[1] Заметим, что $u(x,t) < M$ во всех внутренних точках эллипсоида E.

e, лежащий в E и имеющий единственную общую точку $\overline{P}$ с ∂E (см. рисунок 18).

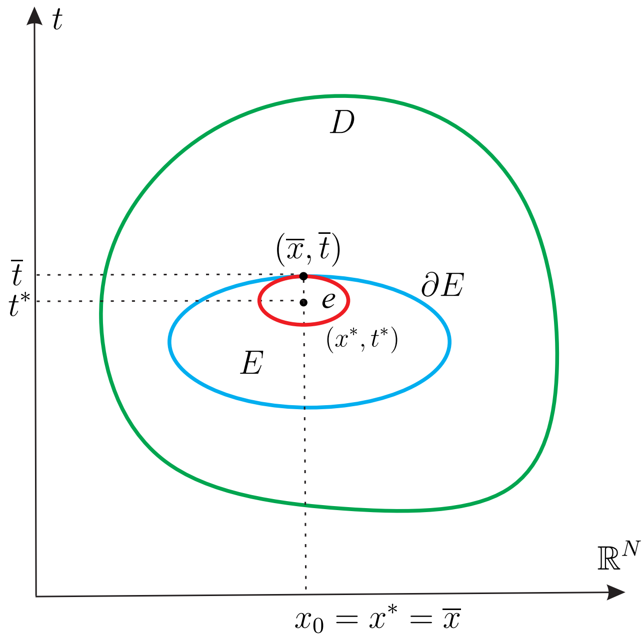


Рис. 18. Вложенный эллипсоид e.

Шаг 2. Предположим, что $\overline{x} \neq x^*$, и пусть C — замкнутый $(N + 1)$–мерный шар, содержащийся в D с центром в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$ и радиусом меньшим, чем $|\overline{x} - x^*|$. Тогда

$$|x - x^*| \geqslant \beta > 0 \quad \text{для всех} \quad (x, t) \in \overline{C}. \tag{5.1}$$

Граница шара C состоит из части $\partial C_1 \subset E$, и части ∂C_2, лежащей вне эллипсоида E (см. рисунок 19). Очевидно, что для некоторого $\delta > 0$ выполнено неравенство

$$u(x, t) < M - \delta \quad \text{при} \quad (x, t) \in \partial C_1, \tag{5.2}$$

поскольку по построению эллипсоида $E \subset D$ максимум M функции $u(x, t)$ достигается только в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in \partial E$ (см. шаг 1).

Шаг 3. Введем следующую функцию:

$$h(x, t) \overset{\text{def}}{=} \exp\left\{-\alpha\left[\sum_{i=1}^{N} \lambda_i\,(x_i - x_i^*)^2 + \lambda_0\,(t - t^*)^2\right]\right\} - \\ - \exp\left[-\alpha R^2\right], \quad \alpha > 0. \tag{5.3}$$

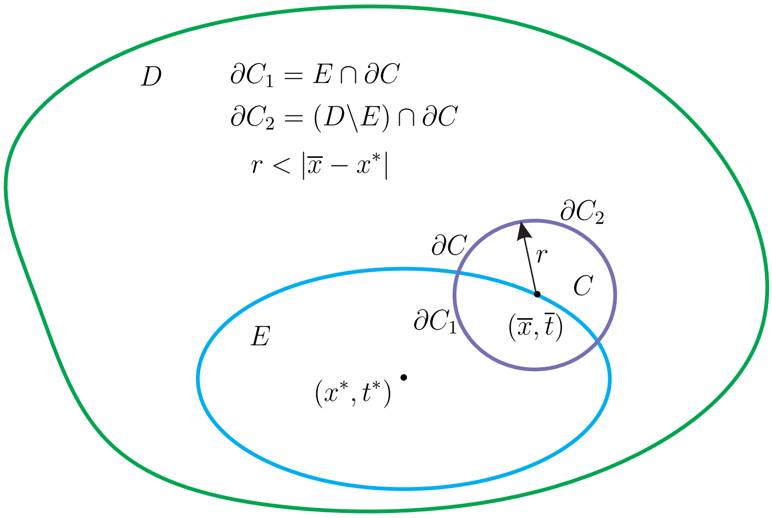


Рис. 19. Шар C.

Заметим, что по построению функция $h = h(x,t) > 0$ внутри E, равна нулю на границе ∂E и меньше нуля при $(x,t) \in D\backslash E$, т. е. вне замкнутого эллипсоида E. Кроме того, заметим, что

$$\exp\left\{\alpha\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0\left(t - t^*\right)^2\right]\right\} Lh(x,t) =$$

$$= \left\{4\alpha^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j\left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) - \right.$$

$$\left. - 2\alpha\left[\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right) - \lambda_0\left(t - t^*\right)\right] + c(x,t)\right\} -$$

$$- c(x,t)\exp\left[-\alpha R^2\right]\exp\left\{\alpha\left[\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left(x_i - x_i^*\right)^2 + \lambda_0\left(t - t^*\right)^2\right]\right\}. \quad (5.4)$$

Поскольку в шаре C выполнено неравенство (5.1), то *слагаемые в первых фигурных скобках в равенстве* (5.4) *будет больше нуля при достаточно большом* $\alpha > 0$.

□ Действительно, поскольку выполнено условие (A), то имеет место неравенство (2.4), из которого вытекает цепочка оценок снизу

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j\left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) \geqslant$$

$$\geqslant m \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^2 |x_j - x_j^*|^2 \geqslant m\lambda^2 \sum_{i=1}^{N} |x_j - x_j^*|^2 =$$
$$= m\lambda^2 |x - x^*|^2 \geqslant m\lambda^2\beta^2 =: d > 0, \quad \lambda := \min_{i=\overline{1,N}} \lambda_i > 0 \quad (5.5)$$

для всех $(x,t) \in \overline{C} \subset D$ [1]. Кроме того, поскольку выполнено условие (B), то найдется такая постоянная $K_1 > 0$, что

$$\max_{(x,t)\in\overline{C}} |a_{ij}(x,t)| \leqslant K_1, \quad \max_{(x,t)\in\overline{C}} |b_i(x,t)| \leqslant K_1, \quad \max_{(x,t)\in\overline{C}} |c(x,t)| \leqslant K_1.$$

Поэтому имеет место следующая оценка:

$$\left| \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\lambda_i \left(x_i - x_i^*\right) - \lambda_0 \left(t - t^*\right) \right| \leqslant$$
$$\leqslant K_1 N \overline{\lambda} + K_1 N \overline{\lambda} \sup_{(x,t)\in\overline{C}} |x - x^*| +$$
$$+ \lambda_0 \sup_{(x,t)\in\overline{C}} |t - t^*| =: K_2 < +\infty, \quad \overline{\lambda} := \max_{i=\overline{1,N}} \lambda_i. \quad (5.6)$$

В силу неравенств (5.5) и (5.6) вытекает следующая оценка снизу:

$$4\alpha^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\lambda_i\lambda_j \left(x_i - x_i^*\right)\left(x_j - x_j^*\right) -$$
$$- 2\alpha \left[\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\lambda_i + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\lambda_i \left(x_i - x_i^*\right) - \lambda_0 \left(t - t^*\right) \right] +$$
$$+ c(x,t) \geqslant 4\alpha^2 d - 2\alpha K_2 - K_1 > 0 \quad (5.7)$$

при достаточно большом $\alpha > 0$. ⊠

Последний член больше или равен нуля, так как $c(x,t) \leqslant 0$. Итак,

$$Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad C \quad (5.8)$$

для достаточно большого $\alpha > 0$.

Шаг 4. Рассмотрим теперь в шаре C функцию

$$v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon h(x,t) \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0. \quad (5.9)$$

Если $\varepsilon > 0$ достаточно малое, то $v(x,t) < M$ на ∂C_1 в силу (5.2). На ∂C_2 функция $u(x,t) \leqslant M$ и $h(x,t) < 0$, поэтому $v(x,t) < M$. Таким образом,

$$v(x,t) < M \quad \text{на} \quad \partial C \quad (5.10)$$

[1] Очевидно, $\overline{C}$ компактное множество в $\mathbb{R}^{N+1}$.

при малом $\varepsilon > 0$. Кроме того,

$$h(\overline{P}) = 0 \Rightarrow v(\overline{P}) = u(\overline{P}) = M. \qquad (5.11)$$

Отсюда заключаем, что $v(x,t) < M$ на границе шара C и принимает максимальное положительное значение M в центре шара $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$. При этом выполнено неравенство (5.8), в силу которого имеем

$$Lv(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad C.$$

Следовательно, мы пришли в противоречие со слабым принципом максимума (см. лемму 1). Значит, имеет место равенство $\overline{x} = x^*$.

Лемма доказана.

Этап II. Теперь мы докажем следующую лемму:

Лемма 4. *Если $Lu \geqslant 0$ в области D и если $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ имеет положительный глобальный максимум в D, который достигается в точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, то $u(P) = u(P_0)$ для всех $P \in C(P_0)$.*

Доказательство.

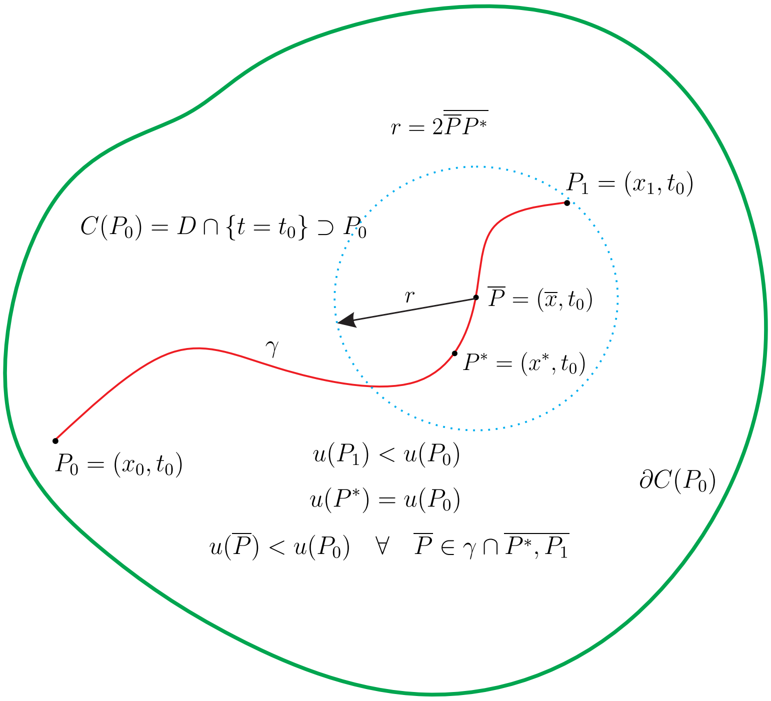


Рис. 20. Кривая $\gamma \in C(P_0)$.

Шаг 1. Пусть утверждение леммы неверно. Тогда в $C(P_0)$ найдется точка $P_1 = (x_1, t_0)$, в которой $u(P_1) < u(P_0)$. Соединим P_1 с P_0 простой непрерывной кривой $\gamma \subset C(P_0)$. На γ существует точка $P^* = (x^*, t_0)$, в которой $u(P^*) = u(P_0)$, и такая, что $u(\overline{P}) < u(P_0)$ для всех $\overline{P} = (\overline{x}, t)$, лежащих на γ между P_1 и P^*.

Возьмем точку $\overline{P}$ на γ между P_1 и P^* так [1], чтобы расстояние $d(\overline{P}, \partial C(P_0))$ до границы $\partial C(P_0)$ удовлетворяло неравенству

$$d(\overline{P}, \partial C(P_0)) \geqslant 2\overline{\overline{P}P^*}. \tag{5.12}$$

Шаг 2. Поскольку $u(\overline{P}) < u(P^*) = u(P_0)$, существует достаточно малый отрезок σ_0, определяемый соотношениями

$$\overline{P} = (\overline{x}, t_0) \in \sigma_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x = \overline{x}, \quad t_0 - \varepsilon \leqslant t \leqslant t_0 + \varepsilon\}, \tag{5.13}$$

для всех точек $P = (\overline{x}, t) \in \sigma_0$ которого

$$u(P) < u(P^*) = u(P_0). \tag{5.14}$$

Фиксируем это $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим семейство эллипсоидов $E_\lambda \subset D$:

$$E_\lambda := \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \; |x - \overline{x}|^2 + \lambda(t - t_0)^2 \leqslant \lambda\varepsilon^2\right\}. \tag{5.15}$$

Прежде всего заметим, что концы интервала σ_0 будут лежать на границе эллипсоида E_λ.

$\square$ Действительно, положим $x = \overline{x}$ в уравнении эллипсоида E_λ и получим неравенство

$$|t - t_0| \leqslant \varepsilon \Rightarrow (x = \overline{x}, t) \in \sigma_0. \quad \boxtimes$$

Кроме того, нетрудно убедиться в том, что справедливо предельное свойство (см. рисунок 21)

$$E_\lambda \to \sigma_0 \quad \text{при} \quad \lambda \to +0. \tag{5.16}$$

С другой стороны, при $t = t_0$ имеем

$$E_\lambda \cap \{t = t_0\} = \left\{(x, t_0) : \; x \in \mathbb{R}^N, \quad |x - \overline{x}| \leqslant \lambda\varepsilon^2\right\}.$$

Поэтому при возрастании $\lambda > 0$ пересечение $E_\lambda \cap \{t = t_0\}$ неограниченно возрастает.

Следовательно, в силу неравенства (5.14) существует такое минимальное $\lambda = \lambda_0 > 0$, что $u(x,t) < u(P^*) = u(P_0)$ внутри E_{λ_0} и $u(y, t_0) = u(P^*) = u(P_0)$ в некоторой точке $Q = (y, t_0) \in \partial E_{\lambda_0}$.

[1] Просто нужно взять точку $\overline{P}$ достаточно близкой к точке P^*.

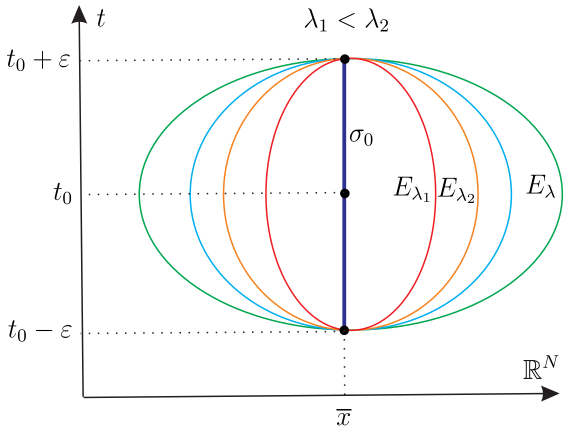


Рис. 21. Семейство E_λ и интервал σ_0.

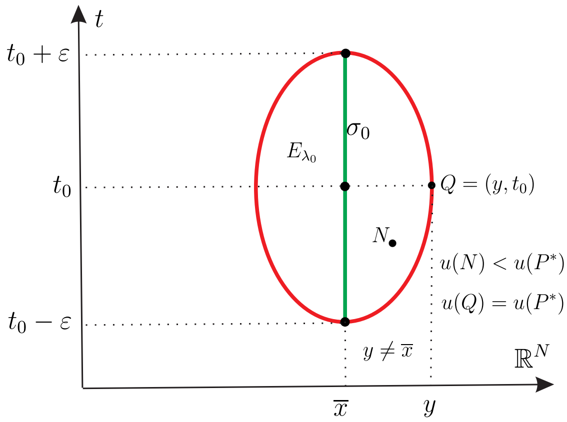


Рис. 22. Минимальный эллипсоид E_{λ_0}.

В силу (5.14) точка Q не может принадлежать интервалу σ_0 (см. рисунок 22), поскольку для всех $P \in \sigma_0$ имеем

$$u(P) < u(P^*) = u(P_0)$$

и поэтому $y \neq \overline{x}$, но это противоречит результату леммы 3

Лемма доказана.

Этап III. Докажем теперь следующее утверждение:

Лемма 5. *Пусть R — параллелепипед*

$$x_{0i} - a_i \leqslant x_i \leqslant x_{0i} + a_i, \quad t_0 - a_0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{5.17}$$

содержащийся в D, [1] *и пусть* $Lu \geqslant 0$ *в* D. *Если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ *имеет положительный* *глобальный максимум* *в* R, *который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D$, *где* $x_0 = (x_{10}, ..., x_{N0})$, *тогда* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in R$.

Доказательство.

Шаг 1. Предположим, что лемма неверна. Тогда в параллелепипеде R должна найтись точка $Q \in R$, такая, что $u(Q) < u(P_0)$. Поскольку $u(x,t) < u(P_0)$ также и в некоторой окрестности Q, можно предполагать, что точка Q не лежит на гиперплоскости $t = t_0$. В противном случае просто нужно взять параллелепипед с верхним основанием на гиперплоскости $t = t_0$, но меньших размеров.

На отрезке γ_{Q,P_1} кривой γ, соединяющем Q с P_0 существует точка P_1, такая, что $u(P_1) = u(P_0)$ и

$$u(\overline{P}) < u(P_1) \quad \text{для всех} \quad \overline{P} \in \gamma_{Q,P_1}$$

Без ограничения общности, можно считать, что $P_1 = P_0$ и точка Q лежит на гиперплоскости $t = t_0 - a_0$, поскольку в противном случае можно взять параллелепипед, меньших размеров (см. рисунок 23).

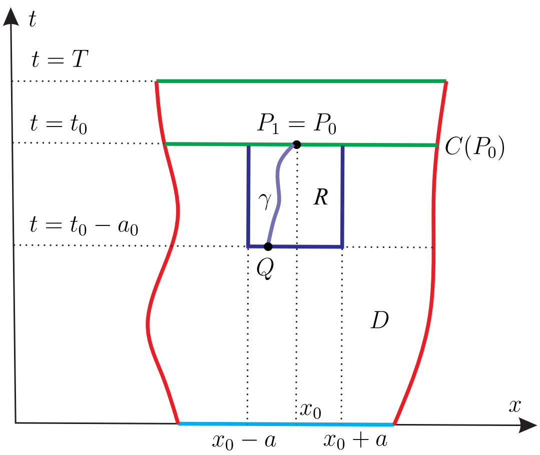


Рис. 23. Кривая γ и точка Q.

Шаг 2. Обозначим через R_0 параллелепипед R без верхней грани $t = t_0$. Для каждой точки $Q' \in R_0$ компонента $C(Q')$ содержит некоторую точку из γ, но $u(x,t) < u(P_0)$ в точках $(x,t) \in \gamma$. Поэтому если в некоторой точке Q' будет выполнено равенство $u(Q') = u(P_0)$, то в силу предыдущей леммы мы бы имели, что $u(Q') = u(P_0)$ для всех $Q' \in C(Q')$ и, значит, и в точках кривой γ.

[1] Для этого достаточно взять числа $a_i > 0$ и $a_0 > 0$ достаточно малыми, поскольку точка P_0 внутренняя в D.

Следовательно, в каждой точке $Q^{'} \in R_0$ выполнено следующее неравенство:

$$u(Q^{'}) < u(P_0) \quad \text{для всех} \quad Q^{'} \in R_0. \tag{5.18}$$

Шаг 3. Введем функцию

$$h(x,t) := t_0 - t - K|x - x_0|^2, \quad K > 0. \tag{5.19}$$

На параболоиде

$$M: \quad t_0 - t = K|x - x_0|^2$$

имеем $h(x,t) = 0$; выше параболоида M функция $h(x,t) < 0$, а ниже параболоида M имеем $h(x,t) > 0$. Кроме того, непосредственным вы-

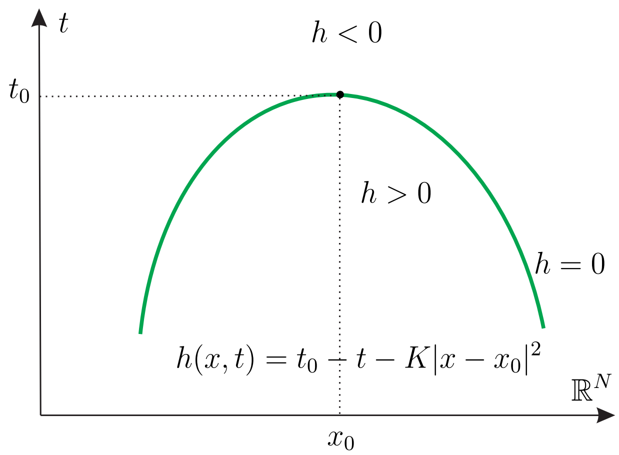


Рис. 24. Параболоид $h(x,t) = 0$.

числением получим, что

$$Lh(x,t) = -2K\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) - 2K\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)(x_i - x_{0i}) + \\ + c(x,t)\left[t_0 - t - K|x - x_0|^2\right] + 1 > 0 \quad \text{в} \quad R, \tag{5.20}$$

если потребовать, чтобы $K > 0$ было мало настолько, что

$$4K\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) \leqslant 1 \quad \text{в} \quad R$$

и размеры параллелепипеда R достаточно малы. [1)]

[1)] Тогда выражения $\left|t_0 - t - K|x - x_0|^2\right|$ и $|x - x_0|$ тоже будут малы.

Шаг 4. Параболоид M разбивает параллелепипед R на две части. Обозначим часть, лежащую ниже параболоида M $(h > 0)$ через $R^{'}$. Верхняя граница $B^{'}$ множества $R^{'}$ касается гиперплоскости $t = t_0$ только в точке $P_0 = (x_0, t_0)$. Поэтому на остальной части $B^{''}$ границы

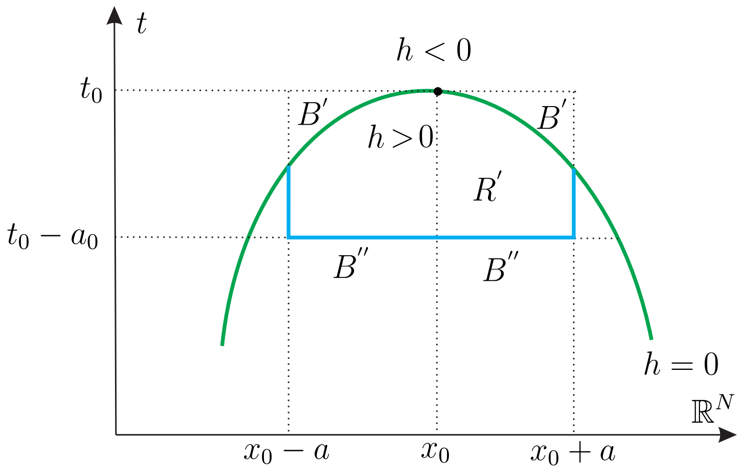


Рис. 25. Множество $R^{'}$.

$R^{'}$ получим

$$u(x,t) \leqslant u(P_0) - \delta \quad \text{для некоторого} \quad \delta > 0.$$

Отсюда следует, что для функции

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) + \varepsilon h(x,t) \tag{5.21}$$

имеем

$$v(x,t) < u(P_0) \quad \text{при} \quad (x,t) \in B^{''} \tag{5.22}$$

для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$. Далее во всех точках верхней границы $B^{'}$ за исключением точки P_0, имеем

$$v(x,t) = u(x,t) < u(P_0), \quad v(P_0) = u(P_0), \tag{5.23}$$

потому что на $B^{'}$ имеем $h(x,t) = 0$. Поскольку

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) + \varepsilon Lh(x,t) > 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in R^{'},$$

то в силу леммы 1 заключаем, что положительный максимум функции $v(x,t)$ достигается в точке P_0. Следовательно [1],

$$\frac{\partial v(P_0)}{\partial t} = D_t^- v(P_0) \geqslant 0, \quad \frac{\partial h(P_0)}{\partial t} = -1 < 0 \Rightarrow \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} > 0. \qquad (5.24)$$

Замечание 7. Докажем неравенство

$$D_t^- v(P_0) \geqslant 0.$$

Действительно, поскольку функция $v(x,t)$ дифференцируема в окрестности точки P_0 и в этой точке у функции $v(x,t)$ строгий максимум, то при $t < t_0$ выполнено неравенство

$$\frac{v(x_0,t_0) - v(x_0,t)}{t_0 - t} > 0 \Rightarrow D_t^- v(P_0) \geqslant 0.$$

С другой стороны, из предположения, что $u(x,t)$ достигает положительного максимума в точке P_0 находим, что

$$\frac{\partial u(P_0)}{\partial x_i} = 0, \quad c(P_0)u(P_0) \leqslant 0, \quad \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x_0,t_0)\frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x_i \partial x_j} \leqslant 0.$$

Следовательно,

$$0 \leqslant Lu(P_0) \leqslant -\frac{\partial u(P_0)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial u(P_0)}{\partial t} \leqslant 0,$$

что противоречит неравенству (5.24).

Лемма доказана.

Этап IV. Теперь мы можем доказать утверждение теоремы 4.

Шаг 1. Предположим, что

$$u(x,t) \not\equiv u(P_0) \quad \text{в} \quad S(P_0).$$

Тогда найдется такая точка $Q \in S(P_0)$, что $u(Q) < u(P_0)$. Соединим точки Q и P_0 простой непрерывной кривой γ, расположенной в $S(P_0)$ так, чтобы t–координата не убывала от точки Q к точке P_0 (такая кривая существует согласно определению $S(P_0)$). На кривой γ существует точка P_1, в которой $u(P_1) = u(P_0)$ и

$$u(\overline{P}) < u(P_1) \quad \text{для всех точек} \quad \overline{P} \in \gamma_{Q,P_1},$$

где мы обозначили через γ_{Q,P_1} часть кривой γ между Q и P_1.

---

[1] Неравенство $\partial v(P_0)/\partial t \geqslant 0$ выполнено, поскольку производная берется по времени в сторону возрастания времени, а в точке P_0 у функции $v(x,t)$ максимум.

Шаг 2. Теперь построим параллелепипед

$$x_{1i} - a \leqslant x_i \leqslant x_{1i} + a, \quad t_1 - a < t \leqslant t_1, \quad i = \overline{1, N},$$

где $P_1 = (x_{11}, ..., x_{1N}, t_1)$ и постоянная $a > 0$ настолько мала, что параллелепипед лежит в D. Из леммы 5 вытекает, что $u \equiv u(P_1)$ в этом параллелепипеде, а поэтому и на части кривой γ_{Q,P_1}, попадающей в параллелепипед. Пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Справедливо следующее важное усиление этой теоремы:

Теорема 5. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Если* $Lu \geqslant 0$ ($Lu \leqslant 0$) *в* $D \cup \gamma(D)$ *и если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D))$ *имеет в* $\overline{D}$ *положительный глобальный максимум* (*отрицательный глобальный минимум*), *который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma(D)$, *то* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in S(P_0)$, *где* $S(P_0)$ *определяется точно также как и ранее, но относительно* $D \cup \gamma(D)$.

Доказательство.

Утверждение теоремы непосредственно следует из утверждения леммы 5 с учетом определения

$$D_t^- u(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \gamma(D).$$

Теорема доказана.

Следствия из принципа максимума. Можно доказать, что для любой точки $P_0 \in D \cup \gamma(D)$ имеем $\overline{S(P_0)} \cap \partial' D \neq \varnothing$. Справедливы следующие утверждения:

Следствие 1. *Пусть* $D \subset \mathbb{R}^N$ — *ограниченная область, справедливы свойства* (A), (B) *и* (C) *и выполнено равенство* $Lu(x,t) = 0$ *при* $(x,t) \in D \cup \gamma(D)$, *тогда для решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D)) \cap \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *справедлива следующая оценка*:

$$\max_{(x,t) \in \overline{D}} |u(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t) \in \partial' D} |u(x,t)| \tag{5.25}$$

Доказательство.

Шаг 1. Введем следующее обозначение:

$$M := \sup_{(x,t) \in \partial' D} |u(x,t)|. \tag{5.26}$$

Тогда для новой функции

$$v(x,t) := u(x,t) - M$$

имеем

$$Lv(x,t) = -c(x,t)M \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D,$$

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D.$$

Если в некоторой точке $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma(D)$ достигается положительный максимум

$$v(P_0) = M > 0,$$

то это в сильного принципа максимума теоремы 5 означает, что

$$v(x,t) = M \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in S(P_0).$$

Поскольку $\overline{S(P_0)} \cap \partial' D \neq \varnothing$ и $v(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, мы приходим к противоречию, поскольку $v(x,t) \leqslant 0$ на $\partial' D$. Полученное противоречие означает, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D \cup \gamma(D) \Rightarrow u(x,t) \leqslant M \quad \text{в} \quad D \cup \gamma(D).$$

Шаг 2. Поскольку функция $-u(x,t)$ является решением уравнения $L(-u) = 0$, то применяя результат шага 1 для функции $-u(x,t)$ мы получим оценку

$$-u(x,t) \leqslant M \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup \partial' D.$$

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* $c(x,t) \leqslant c_0$ *при* $c_0 > 0$. *Если* $Lu(x,t) = 0$ *в* $D \cup \gamma(D)$, *то для решения* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma(D)) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *выполнено неравенство*

$$\max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| \leqslant e^{c_0 T} \sup_{(x,t)\in\partial' D} |u(x,t)|. \tag{5.27}$$

Доказательство.

Достаточно применить результат следствия 1 к функции

$$v(x,t) = u(x,t)e^{-c_0 t} \Rightarrow (L - c_0)v(x,t) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \max_{(x,t)\in\overline{D}} |v(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t)\in\partial' D} |v(x,t)| \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{-c_0 T} \max_{(x,t)\in\overline{D}} |u(x,t)| \leqslant \sup_{(x,t)\in\partial' D} |u(x,t)|$$

и получить неравенство.

Следствие доказано.

Замечание 8. Важно отметить, что утверждение слабого принципа максимума относится не к локальному максимуму или минимуму в области D, а к глобальному максимуму или минимуму.

Замечание 9. Заметим, что если в операторе L коэффициент $c(x,t) = 0$, то слова положительный максимум и отрицательный минимум можно заменить на максимум и минимум соответственно.

Замечание 10. В утверждении теоремы 5 участвуют только точки $D \cup \gamma(D)$. А для точек множества $\partial\gamma(D)$ (граница $\gamma(D)$) результат теоремы может не иметь место. Рассмотрим следующий пример [7]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{в} \quad (x,t) \in (0,L) \otimes (0,T).$$

Рассмотрим его решение $u(x,t) = x^2 + 2t$, которое, очевидно, достигает строго максимума в точке $(L,T) \in \partial B_T$. Однако, решение не является константой в рассматриваемой цилиндрической области D.

Обратно параболическое уравнение. Пусть $u(x,t) \in \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$. Определим $S_p(P_0)$ как такое множество точек $Q \in \in D \cup \gamma_0(D)$, которые можно соединить некоторой простой непрерывной кривой $\gamma_{Q,P_0} \in D \cup \gamma_0(D)$ с точкой P_0 таким образом, чтобы вдоль нее координата t не возрастала. Для обратно параболического оператора

$$L_p u(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t)u + \frac{\partial u}{\partial t}$$

справедлив сильный принцип максимума.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Если* $L_p u \geqslant 0$ $(L_p u \leqslant 0)$ *в* $D \cup \gamma_0(D)$ *и если* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup \gamma_0(D))$ *имеет в* $\overline{D}$ *положительный глобальный максимум* (*отрицательный глобальный минимум*), *который достигается в точке* $P_0 = (x_0, t_0) \in D \cup \gamma_0(D)$, *то* $u(P) = u(P_0)$ *для всех* $P \in S_p(P_0)$.

Доказательство.

Утверждение теоремы непосредственно следует из утверждения леммы 5 с учетом определения

$$D_t^+ u(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \gamma_0(D).$$

Теорема доказана.

Задача 1. Изобразить множества $C(P_1)$, $C(P_2)$ и $C(P_3)$ (см. рисунок 26).

Решение. На рисунке 27 изображено множество $C(P_1)$.

На рисунке 28 изображено множество $C(P_2)$.

На рисунке 29 изображено множество $C(P_3)$.

§ 6. Первая краевая задача

Напомним ряд обозначений, используемых в этом параграфе. Пусть D — ограниченная $(N+1)$–мерная область в $\mathbb{R}^{N+1}$, и пусть $(x,t) = = (x_1, ..., x_N, t)$ — переменная точка в $\mathbb{R}^{N+1}$. Предположим, что граница ∂D области D состоит из связной нижней крышки B, лежащей на гиперплоскости $t = 0$, из связной верхней крышки B_T, лежащей

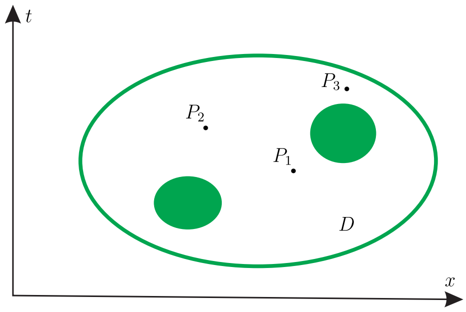


Рис. 26. К задаче 1.

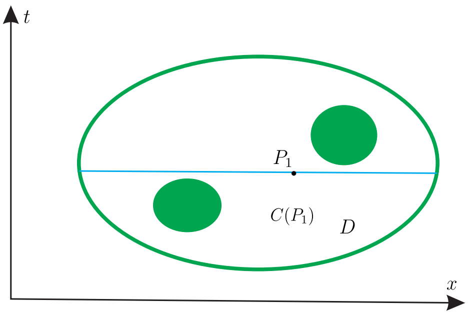


Рис. 27. Множество $C(P_1)$.

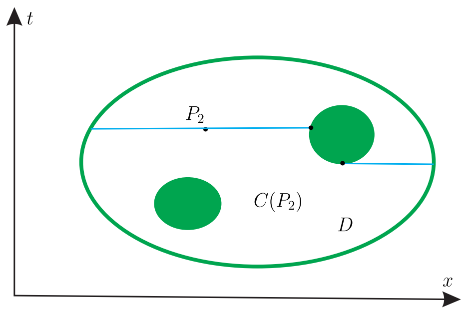


Рис. 28. Множество $C(P_2)$.

на гиперплоскости $t = T > 0$, и боковой границы $S := \partial D \setminus (B \cup B_T)$ (возможно, не связной), лежащей в полосе $0 \leqslant t \leqslant T$. Напомним, что множество $\partial' D := S \cup B$ называется нормальной или параболической границей области D.

Введем обозначения

$$D_\tau := D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad B_\tau := D \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau := S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}.$$

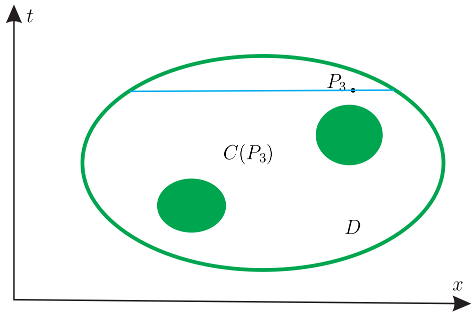


Рис. 29. Множество $C(P_3)$.

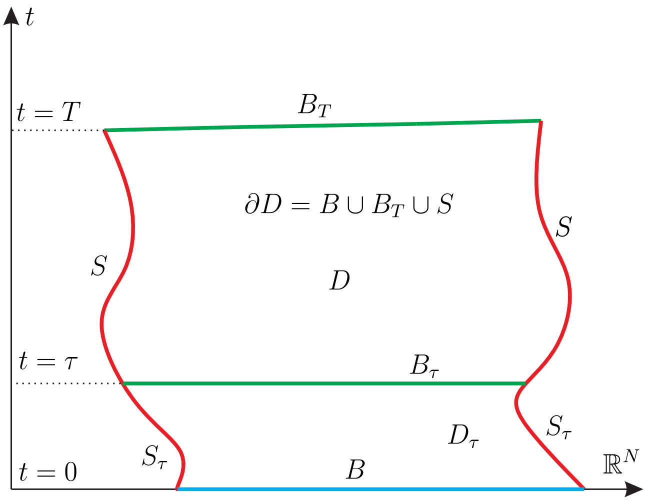


Рис. 30. Область D и ее подмножества.

Допустим, что для каждого τ, $0<\tau<T$, B_τ — область (связное открытое множество). В частности, на рисунке 30 область D удовлетворяет этому условию.

Напомним постановку первой краевой задачи.

Первая краевая задача. *Первая краевая задача состоит в нахождении классического решения* $u(x,t)\in\mathbb{C}(\overline{D})\cap\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D\cup B_T)$ *уравнения*

$$Lu(x,t)=f(x,t)\in\mathbb{C}(D\cup B_T) \quad \text{в} \quad D\cup B_T, \tag{6.1}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$u(x,0)=\varphi(x)\in\mathbb{C}(\overline{B}) \quad \text{на} \quad \overline{B} \tag{6.2}$$

и граничным условиям

$$u(x,t)=g(x,t)\in\mathbb{C}(S) \quad \text{на} \quad S, \tag{6.3}$$

где f, φ, g — это заданные функции и L — параболический оператор.

Замечание 11. Условия (6.2) и (6.3) можно объединить в одно

$$u(x,t) = h(x,t) \quad \text{на} \quad B \cup S, \quad h(x,t) \in \mathbb{C}(B \cup S). \tag{6.4}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 7. *Пусть оператор L удовлетворяет условиям* (A) *и* (B). *Тогда может существовать не более одного решения первой краевой задачи.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть сначала $c(x,t) \leqslant 0$ и $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ — это два решения первой краевой задачи (6.1)—(6.3). Тогда для функции

$$v(x,t) := u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

мы получим соответствующую однородную задачу. Предположим, что $v(x,t) \not\equiv 0$. Тогда можно без ограничения общности предположить, что

$$M := \max_{(x,t) \in \overline{D}} v(x,t) > 0.$$

Пусть $P_0 = (x_0, t_0) \in \overline{D}$ — точка в которой достигается положительный максимум. Ясно, что

$$v(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial' D = S \cup B \text{ [1]}. \tag{6.5}$$

Поэтому положительный максимум может достигаться лишь только на $D \cup B_T$. Однако, если $(x_0, t_0) \in D \cup B_T$, то согласно сильному принципу максимума теоремы 5 приходим к выводу о том, что

$$v(x,t) = M \quad \text{при} \quad (x,t) \in S(P_0).$$

Осталось воспользоваться тем, что $v(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$ и тем, что $\overline{B} \subset \overline{S}(P_0)$. Следовательно,

$$v(x,0) = M \quad \text{при} \quad x \in \overline{B},$$

что противоречит свойству (6.5).

Шаг 2. Пусть теперь функция $c(x,t)$ может быть положительной в области D. Положим по определению

$$c_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{(x,t) \in D} c(x,t) > 0.$$

Тогда перейдем к новой функции $w(x,t)$ следующего вида:

$$w(x,t) = e^{-c_0 t} u(x,t).$$

[1] Напомним, что $S := \partial D \setminus (B_T \cup B)$.

При этом уравнение $Lu(x,t) = 0$ перейдет в уравнение $(L - c_0)w(x,t) = 0$, в котором уже новый коэффициент $c(x,t) - c_0 \leqslant 0$. Далее рассуждаем как на шаге 1.

Теорема доказана.

Пример неединственности. [17] Заметим, что требование ограниченности коэффициентов параболического оператора L является существенным для применения принципа максимума с целью доказательства единственности решения первой краевой задачи. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{1}{t}u_{xx} + \frac{2}{t}u - u_t = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x \in (0,\pi), \tag{6.6}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{6.7}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad \text{при} \quad t > 0. \tag{6.8}$$

Нетрудно проверить, что функция

$$u(x,t) = at\sin x \quad \text{для любой постоянной} \quad a \in \mathbb{R}^1$$

является решением однородной первой краевой задачи (6.6)–(6.8).

Нелинейный параболический оператор. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$Lu(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} F\left(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{6.9}$$

где $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ — это нелинейная функция своих аргументов.

Определение 4. *Нелинейный оператор L, определенный формулой* (6.9), *называется параболическим в точке $(x_0,t_0) \in D$, если для любых $p, p_1, ..., p_N, p_{11}, ..., p_{NN}$ матрица*

$$\left(\frac{\partial F(x_0,t_0,p,p_i,p_{ij})}{\partial p_{ij}}\right) \tag{6.10}$$

является положительно определенной.

Заметим, что если функция $F = F(x,t,p,p_i,p_{ij})$ является непрерывно дифференцируемой по переменным (p,p_i,p_{ij}), то справедлива формула Адамара среднего значения

$$F(x,t,u,u_i,u_{ij}) - F(x,t,v,v_i,v_{ij}) = \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(u_{ij} - v_{ij}) + \sum_{i=1}^{N} b_i(u_i - v_i) + c(u - v), \tag{6.11}$$

где

$$(a_{ij}, b_i, c) = \\ = \int\limits_0^1 \left(F_{p_{ij}}, F_{p_i}, F_p\right)(x, t, su + (1-s)v, su_i + (1-s)v_i, su_{ij} + (1-s)v_{ij})\, ds. \tag{6.12}$$

Воспользовавшись формулой (6.11) мы можем распространить результат теоремы 7 на нелинейный случай, что будет сделано ниже.

Задача 2. Сформулировать корректную (имеющую единственное решение) первую краевую задачу для обратно параболического уравнения в ограниченной области D.

Указание. Внимательно изучите сильный принцип максимума теоремы 6.

§ 7. Положительные решения задачи Коши

В этом параграфе мы будем использовать следующие обозначения:

$$\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0, T], \quad \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0, T].$$

Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\Omega_0) \cap \mathbb{C}(\Omega)$.

Справедлива следующая важная лемма:

Лемма 6. *Пусть оператор L удовлетворяет предположениям* (A) *и* (B) *в Ω_0, и пусть $c(x,t)$ ограничено сверху. Если $Lu(x,t) \leqslant 0$ в Ω_0, $u(x,0) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^N$ и равномерно по $t \in [0,T]$ существует*

$$\liminf_{|x| \to +\infty} u(x,t) \geqslant 0,$$

то $u(x,t) \geqslant 0$ в Ω.

Доказательство.

Шаг 1. Можно считать, что $c(x,t) \leqslant 0$, в противном случае мы бы сделали преобразование $v = ue^{-\gamma t}$ при $\gamma \geqslant c(x,t)$ и получили уравнение для новой функции $v(x,t)$

$$[L - \gamma I]\, v(x,t) = 0.$$

Далее для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$u(x,t) + \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$

а также при достаточно большом $R > 0$

$$u(x,t) + \varepsilon > 0 \quad \text{при} \quad |x| = R, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

причем

$$L(u(x,t) + \varepsilon) = Lu(x,t) + c(x,t)\varepsilon \leqslant 0 \Rightarrow u(x,t) + \varepsilon > 0,$$

если $|x| \leqslant R$ и $t \in [0,T]$ в силу принципа максимума (см. теорему 2).

Шаг 2. Устремляя $\varepsilon \to +0$ мы получим утверждение этой леммы.

Лемма доказана.

Сделаем следующие предположения относительно коэффициентов параболического оператора L:

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(1+|x|), \quad |c(x,t)| \leqslant M(1+|x|^2) \tag{7.1}$$

при $(x,t) \in \Omega_0$ и $i,j = \overline{1,N}$. Справедлива следующая важная теорема:

Теорема 8. *Пусть L — параболический оператор с коэффициентами, непрерывными в Ω_0 и удовлетворяющими условиям* (7.1). *Предположим, что $Lu(x,t) \leqslant 0$ в Ω_0 и*

$$u(x,t) \geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \textit{при} \quad (x,t)\in\Omega \tag{7.2}$$

для некоторых положительных постоянных[1] *B и β. Если $u(x,0) \geqslant 0$ в $\mathbb{R}^N$, то $u(x,t) \geqslant 0$ в Ω.*

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим функцию

$$H(x,t) = \exp\left[\frac{k|x|^2}{1-\mu t} + \nu t\right], \quad t \in [0, 1/(2\mu)], \tag{7.3}$$

удовлетворяющую равенству

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} = \frac{4k^2}{(1-\mu t)^2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)x_ix_j + \frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) + \\ + \frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)x_i + c(x,t) - \frac{\mu k|x|^2}{(1-\mu t)^2} - \nu. \tag{7.4}$$

С помощью оценок (7.1) можно получить следующую оценку:

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} \leqslant \Big(16k^2N^2M + 8kNM + M - \mu k\Big)|x|^2 + (4kNM + M - \nu). \tag{7.5}$$

□ Действительно, с одной стороны, в силу условий (7.1) при $t = 1/(2\mu)$ справедливы следующие неравенства:

$$\frac{4k^2}{(1-\mu t)^2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)x_ix_j \leqslant 16k^2MN^2|x|^2,$$

[1] Здесь мы снова сталкиваемся с необходимостью рассматривать решения в классе растущих функций А. Н. Тихонова.

$$\frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) \leqslant 4kNM,$$

$$\frac{2k}{1-\mu t}\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)x_i \leqslant 4kNM(|x|+|x|^2) \leqslant 4kNM + 8kNM|x|^2,$$

С другой стороны,

$$-\frac{\mu k|x|^2}{(1-\mu t)^2} \leqslant -\mu k|x|^2, \quad c(x,t) \leqslant M|x|^2 + M.$$

Из этих неравенств получим неравенство (7.5). ⊠

Таким образом, для любого $k > 0$ найдутся такие достаточно большие постоянные $\mu > 0$ и $\nu > 0$, что будет выполнено неравенство

$$\frac{LH(x,t)}{H(x,t)} \leqslant 0. \tag{7.6}$$

Шаг 2. Рассмотрим теперь функцию $v(x,t)$, определенную равенством

$$u(x,t) = H(x,t)v(x,t),$$

где $H(x,t)$ — это функция (7.3) с фиксированными $k > \beta$ и с $\mu > 0$ и $\nu > 0$, при которых выполняется неравенство (7.6) для $0 \leqslant t \leqslant 1/(2\mu)$. Заметим, что выполнены следующие неравенства:

$$v(x,t) \geqslant -B\frac{\exp\left\{\beta|x|^2\right\}}{H(x,t)} \geqslant -B\exp\left[-(k-\beta)|x|^2\right]e^{-\nu t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \liminf_{|x|\to+\infty} v(x,t) \geqslant 0$$

равномерно по $t \in [0, 1/(2\mu)]$.

Шаг 3. Функция $v(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\overline{L}v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} \overline{b}_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \overline{c}v - \frac{\partial v}{\partial t} = \overline{f},$$

где

$$\overline{f} = \frac{Lu(x,t)}{H(x,t)} \leqslant 0, \quad \overline{b}_i = b_i + 2\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x_j}, \quad \overline{c} = \frac{LH}{H} \leqslant 0.$$

При помощи леммы 6 мы приходим к выводу о том, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0, 1/(2\mu)].$$

Шаг 4. Далее повторяем рассуждения из шагов 1–3 но для замкнутой области $\mathbb{R}^N \otimes [1/(2\mu), 1/\mu]$ с функцией

$$H(x,t) = \exp\left[\frac{k|x|^2}{2-\mu t} + \nu t\right].$$

Далее по индукции.

Теорема доказана.

Замечание 12. Отметим, что доказанная теорема иногда носит название *теорема Фрагмена–Линделёфа*.

Из доказанной теоремы 8 непосредственно вытекает, что справедлива следующая теорема:

Теорема 9. *Пусть L — это параболический оператор с непрерывными в $\mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ коэффициенами и выполняются условия* (7.1). *Тогда существует не более одного решения задачи Коши*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \tag{7.7}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^N, \tag{7.8}$$

удовлетворяющего условию роста А. Н. Тихонова

$$|u(x,t)| \leqslant B \exp\left[\beta|x|^2\right] \tag{7.9}$$

при некоторых положительных константах B и β.

Доказательство.

Пусть $f(x,t) \equiv 0$ и $\varphi(x) \equiv 0$. Из условия (7.9) вытекает, что

$$u(x,t) \geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{либо} \quad -u(x,t) \geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right].$$

в первом случае из теоремы 8 получим, что $u(x,t) \geqslant 0$, а во втором случае получим, что $-u(x,t) \geqslant 0$. Итак, $u(x,t) \equiv 0$.

Теорема доказана.

Замечание. Теорема Виддера. [4] Отметим, что имеет место следующий важный результат: *любая неотрицательная функция, непрерывная в $\mathbb{R}^1 \otimes [0,+\infty)$, равная нулю при $t = 0$ и удовлетворяющая уравнению теплопроводности*

$$u_{xx} - u_t = 0 \quad \text{в} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^1 \otimes [0,+\infty),$$

равна нулю тождественно.

С другой стороны, А. Н. Тихонов предложил следующий пример:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!}x^{2k}, \quad g(t) = \exp(-t^2) \quad t > 0, \quad g(0) = 0, \tag{7.10}$$

который показывает, что условие знакоположительности существенно. Кроме того, ясно, что функция (7.10) не удовлетворяет условию роста А. Н. Тихонова.

Пример неединственности. [17] Заметим, что во всех теоремах единственности мы требовали, чтобы функция $u(x,t)$ была непрерывна по совокупности переменных (x,t) вплоть до границы ∂D области D. Например, нельзя потребовать, чтобы функция была непрерывна по t для каждого x. Действительно, рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = u_{xx} \quad \text{при} \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \tag{7.11}$$

$$\lim_{t \to +0} u(x,t) = 0 \quad \text{для каждого фиксированного} \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{7.12}$$

Решение этой задачи в классе А. Н. Тихонова имеет следующий явный вид:

$$u(x,t) = \frac{x}{t^{3/2}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right]. \tag{7.13}$$

Отметим, что построенное решение является неограниченным в любой окрестности точки $(0,0)$. Действительно, запишем функцию (7.13) в следующем виде:

$$u(x,t) = \frac{2}{t} \frac{x}{2\sqrt{t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4t}\right].$$

Будем стремить точку (x,t) к точке $(0,0)$ по параболе

$$x = a2\sqrt{t} \quad \text{при} \quad t \to +0, \quad a > 0,$$

тогда

$$u(x(t),t) = \frac{2}{t} a e^{-a^2} \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +0.$$

Задача 3. Пусть L — параболический в $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T)$ оператор с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими (7.1). Предположим, кроме того, что $c(x,t) \geqslant 0$ и

$$u(x,t) \geqslant -B \exp\left[\beta |x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$$

при некоторых положительных $B > 0$, $\beta > 0$, и

$$Lu(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad \Omega_0.$$

Доказать, что из условия

$$u(x,0) \geqslant M > 0 \Rightarrow u(x,t) \geqslant M \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - M.$$

Поскольку $c(x,t) \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) - Mc(x,t) \leqslant 0.$$

Кроме того,

$$v(x,t) \geqslant -M - B\exp\left[\beta|x|^2\right] \geqslant -(M+B)\exp\left[\beta|x|^2\right], \quad v(x,0) \geqslant 0.$$

Следовательно, из теоремы 8, примененный к функции $v(x,t)$ мы получим, что

$$v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow u(x,t) \geqslant M \quad \text{в} \quad \Omega.$$

Задача 4. [12] Пусть L — это равномерно параболический оператор с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющими условиям (7.1). Пусть, кроме того,

$$c(x,t) \geqslant \alpha|x|^2 + \gamma, \quad \alpha > 0, \tag{7.14}$$

Предположим, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию роста

$$u(x,t) \geqslant -B\exp\left[\beta|x|^2\right] \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$$

при некоторых положительных $B > 0$, $\beta > 0$. Предположим, что

$$Lu(x,t) \leqslant 0, \quad u(x,0) \geqslant M_1 > 0.$$

Доказать, что выполнено неравенство

$$u(x,t) \geqslant M_1\exp\left[\lambda|x|^2 t + \nu t\right], \quad \lambda > 0.$$

Решение. Рассмотрим [1] следующую функцию:

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) - M_1\exp\left[\lambda|x|^2 t + \nu t\right].$$

Справедливы следующие вычисления:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = 2\lambda x_i t\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = \left(\lambda|x|^2 + \nu\right)\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right) = \left(2\lambda t\delta_{ij} + 4\lambda^2 t^2 x_i x_j\right)\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right).$$

[1] Переводчиками в этом месте в книге [12] допущена опечатка в выборе вспомогательной функции.

Поэтому имеем

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) - M_1 L\left(\exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right)\right) \leqslant$$
$$\leqslant -M_1\Bigg(4\lambda^2 t^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} x_i x_j a_{ij} + 2\lambda t \sum_{i=1}^{N} a_{ii} +$$
$$+ 2\lambda t \sum_{i=1}^{N} x_i b_i + c - (\lambda|x|^2 + \nu)\Bigg) \exp\left(\lambda|x|^2 t + \nu t\right).$$

Заметим, что в силу равномерной параболичности оператора L вытекают неравенства

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} x_i x_j a_{ij} \geqslant m|x|^2, \quad a_{ii} \geqslant m$$

с некоторой постоянной $m = m(D) > 0$. Кроме того, в силу условий (7.1) и (7.14) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$Lv(x,t) \leqslant -M_1\Bigg(4\lambda^2 t^2 m|x|^2 + 2\lambda t N m -$$
$$- 2\lambda t M|x|(1+|x|) + (\alpha - \lambda)|x|^2 + \gamma - \nu\Bigg) \leqslant 0.$$

при $t \in [0,T]$ и при достаточно больших $\alpha > \lambda$, $\gamma > \nu$. Теперь заметим, что

$$v(x,t) \geqslant -B\exp\left(\beta|x|^2\right) - M_1\exp\left(\lambda|x|^2 T + \nu T\right) \geqslant$$
$$\geqslant -B_1(T)\exp\left(\beta_1(T)|x|^2\right)$$

при некоторых $B_1 > 0$ и $\beta_1 > 0$. Кроме того,

$$v(x,0) \geqslant 0.$$

В силу теоремы 8 мы приходим к утверждению задачи.

Задача 5. [12] Пусть L — это параболический в $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ оператор с непрерывными коэффициентами и для некоторой постоянной $M > 0$ выполнены неравенства

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M(|x|^2+1), \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(|x|+1), \quad c(x,t) \leqslant M. \tag{7.15}$$

Доказать, что если

$$Lu(x,t) \leqslant 0, \quad u(x,t) \geqslant -A(|x|^q + 1) \tag{7.16}$$

при $(x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ для некоторых положительных постоянных A и q, то из условия

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{7.17}$$

вытекает неравенство

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]. \tag{7.18}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].) Рассмотрим вспомогательную функцию

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2A}{r_0^{2p-q}}(|x|^2 + Kt)^p e^{\alpha t}, \quad 2p > q. \tag{7.19}$$

Выберем постоянные $K > 0$ и $\alpha > 0$ таким образом, чтобы для всех $r_0 > 0$ величина $Lw(x,t)$ была отрицательной. Действительно,

$$a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{4Ap}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\left[\frac{2x_i x_j}{|x|^2+Kt} + \delta_{ij}\right] a_{ij}(x,t),$$

$$b_i(x,t)\frac{\partial w}{\partial x_i} = \frac{4Ap}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t} x_i b_i(x,t),$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = \frac{2A}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\left[pK + \alpha\left(|x|^2 + Kt\right)\right].$$

Следовательно,

$$Lw(x,t) = \frac{2m}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2 + Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\Biggl[4p\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}\frac{x_i x_j}{|x|^2+Kt} + 2p\sum_{i=1}^{N} a_{ii} + \\ + 2p\sum_{i=1}^{N} x_i b_i + c\left(|x|^2 + Kt\right) - pK - \alpha\left(|x|^2 + Kt\right)\Biggr].$$

Рассмотрим два случая: $|x| \geqslant 1$ и $|x| < 1$. В первом случае с учетом неравенств

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant M(1 + |x|^2) \leqslant 2M|x|^2, \quad |b_i(x,t)| \leqslant M(1 + |x|) \leqslant 2M|x|$$

получим следующие оценки:

$$4p\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}\frac{x_i x_j}{|x|^2+Kt} \leqslant 8pMN^2|x|^2,$$

$$2p\sum_{i=1}^{N} a_{ii} \leqslant 4pNM|x|^2, \quad 2p\sum_{i=1}^{N} x_i b_i \leqslant 4pNM|x|^2,$$

из которых вытекает неравенство

$$Lw(x,t) \leqslant \frac{2A}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\times$$
$$\times\left\{\left[8pMN^2+8pNM+M-\alpha\right]|x|^2-pK+K(M-\alpha)t\right\}<0, \quad (7.20)$$

если

$$\alpha > M\left(8pN^2+8pN+1\right). \quad (7.21)$$

Во втором случае заметим, что

$$|a_{ij}(x,t)| \leqslant 2M, \quad |b_i(x,t)| \leqslant 2M, \quad c(x,t) \leqslant M. \quad (7.22)$$

Поэтому при $|x|<1$ справедлива оценка

$$Lw(x,t) = \frac{2A}{r_0^{2p-q}}\left(|x|^2+Kt\right)^{p-1} e^{\alpha t}\times$$
$$\times\left[8pMN^2+8pNM+M-pK+(M-\alpha)Kt\right]<0 \quad (7.23)$$

при выполнении условия (7.21) на $\alpha>0$ и условия на $K>0$

$$8pMN^2+8pNM+M<pK. \quad (7.24)$$

Таким образом, имеем при выполнении неравенств (7.21) и (7.24)

$$L(w(x,t)+u(x,t))<0 \quad \text{при} \quad (x,t)\in\mathbb{R}^N\otimes(0,T]. \quad (7.25)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x,t)+u(x,t) \quad (7.26)$$

в замкнутом цилиндре $\overline{\text{Ц}_{0,r_0}^{0,T}} = \{|x|\leqslant r_0\}\otimes\{0\leqslant t\leqslant T\}$. При $t=0$ имеем

$$v(x,0)=u_0(x)+2A\frac{|x|^{2p}}{r_0^{2p-q}}\geqslant 0, \quad (7.27)$$

а при $r=r_0$ имеем

$$v(x,t)\geqslant \frac{2A}{r_0^{2p-q}}\left(r_0^2+Kt\right)^p e^{\alpha t}-A\left(r_0^q+1\right)\geqslant$$
$$\geqslant 2Ar_0^q-A(r_0^q+1)=A(r_0^q-1)>0 \quad (7.28)$$

при $r_0 > 1$. Согласно принципу максимума имеем

$$v(x,t) \geqslant 0 \Rightarrow u(x,t) + w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{\text{Ц}_{0,r_0}^{0,T}}. \tag{7.29}$$

Осталось при фиксированном $(x,t) \in \overline{\text{Ц}_{0,r_0}^{0,T}}$ перейти к пределу при $r_0 \to \to +\infty$ и из явного вида (7.19) функции $w(x,t)$ получить следующее неравенство:

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T].$$

Контрпример к задаче 5. Условия (7.15), налагаемые на коэффициенты оператора L, нельзя ослабить, если ограничиться оценками коэффициентов через степени $|x|$. Действительно, при любом $\delta > > 0$ функция

$$u(x,t) = \begin{cases} \int\limits_{F_\delta(x,t)}^{+\infty} \exp\{-y^2\}\, dy & \text{для} \quad 0 < t \leqslant T, \\ 0 & \text{для} \quad t = 0, \end{cases}$$

где

$$F_\delta(x,t) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)^\delta}{2\sqrt{t}},$$

является непрерывной и ограниченной в $\mathbb{R}^1 \otimes [0,T]$, обращается в нуль при $t = 0$ и удовлетворяет при $t > 0$ уравнению

$$\frac{1}{\delta^2}\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)u_{xx} + \\ + \frac{1}{\delta^2}\left(x - \delta\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)u_x - u_t = 0.$$

В этом уравнении коэффициент при u_{xx} растет не быстрее, чем $M|x|^{2+2\delta}$, а коэффициент при u_x растет не быстрее, чем $M|x|^{1+2\delta.}$ Следовательно, при таком росте коэффициентов нарушается единственность решения задачи Коши в классе ограниченных функций.

Задача 6. [12] Пусть коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ и $c(x,t)$ ограничены в $\Omega = \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$:

$$|a_{ij}(x,t)| < M, \quad |b_i(x,t)| < M, \quad |c(x,t)| < M, \tag{7.30}$$

а функция $u(x,t)$ непрерывна в Ω и удовлетворяет в $\Omega_0 = \mathbb{R}^N \otimes (0,T]$ неравенствам

$$Lu(x,t) \leqslant 0, \quad u(x,t) \geqslant -\exp\left[\beta(|x|^2+1)\right], \tag{7.31}$$

где $\beta > 0$ — некоторая постоянная. Доказать, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T] \tag{7.32}$$

при условии

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{7.33}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].)

Для доказательства утверждения задачи нужно рассмотреть вспомогательную функцию

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left[2\beta(|x|^2+1)e^{\alpha t} - \beta(r_0^2+1)\right] \tag{7.34}$$

и повторить рассуждения при решении предыдущей задачи и проверить, что при надлежащим образом выбранной постоянной $\alpha > 0$ выполнено неравенство

$$Lw(x,t) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T]. \tag{7.35}$$

Действительно, имеем

$$Lw(x,t) = w(x,t)e^{\alpha t}\Biggl[4\beta\sum_{i=1}^{N} a_{ii} + 16\beta^2 e^{\alpha t}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}x_i x_j + \\ + 4\beta\sum_{i=1}^{N} b_i x_i + ce^{-\alpha t} - 2\beta\alpha(|x|^2+1)\Biggr] < 0$$

при условии

$$t \leqslant t_0 = \frac{1}{\alpha},$$

где $\alpha > 0$ достаточно велико.

□ Действительно, имеют место следующие оценки:

$$4\beta\sum_{i=1}^{N} a_{ii} \leqslant 4\beta NM, \quad 16\beta^2 e^{\alpha t}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}x_i x_j \leqslant 16\beta^2 e^{\alpha t} MN^2|x|^2,$$

$$4\beta\sum_{i=1}^{N} b_i x_i \leqslant 4\beta MN|x| \leqslant 2\beta MN|x|^2 + 2\beta MN, \quad ce^{-\alpha t} \leqslant M.$$

Поэтому справедливо неравенство

$$Lw(x,t) \leqslant w(x,t)e\Bigl[2\beta\left(8\beta eMN^2 + MN - \alpha\right)|x|^2 + \\ + 6pNM + M - 2\beta\alpha\Bigr] < 0$$

при достаточно большом $\alpha > 0$. ⊠

Теперь рассмотрим новую функцию

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} w(x,t) + u(x,t). \tag{7.36}$$

В замкнутом цилиндре $\overline{Ц^{0,t_0}_{0,r_0}} = \{|x| \leqslant r_0\} \otimes \{0 \leqslant t \leqslant t_0\}$ при $t = 0$ имеем

$$v(x,0) = u_0(x) + w(x,0) \geqslant \exp\left[2\beta(|x|^2+1) - \beta(r_0^2+1)\right] \geqslant 0,$$

а при $r = r_0$ имеем

$$v(x,t) = \exp\left[2\beta(r_0^2+1)e^{\alpha t} - \beta(r_0^2+1)\right] + u_0(x) \geqslant \\ \geqslant \exp\left[\beta(r_0^2+1)\right] - \exp\left[\beta(r_0^2+1)\right] = 0. \tag{7.37}$$

В силу принципа максимума в замкнутом цилиндре $\overline{Ц^{0,t_0}_{0,r_0}}$ мы получим, что

$$v(x,t) = u(x,t) + w(x,t) \geqslant 0.$$

Переходя к пределу при $r_0 \to +\infty$ в выражении для $v(x,t)$ при фиксированном (x,t) мы получим, что

$$u(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,t_0].$$

Далее нужно повторить рассуждения последовательно в полосах

$$\frac{1}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{2}{\alpha}, \quad \frac{2}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{3}{\alpha}, \cdots \frac{n}{\alpha} \leqslant t \leqslant \frac{n+1}{\alpha}, \cdots$$

и в результате получим, что утверждение задачи выполнено для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$.

З а м е ч а н и е к з а д а ч е 6. Для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx}$$

известны более сильные результаты, чем рассмотренные. В частности, С. Тэклиндом доказано, что решение задачи Коши единственно в классе функций, удовлетворяющих условию

$$|u(x,t)| \leqslant \exp\left[\delta|x|h(|x|)\right] \quad \text{при} \quad |x| > 1,$$

где $\delta > 0$ — это произвольная постоянная, $h(r)$ — положительная неубывающая функция и

$$\int\limits_1^\infty \frac{dr}{h(r)} = +\infty.$$

Причем в случае сходимости последнего интеграла единственность решения задачи Коши может нарушаться.

Задача 7. [12] Пусть непрерывная и ограниченная в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes (0,T], \tag{7.38}$$

причем

$$|u(x,0)| \leqslant M_1, \quad |f(x,t)| \leqslant M_2, \quad c(x,t) \leqslant M_3, \tag{7.39}$$

коэффициенты a_{ij} и b_i подчинены условиям (7.15). Тогда всюду в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ выполнено неравенство

$$|u(x,t)| \leqslant e^{M_3 t} \left(M_1 + M_2 t\right). \tag{7.40}$$

Решение. (Доказательство взято из работы [3].)

Для доказательства рассмотрим вспомогательные функции

$$w_{\pm}(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{M_3 t} \left(M_1 + M_2 t\right) \pm u(x,t).$$

По условию задачи имеем

$$w_{\pm}(x,0) \geqslant 0.$$

Вычислим $Lw_{\pm}(x,t)$. Имеем

$$Lw_{\pm}(x,t) = e^{M_3 t} \left[(c - M_3)(M_1 + M_2 t) - M_2\right] \pm f \leqslant -M_2 e^{M_3 t} \pm f \leqslant 0$$

Отметим, что в силу ограниченности в $\mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ решения $u(x,t)$ найдется такая постоянная $A > 0$, что

$$u(x,t) \geqslant -A \Rightarrow u(x,t) \geqslant -A(|x|^q + 1).$$

В силу результата задачи 3 получим

$$w_{\pm}(x,t) \geqslant 0 \quad \text{всюду в} \quad \mathbb{R}^N \otimes [0,T].$$

§ 8. Теорема типа Жиро

Для того, чтобы исследовать вопрос о единственности решения *второй* и *третьей краевой задачи* нам необходимо доказать так называемую теорему типа Жиро о знаке косой производной. Предварительно дадим определение *свойства строгой сферичности изнутри*.

Определение 5. *Пусть $P_0 = (x_0, t_0)$ — это точка на границе ∂D области D. Если существует такой замкнутый шар $B(\overline{P}, R)$ с центром в точке $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t})$, что $B \subset \overline{D}$, $B \cap \partial D = \{P_0\}$, и если $\overline{x} \neq x_0$, то мы скажем что P_0 обладает свойством строгой сферичности изнутри.*

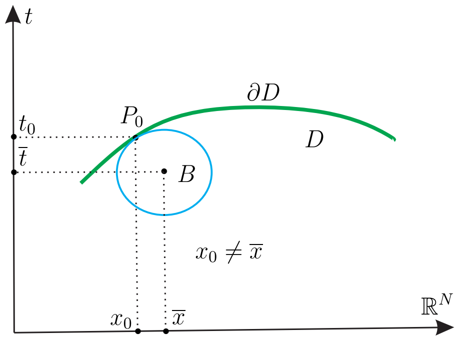


Рис. 31. К определению 4 строгой сферичности.

Замечание 13. Отметим, что если убрать требование $\overline{x} \neq x_0$ в определении 4, то мы получим *свойство сферичности изнутри*.

Замечание 14. Отметим, что свойство строгой сферичности не выполняется для многих естественных областей. Смотри рисунок 32. На этом рисунке, во–первых, отмечены точки A_0, B_0, C_0 и D_0, которые не обладают даже свойством сферичности (не строгой) изнутри, поскольку не существует малого шара, который коснулся бы этих точек оставаясь внутри области D. Далее, нижняя крышка $\overline{D} \cap \{t = 0\}$ цилиндра D обладает свойством сферичности изнутри, но никакая точка нижней крышки не обладает свойством строгой сферичности изнутри. Аналогичным образом верхняя крышка B_T цилиндра D также обладает лишь свойством сферичности изнутри, а не строгой сферичности изнутри. Наконец, в задачах математической физики лишь часть $S_0 :=$ $= \partial D \backslash \left(\overline{\gamma(D)} \cup \overline{\gamma_0(D)}\right)$ боковой границы $S := \partial D \backslash (\gamma(D) \cup \gamma_0(D))$ может обладать свойством строгой сферичности изнутри [1]. Хотя, именно на всей боковой границе S в случае второй и третьей краевых задач ставится условия с косой производной.

Пусть $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cap \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D)$ в области D и

$$Lu(x,t) \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{8.1}$$

Предположим, что коэффициенты оператора L ограничены в D, удовлетворяют условиям (B), (C) и условию равномерной параболичности в D. Пусть решение $u(x,t)$ неравенства (8.1) достигает положительный максимум $M > 0$ в точке $P_0 \in S$:

$$u(P_0) = M \quad \text{в точке} \quad P_0 \in S := \partial D \backslash (\gamma(D) \cup \gamma_0(D)) \,. \tag{8.2}$$

При этих условиях справедлива следующая *теорема типа Жиро*:

[1] Ясно, что $S_0 \subset S$.

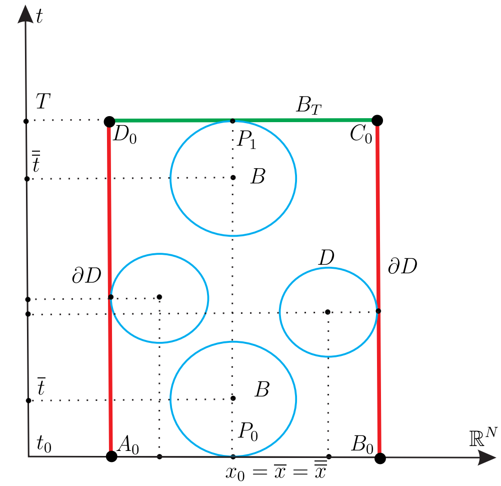


Рис. 32. К замечанию 14.

Т е о р е м а т и п а Ж и р о. *Если выполняются указанные выше условия, точка $P_0 \in S$ обладает свойством строгой сферичности изнутри и существует окрестность V точки P_0, такая, что*

$$u(x,t) < M \quad \text{в} \quad D \cap V, \tag{8.3}$$

то для любого некасательного внутреннего направления l_{P_0} выполнено неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} < 0. \tag{8.4}$$

З а м е ч а н и е 15. Некасательным внутренним направлением мы называем направление из точки P_0 внутрь шара $B(\overline{P}, R)$ из условия строгой сферичности изнутри в точке $P_0 \in S$. Напомним определение

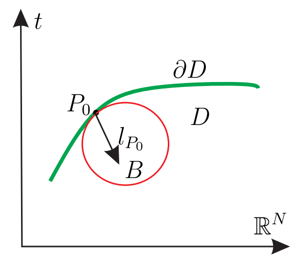


Рис. 33. Некасательное внутреннее направление и шар B.

производной по внутреннему направлению l_{P_0}. Рассмотрим луч, проходящий через точку $P_0 = (x_0, t_0) \in S$ и параллельный внутреннему направлению

$$l_{P_0} = (l_{x_0}, l_{t_0}) = (\cos\beta_{x_{01}}, ..., \cos\beta_{x_{0N}}, \cos\beta_{t_0}), \ \sum_{j=1}^{N} \cos^2\beta_{x_{0j}} + \cos^2\beta_{t_0} = 1.$$

Тогда производная функции $u(x,t)$ по внутреннему направлению l_{P_0} определяется следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} := \lim_{0<\lambda\to 0} \frac{u(x_0 + \lambda l_{x_0}, t_0 + \lambda l_{t_0}) - u(x_0, t_0)}{\lambda}. \qquad (8.5)$$

Отметим, что при условиях теоремы выполнено неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} \leqslant 0, \qquad (8.6)$$

поскольку в точке $P_0 = (x_0, t_0)$ у функции $u(x,t)$ максимум, а в части окрестности $D \cap V \supset B$ выполнено неравенство $u(x,t) < M$. Заметим также, что результат теоремы — это строгое неравенство.

Доказательство.

Шаг 1. Можно считать, что внутренность $\operatorname{int} B$ замкнутого шара $B(\overline{P}, R)$

$$\operatorname{int} B := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ \sum_{j=1}^{N} (x_j - \overline{x}_j)^2 + |t - \overline{t}|^2 < R^2 \right\} \subset D \cap V \text{ [1]}.$$

Обозначим границу шара B через ∂B. Пусть

$$\pi := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ \alpha_0 t + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j = \beta \right\} \text{ [2]}$$

— это гиперплоскость, которая делит пространство $(x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ на два полупространства π^- и π^+

$$\pi^- := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ \alpha_0 t + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j < \beta \right\},$$

$$\pi^+ := \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1} : \ \alpha_0 t + \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x_j > \beta \right\}$$

[1] Можно просто выбрать шар B достаточно малым.

[2] α_0, α_j и β — это некоторые вещественные числа.

таким образом, чтобы

$$\overline{P} = (\overline{x}, \overline{t}) \in \pi^-, \quad P_0 = (x_0, t_0) \in \pi^+.$$

Так как $\overline{x} \neq x_0$, мы можем, варьируя вещественными числами α_0, α_j и β выбрать гиперплоскость π таким образом, чтобы

$$B^+ \stackrel{\mathrm{def}}{=} \pi^+ \cap B \neq \varnothing \quad \text{и} \quad |x - \overline{x}| \geqslant a > 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in B^+.$$

При этом граница B^+ состоит из части $C_1 \in \partial B$ и другой части $C_2 \in \in B \cap \pi$.

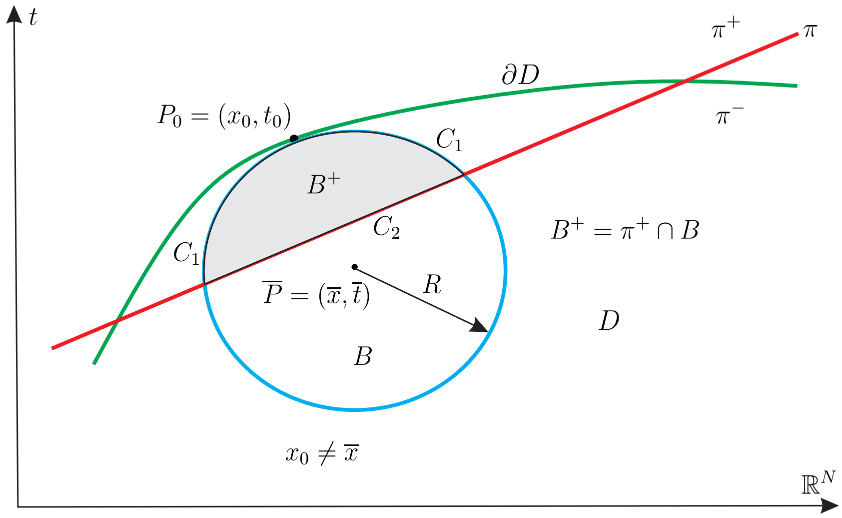


Рис. 34. Множество B^+ и его граница $C_1 \cup C_2$.

Шаг 2. Введем функцию

$$h(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \exp\left\{-\alpha\left[|x-\overline{x}|^2 + |t-\overline{t}|^2\right]\right\} - \exp\left\{-\alpha R^2\right\}. \tag{8.7}$$

Напомним, что R — это радиус замкнутого шара $B(\overline{P}, R)$. Имеем

$$h(x,t) = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in C_1, \quad h(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{B^+}, \tag{8.8}$$

причем можно проверить, что [1]

$$Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad B^+ \tag{8.9}$$

при достаточно большом $\alpha > 0$.

[1] Здесь существенно, что $x_0 \neq \overline{x}$ и поэтому выполнено следующее неравенство: $|x - \overline{x}| \geqslant a > 0$ для всех $(x,t) \in B^+$.

□ Действительно, имеют место равенства

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -2\alpha(t - \overline{t}) \exp\left\{-\alpha\left[|x - \overline{x}|^2 + |t - \overline{t}|^2\right]\right\},$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = -2\alpha(x_i - \overline{x}_i) \exp\left\{-\alpha\left[|x - \overline{x}|^2 + |t - \overline{t}|^2\right]\right\},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} = -[2\alpha\delta_{ij} - 4\alpha^2(x_i - \overline{x}_i)(x_j - \overline{x}_j)] \exp\left\{-\alpha\left[|x - \overline{x}|^2 + |t - \overline{t}|^2\right]\right\}.$$

Из этих равенств вытекает следующее выражение для $Lh(x,t)$:

$$\begin{aligned} Lh(x,t) = \Bigg[4\alpha^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)(x_i - \overline{x}_i)(x_j - \overline{x}_j) - 2\alpha \sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t) - \\ - 2\alpha \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)(x_i - \overline{x}_i) + 2\alpha(t - \overline{t}) + c(x,t)\Bigg] \times \\ \times \exp\left\{-\alpha\left[|x - \overline{x}|^2 + |t - \overline{t}|^2\right]\right\} - \\ - c(x,t)\exp\left\{-\alpha R^2\right\}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Поскольку по исходному предположению оператор L является равномерно параболическим в D, то поэтому найдется постоянная $m = m(D) > 0$ такая, что имеет место оценка снизу

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)(x_i - \overline{x}_i)(x_j - \overline{x}_j) \geqslant m|x - \overline{x}|^2 \geqslant ma^2 =: d_1 > 0 \tag{8.11}$$

для всех $(x,t) \in \overline{B}^{+}$. В шаре B справедливы неравенства сверху

$$\left|\sum_{i=1}^{N} a_{ii}(x,t)\right| + \left|\sum_{i=1}^{N} b_i(x,t)(x_i - \overline{x}_i)\right| + \left|t - \overline{t}\right| \leqslant K_1 < +\infty, \tag{8.12}$$

$$|c(x,t)| \leqslant K_2 < +\infty. \tag{8.13}$$

Из (8.10) и (8.11)–(8.13) вытекает неравенство снизу [1)]

$$Lh(x,t) \geqslant \left[4\alpha^2 d_1 - 2\alpha K_1 - K_2\right] \exp\left\{-\alpha\left[|x - \overline{x}|^2 + |t - \overline{t}|^2\right]\right\} > 0$$

при достаточно большом $\alpha > 0$. ⊠

[1)] Напомним, что $c(x,t) \leqslant 0$.

Шаг 3. Введем следующую функцию:

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x,t) + \varepsilon h(x,t), \quad \varepsilon > 0. \tag{8.14}$$

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция $v(x,t)$ будет удовлетворять условиям

$$v(x,t) < M \quad \text{на} \quad C_2, \quad v(x,t) = u(x,t) < M \quad \text{на} \quad C_1 \backslash \{P_0\}, \tag{8.15}$$

причем

$$v(P_0) = u(P_0) = M. \tag{8.16}$$

Поскольку

$$Lv(x,t) = Lu(x,t) + \varepsilon Lh(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad B^+, \tag{8.17}$$

то функция $v(x,t)$ в силу принципа максимума не может принимать своего максимального значения $M > 0$ во внутренней точке B^+. Итак,

$$v(x,t) < M \quad \text{внутри} \quad B^+. \tag{8.18}$$

Шаг 4. Из (8.16), (8.18) и (8.5) вытекает, что

$$\frac{\partial v}{\partial l_{P_0}} \leqslant 0. \tag{8.19}$$

Заметим, что

$$\frac{\partial h}{\partial n_{P_0}} > 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \tau_{P_0}} = 0, \tag{8.20}$$

где n_{P_0} — это внутренняя нормаль к сфере ∂B в точке P_0, а τ_{P_0} — это касательная к сфере ∂B в той же точке P_0.

□ Действительно, запишем уравнение (8.7) для функции $h(x,t)$ в обобщенной сферической системе координат

$$\begin{cases} (r, \varphi, \vartheta_1, ..., \vartheta_{N-1}), & \text{если} \quad N \geqslant 2; \\ (r, \varphi), & \text{если} \quad N = 1. \end{cases}$$

Это уравнение имеет следующий вид:

$$h = \exp\left(-\alpha r^2\right) - \exp\left(-\alpha R^2\right).$$

Производная по направлению <u>внешней нормали</u> в точке $P_0 \in \partial B$ равна

$$\frac{\partial h}{\partial r}(P_0) = -2\alpha R \exp\left(-\alpha R^2\right) < 0,$$

тогда производная по направлению n_{P_0} <u>внутренней нормали</u> в точке $P_0 \in \partial B$ равна

$$\frac{\partial h}{\partial n_{P_0}} = 2\alpha R \exp\left(-\alpha R^2\right) > 0.$$

Поскольку функция $h(x,t)$ в сферической системе координат зависит только от r, то ее производная по касательной τ_{P_0} равна нулю

$$\frac{\partial h}{\partial \tau_{P_0}} = 0. \quad \boxtimes$$

Заметим, что

$$\frac{\partial h}{\partial l_{P_0}} = \cos(l_{P_0}, n_{P_0}) \frac{\partial h}{\partial n_{P_0}} + \cos(l_{P_0}, \tau_{P_0}) \frac{\partial h}{\partial \tau_{P_0}} = \cos(l_{P_0}, n_{P_0}) \frac{\partial h}{\partial n_{P_0}} > 0,$$

поскольку

$$\cos(l_{P_0}, n_{P_0}) > 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial h}{\partial l_{P_0}} > 0. \tag{8.21}$$

Итак, из (8.19) и (8.21) вытекает, что

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} = \frac{\partial v}{\partial l_{P_0}} - \varepsilon \frac{\partial h}{\partial l_{P_0}} < 0. \tag{8.22}$$

Лемма доказана.

Замечание 16. Важным усилением утверждения теоремы типа Жиро является теорема 7 О. А. Олейник из книги [3]. Результат теоремы типа Жиро можно, в частности, распространить на точки границы $\partial\gamma(D)$ верхней крышки [1]) $\gamma(D)$.

Пусть точка $P_0 = (x_0, t_0) \in \partial B_{t_0}$, где $B_{t_0} \subset \gamma(D)$ — это связная компонента верхней крышки, расположенная на гиперплоскости $t = t_0$. Согласно определению верхней крышки $\gamma(D)$ и боковой границы $S := = \partial D \setminus \{\gamma(D) \cup \gamma_0(D)\}$ справедливо выражение

$$P_0 \subset \partial B_{t_0} \cap S.$$

Предположим, что существует такой шар A, что $P_0 \in \partial A$ и все его точки, лежащие в области $0 < t < t_0$, принадлежат D, причем радиус этого шара проведенный в точку P_0 не параллелен оси t. В этом случае для точки P_0 справедливо строгое неравенство (8.6). Этот случай изображен на следующем рисунке.

Замечание 17. Предположение, что

$$u(x,t) < M \quad \text{в} \quad D \cap V,$$

[1]) Само утверждение из работы [3] относится ко всем точкам боковой границы S. Просто для нас важен результат теоремы в случае цилиндрической области D.

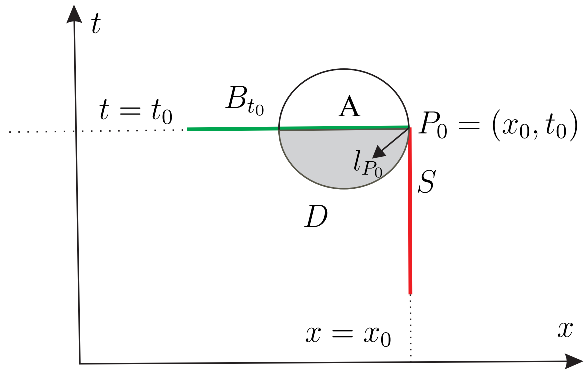


Рис. 35. Шар A.

является, конечно, существенным, так как в противном случае $u(x,t)$ могла бы быть постоянной в $D \cap V$ и тогда бы

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}}(P_0) = 0.$$

Контрпример к теореме типа Жиро 1. Заметим, что если P_0 — это угловая точка границы ∂D, то теорема типа Жиро может оказаться неверной. Например, определим область D неравенствами

$$x^2 + t^2 < R^2, \quad t < \gamma_1 x, \quad t < \gamma_2 x, \quad \gamma_1 > 0 > \gamma_2.$$

Пусть

$$P_0 = (0,0), \quad Lu(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$
$$u(x,t) = (t - \gamma_1 x)(\gamma_2 x - t) + 1,$$

то

$$u(x,t) < 1 \quad \text{в} \quad D, \quad u(x,t) = 1 \quad \text{в} \quad P_0,$$
$$Lu(x,t) = -2\gamma_1\gamma_2 + \overline{\overline{o}}(|x| + |t|) > 0,$$

если $R > 0$ достаточно малое. Однако,

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} = 0$$

для любого направления l_{P_0}. Проверьте сами!

Контрпример к теореме типа Жиро 2. Заметим, что условие строгой сферичности изнутри нельзя заменить на условие сферичности изнутри, т. е. условие $x_0 \neq \overline{x}$ существенно. Действительно, рассмотрим область $D = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^1, \ t > 0\}$. Пусть

$$P_0 = (0,0), \quad Lu(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad u(x,t) = 1 - t^2.$$

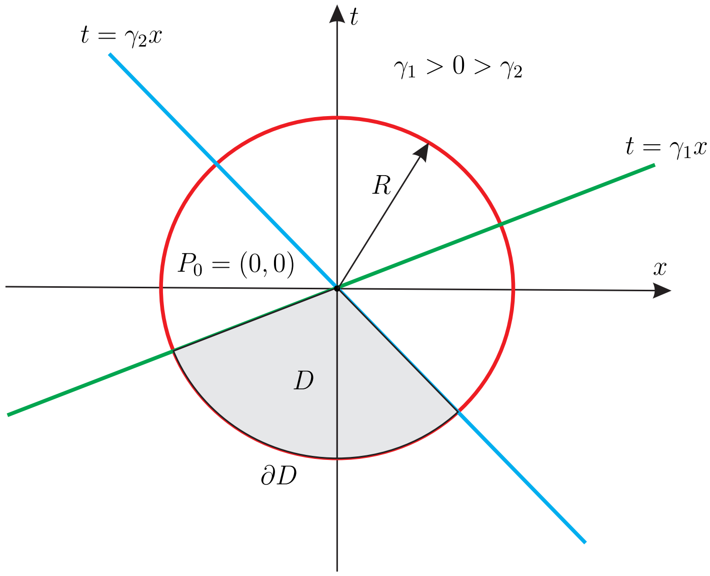


Рис. 36. Область D с угловой точкой $P_0 = (0, 0)$.

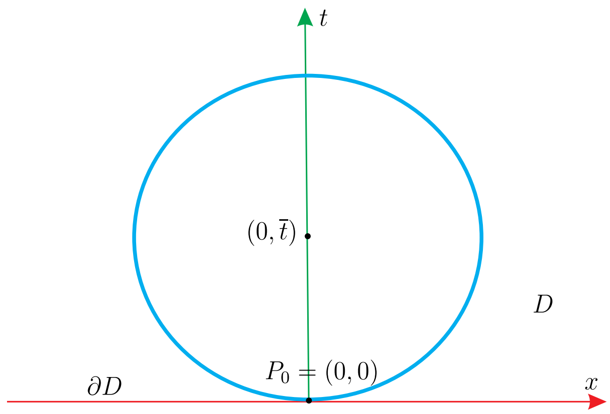


Рис. 37. Область D с условием нестрогой сферичности всей границы ∂D.

Для функции $u(x,t)$ имеем

$$Lu(x,t) = 2t > 0 \quad \text{в} \quad D, \quad u(P_0) = 1, \quad u(x,t) < 1 \quad \text{в} \quad D,$$

но при этом

$$\frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} = 0$$

для любого направления l_{P_0}. Проверьте сами!

§ 9. Вторая и третья краевые задачи

Будем пользоваться обозначениями первого параграфа. Пусть $D := = Q \otimes (0,T) \subset \mathbb{R}^{N+1}$ — это цилиндрическая область, $Q \subset \mathbb{R}^N$ — область, $B = Q \otimes \{t = 0\}$ — нижняя крышка цилиндра D, $B_T = Q \otimes \{t = = T\}$ — верхняя крышка цилиндра D, $S := \partial D \setminus (B \cup B_T) = \partial Q \otimes [0,T]$ — это боковая граница. Пусть функции $f(x,t) \in \mathbb{C}(D \cup B_T)$, $\varphi(x) \in \in \mathbb{C}(\overline{B})$ и $\psi(x,t) \in \mathbb{C}(S)$.

Постановка третьей краевой задачи. *Найти функцию* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D}) \cup \mathbb{C}^{1,0}_{x,t}(D \cup S) \cup \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T)$, *удовлетворяющую уравнению*

$$Lu(x,t) = f(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{9.1}$$

начальному условию

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \textit{при} \quad x \in \overline{B} \tag{9.2}$$

и граничному условию

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t)u(x,t) = \psi(x,t) \quad \textit{при} \quad (x,t) \in S, \tag{9.3}$$

где $\nu_{x,t}$ *— это конормаль в точке* $(x,t) \in S$. *В том случае, если* $\beta(x,t) = 0$ *задача* (9.1)–(9.3) *носит название второй краевой задачи.*

Замечание 18. Отметим, что каждая точка части $S_0 := = \partial D \setminus \left(\overline{B} \cup \overline{B}_T\right)$ боковой границы $S := \partial D \setminus (B \cup B_T)$ цилиндрической области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, очевидно, удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри.

Справедлива следующая теорема:

Теорема единственности решения третьей краевой задачи. *Пусть L — это равномерно параболический оператор с непрерывными и ограниченными в цилиндрической области D коэффициентами. Предположим, что $c(x,t) \leqslant 0$, $\beta(x,t) \leqslant 0$. Тогда существует не более одного решения третьей краевой задачи.*

Доказательство. В силу линейности задачи нам нужно доказать, что если $f(x,t) \equiv 0$ в $D \cup B_T$, $\varphi(x) \equiv 0$ в $\overline{B}$ и $\psi(x,t) \equiv 0$ на S, то $u(x,t) \equiv 0$ в D.

Шаг 1. Допустим, что тем не менее $u(x,t) \not\equiv 0$. Можно считать, что $u(x,t)$ имеет положительный максимум $M > 0$ в $\overline{D}$. Если

$$u(P_0) = M, \quad P_0 = (x_0, t_0),$$

то $P_0 \notin B_{t_0}$ при $0 < t_0 \leqslant T$, так как из сильного принципа максимума теоремы 5 следовало бы, что

$$u(x,t) \equiv M \quad \text{при} \quad (x,t) \in S(P_0) = (D \cup B_T) \cap \{0 < t \leqslant t_0\}.$$

По условию $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, поэтому

$$u(x,0) = M > 0 \quad \text{для всех} \quad x \in B,$$

но это противоречит нашему предположению, что $\varphi(x) = 0$ на $\overline{B}$.

Шаг 2. Предположим теперь, что

$$u(P_0) = M > 0 \quad \text{в точке} \quad P_0 = (x_0, t_0) \in S_0 := \partial D \backslash \left(\overline{B} \cup \overline{B}_T\right),$$

причем в силу шага 1 имеем

$$u(x,t) < M \quad \text{для всех} \quad V \cap D,$$

где V — некоторая окрестность точки P_0. В противном случае мы точно также как и на первом шаге получим, что $u(x,t) = 0$. Поскольку всякая точка $P \in S_0$ удовлетворяет условию строгой сферичности изнутри, то мы можем применить теорему типа Жиро и получить, что

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{P_0}} < 0 \Rightarrow 0 > \frac{\partial u}{\partial \nu_{P_0}} = -\beta(P_0)u(P_0) \geqslant 0 \tag{9.4}$$

и получить противоречие.

Рассмотрим теперь случай $P_0 \in S \backslash S_0$. Ясно, что такие точки P_0 не удовлетворяют условию строгой сферичности изнутри, но теперь нам нужно воспользоваться замечанием 16 к теореме типа Жиро и получить, что и в этом случае выполнено строгое неравенство (9.4) и снова получить противоречие.

Следовательно, $u(x,t) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

Теорема доказана.

Замечание 19. Заметим, что требование строгой сферичности на множестве $S \cap \{t = T\}$ в случае произвольной области D является <u>очень ограничительным</u> — это означает, что область D должная выглядеть «приблизительно» так:

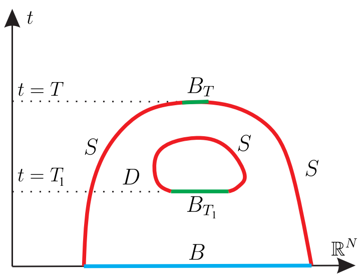


Рис. 38. Область D с условием сферичности точек боковой границы S.

Однако, условие строгой сферичности множества точек $S \cap \{t = T\}$ можно заменить требованием $\beta(x, T) < 0$. Более того, имеет место следующее утверждение:

Задача 8. Доказать единственность решения третьей краевой задачи без требования строгой сферичности боковой границы S при условии

$$\beta(x,t) < 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in S.$$

Указание. В качестве наводящих соображений отметим, что если не требовать условия строгой сферичности изнутри множества точек боковой границы S, то и нельзя применить теорему Жиро — это означает, что в данном случае можно доказать единственность третьей краевой задачи без теоремы типа Жиро.

Решение. В модификации нуждается только доказательство теоремы единственности третьей краевой задачи на шаге 3. Таким образом, имеем

$$u(P_0) = M > 0 \quad \text{в некоторой точке} \quad P_0 = (x_0, t_0) \in S,$$

причем в силу шага 2 имеем

$$u(x,t) < M \quad \text{для всех} \quad V \cap D,$$

где V — некоторая окрестность точки P_0. Тогда в этой точке выполнено противоречивые неравенства:

$$0 \geqslant \frac{\partial u}{\partial l_{P_0}} = -\beta(P_0)u(P_0) > 0.$$

§ 10. Теоремы сравнения — нелинейный случай

В этом параграфе мы рассмотрим теоремы сравнения для *нелинейных краевых задач* достаточно общего вида. Именно сначала рассмотрим следующую *первую краевую задачу*:

$$u_t - \Delta u = f(x,t,u,D_x u) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \tag{10.1}$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad B \cup S, \tag{10.2}$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$. В этом параграфе мы будем использовать введенные в первом параграфе обозначения D, S, B, а также следующие:

$$D_\tau \stackrel{\text{def}}{=} D \cap \{0 < t < \tau\}, \quad B_\tau \stackrel{\text{def}}{=} D \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau \stackrel{\text{def}}{=} S \cap \{0 < t \leqslant \tau\}.$$

При этом мы будем предполагать, что $D \subset \mathbb{R}^N$ — это область и $B_\tau \subset \subset \mathbb{R}^N$ — это область (может быть неограниченная) для каждого $\tau \in \in (0,T)$.

В дальнейшем в спецкурсе профессора Н. Н. Нефедова студентам кафедры математики будет изложен *метод верхних и нижних решений* доказательства разрешимости краевых задач для нелинейных уравнений параболического и эллиптического типов [8]. Метод основан на

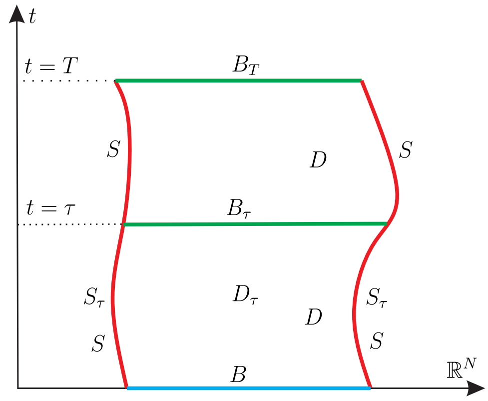


Рис. 39. Область D и множества D_τ, B_τ и S_τ.

признаке сравнения для соответствующих нелинейных краевых задач. Поэтому мы докажем слабый признак сравнения классических решений первой краевой задачи (10.1), (10.2).

Справедлива следующая теорема:

Теорема 10. *Пусть* $v(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *принадлежат классу* $\mathbb{C}^{(2,1)}_{x,t}(D)\cap$ $\cap\,\mathbb{C}(\overline{D})$. *Пусть, кроме того, функция* $f(x,t,p,p_i)$ *при* $i=\overline{1,N}$ *является непрерывной по всем переменным* (x,t,p,p_i) *в области*

$$E \overset{\text{def}}{=} D\otimes\mathbb{R}^1\otimes\mathbb{R}^N.$$

Если

$$v_t - \Delta v > f(x,t,v,D_x v) \quad \textit{в} \quad D, \tag{10.3}$$

$$w_t - \Delta w \leqslant f(x,t,w,D_x w) \quad \textit{в} \quad D, \tag{10.4}$$

и если

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{на} \quad B\cup S, \tag{10.5}$$

тогда

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{в} \quad D. \tag{10.6}$$

Доказательство.

Шаг 1. Рассмотрим следующее множество точек $\mathfrak{M}\subset(0,T)$ таких, что

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{для всех} \quad x\in\overline{B_t} \quad \text{для всех} \quad 0\leqslant t<\sigma,$$

где $\sigma\in\mathfrak{M}$. Если мы докажем, что

$$\sup_{\sigma\in\mathfrak{M}}\{\sigma\} = T,$$

то теорема будет доказана.

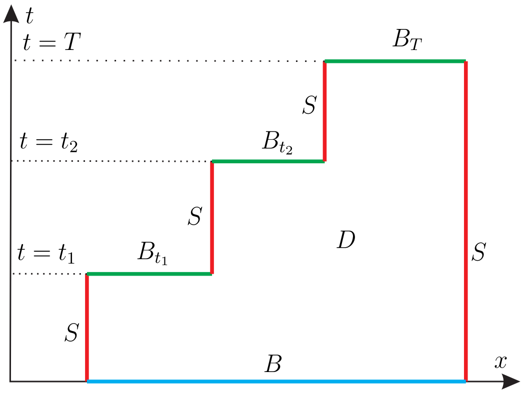


Рис. 40. Область D и соответствующее множество $\mathfrak{M} = \{t_1, t_2, T\}$.

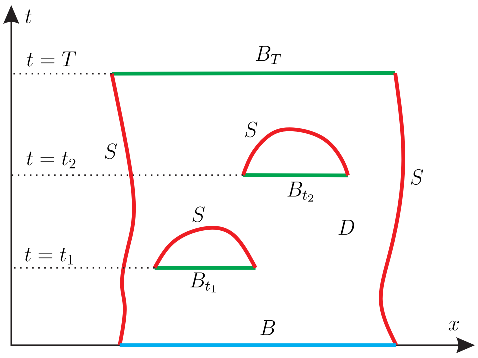


Рис. 41. Область D и соответствующее множество $\mathfrak{M} = \{t_1, t_2, T\}$.

З а м е ч а н и е 20. На следующих двух рисунках изображены области D, для которой множество $\mathfrak{M} = \{t_1, t_2, T\}$.

Шаг 2. Пусть

$$t_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{\sigma \in \mathfrak{M}} \{\sigma\}. \tag{10.7}$$

В силу (10.5) и того, что по условию теоремы $v(x,t), w(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, выполнено неравенство $t_0 > 0$. Если $t_0 < T$, то функция

$$z(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} v(x,t) - w(x,t) > 0 \quad \text{в} \quad D_{t_0}, \quad z(x,t) \geqslant 0 \quad \text{на} \quad B_{t_0}, \tag{10.8}$$

причем найдется такая точка $P_0 = (x_0, t_0) \in \overline{B_{t_0}}$, в которой

$$z(P_0) = 0. \tag{10.9}$$

С другой стороны, в силу того, что $\partial B_{t_0} \in S$ и выполнено строгое неравенство (10.5) точка $P_0 \notin \partial B_{t_0}$. Следовательно, $P_0 \in B_{t_0}$ и является точкой минимума функции $z(x,t)$ в области B_{t_0}. Итак, в точке P_0 выполнены необходимое и достаточное условие минимума

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}(P_0) = 0, \quad \Delta z(P_0) \geqslant 0. \qquad (10.10)$$

Шаг 3. В силу равенств (10.9) и (10.10) и неравенств (10.12), (10.13) выполнено равенство

$$f(x_0, t_0, v(P_0), D_x v(P_0)) = f(x_0, t_0, w(P_0), D_x w(P_0)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v_t(P_0) - \Delta v(P_0) > w_t(P_0) - \Delta w(P_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z_t(P_0) > \Delta z(P_0) \geqslant 0 \Rightarrow v_t(P_0) > w_t(P_0). \qquad (10.11)$$

С другой стороны, в силу определения (10.7) имеем [1]

$$0 = z(P_0) < z(P) \quad \text{для всех} \quad P \in D_{t_0}.$$

Следовательно,

$$z_t(P_0) \leqslant 0 \Rightarrow v_t(P_0) \leqslant w_t(P_0),$$

что противоречит неравенству (10.11).

Полученное противоречие доказывает, что $t_0 = T$

Теорема доказана.

Замечание 21. Заметим, что серия из двух условий (10.12) и (10.13) может быть заменена на следующую серию:

$$v_t - \Delta v \geqslant f(x, t, v, D_x v) \quad \text{в} \quad D, \qquad (10.12)$$

$$w_t - \Delta w < f(x, t, w, D_x w) \quad \text{в} \quad D, \qquad (10.13)$$

Теперь мы рассмотрим примеры применения теоремы 10 сравнения решений.

Задача 9. [12] Пусть

$$\frac{\partial v}{\partial t} > \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + av^2 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0, 4M), \quad a > 0, \qquad (10.14)$$

$$v(x,0) > \frac{\mu}{M}, \quad v(0,t) > \frac{\mu}{M}, \quad v(1,t) > \frac{\mu}{N} \qquad (10.15)$$

при $(x,t) \in [0,1] \otimes [0, 4M]$, а константы удовлетворяют следующим неравенствам:

$$a\mu > 8M + \frac{1}{4}, \quad a > 0, \quad M > 0, \quad \mu > 0, \qquad (10.16)$$

тогда

$$v(1/2, t) \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to 4M. \qquad (10.17)$$

[1] Заметим, что согласно определению $B_{t_0} \notin D_{t_0}$

Р е ш е н и е. Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu}{M - tx(1-x)}. \tag{10.18}$$

Заметим, что при условии (10.16) имеет место следующее неравенство:

$$\frac{\partial w}{\partial t} \leqslant \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^2 \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,4M), \quad a > 0. \tag{10.19}$$

□ Действительно,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\mu t}{(M - tx(1-x))^2}[2x-1], \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\mu x(1-x)}{(M - tx(1-x))^2},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\mu t^2}{(M - tx(1-x))^3}[2x-1]^2 - \frac{2\mu t}{(M - tx(1-x))^2},$$

$$w^2 = \frac{\mu^2}{(M - tx(1-x))^2}.$$

Теперь осталось получить условие на величину $a > 0$, чтобы было в области $D = (0,1) \otimes (0,4M)$ было выполнено неравенство

$$\frac{\mu x(1-x)}{(M - tx(1-x))^2} \leqslant \frac{\mu t^2}{(M - tx(1-x))^3}[2x-1]^2 - \\ - \frac{2\mu t}{(M - tx(1-x))^2} + a\frac{\mu^2}{(M - tx(1-x))^2}.$$

Достаточным условием является, очевидно, следующее неравенство:

$$\mu x(1-x) + 2\mu t < a\mu^2 \Rightarrow a\mu > \frac{1}{4} + 8M. \quad \boxtimes$$

Причем

$$w(x,0) = \frac{\mu}{M}, \quad w(0,t) = \frac{\mu}{M}, \quad w(1,t) = \frac{\mu}{N}. \tag{10.20}$$

Тогда применяя теорему 10, мы получим, что

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in (0,1) \otimes (0,4M). \tag{10.21}$$

Следовательно, при $x = 1/2$ имеем

$$v(1/2,t) > \frac{4\mu}{4M - t}.$$

З а д а ч а 10. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p \in (0,1), \tag{10.22}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.23}$$

Прежде всего будем рассматривать только классические решения этой задачи Коши, т. е. $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно доказать, что за конечное время решение этой задачи обращается в нуль всюду в пространстве $\mathbb{R}^N$.

Решение. Предположим, что

$$0 \leqslant u_0(x) \leqslant M, \quad M > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.24}$$

1. Прежде всего отметим, что из сильного принципа сравнения, который мы сформулируем ниже, и из условия $u_0(x) \geqslant 0$ вытекает неравенство $u(x,t) \geqslant 0$.

2. Функция $v(x,t) = M + \varepsilon$ при $\varepsilon > 0$ является решением следующего дифференциального неравенства:

$$v_t - \Delta v > -|v|^p, \quad v(x,0) = M + \varepsilon > u_0(x). \tag{10.25}$$

Поэтому если в теореме 10 взять в качестве $w(x,t) = u(x,t)$, то мы получим следующее неравенство:

$$u(x,t) < M + \varepsilon \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+.$$

В пределе при $\varepsilon \to +0$ получим искомое неравенство

$$u(x,t) \leqslant M \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{10.26}$$

Итак, $0 \leqslant u(x,t) \leqslant M$.

3. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t + z^p = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0. \tag{10.27}$$

нетрудно проверить, что решением этой задачи является следующая функция:

$$z(t) = \begin{cases} \left(M^{1-p} - (1-p)t\right)^{1/(1-p)}, & \text{если} \quad t \in [0, t_0]; \\ 0, & \text{если} \quad t > t_0, \end{cases} \tag{10.28}$$

где

$$t_0 = \frac{M^{1-p}}{1-p}. \tag{10.29}$$

Функция

$$v(x,t) = z(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{10.30}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_t - \Delta v > -v^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{10.31}$$

□ Действительно, функция $z = z(t)$ удовлетворяет равенству

$$z_t - \Delta z = -z^p \Rightarrow (z+\varepsilon)_t - \Delta(z+\varepsilon) = -z^p > -(z+\varepsilon)^p. \quad \boxtimes$$

Кроме того,

$$v(x,0) = M + \varepsilon > u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.32}$$

Опять применим теорему сравнения 10, в которой возьмем $w(x,t) = u(x,t)$ и получим неравенство

$$u(x,t) < v(x,t) = z(t) + \varepsilon \Rightarrow 0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{10.33}$$

Итак, мы делаем важный вывод — *каждое решение задачи Коши* (10.22), (10.23) *обращается в нуль всюду в* $\mathbb{R}^N$ *за конечное время* $0 < t_1 \leqslant t_0$ *при условиях* $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$ *и* $u_0(x) \not\equiv 0$, *где время* $t_0 > 0$ *определено явной формулой* (10.29).

З а д а ч а 1 1 . Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p > 1, \tag{10.34}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.35}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно получить достаточные условия разрушения решения этой задачи за конечное время.

Р е ш е н и е .

1. Прежде всего заметим, что

$$\Delta u - u_t = -|u|^p \leqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

В предположении, что решение $u(x,t)$ ограничено для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$ при некотором малом $T > 0$ можно из теоремы 3 о принципе максимума для ограниченных решений в неограниченных областях получить, что $u(x,t) \geqslant 0$ для всех $(x,t) \in \mathbb{R}^N \otimes [0,T]$.

2. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t = z^p \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0. \tag{10.36}$$

Её решение дается следующей явной формулой:

$$z(t) = \left(M^{1-p} - (p-1)t\right)^{-1/(p-1)} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < t_0, \tag{10.37}$$

где

$$t_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(p-1)M^{p-1}}. \tag{10.38}$$

Отметим, что функция $z = z(t)$ является монотонно возрастающей, причем

$$\lim_{t \to t_0} z(t) = +\infty.$$

3. Предположим, что выполнено следующее неравенство:

$$u_0(x) \geqslant M > 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.39}$$

Введем функцию:

$$w(x,t) = z(t) - \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, M). \tag{10.40}$$

Эта функция удовлетворяет дифференциальному неравенству:

$$w_t - \Delta w > w^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \tag{10.41}$$

□ Действительно,

$$z_t - \Delta z = z^p \Rightarrow (z-\varepsilon)_t - \Delta(z-\varepsilon) = z^p > (z-\varepsilon)^p$$

при $\varepsilon \in (0, M)$. ⊠

Кроме того,

$$w(x,0) = M - \varepsilon < M \leqslant u_0(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

4. Осталось воспользоваться теоремой 10, в которой нужно взять $v(x,t) = u(x,t)$ и получить следующее неравенство:

$$u(x,t) > z(t) - \varepsilon \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ мы получим искомую оценку снизу

$$u(x,t) \geqslant z(t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}. \tag{10.42}$$

Таким образом, мы приходим к следующему важному выводу — *при условии* $u_0(x) \geqslant M > 0$ *выполнена оценка* (10.42), *из которой вытекает, что для некоторого* $0 < t_1 \leqslant t_0$ *решение задачи Коши* (10.34), (10.35) *разрушается за конечное время*:

$$\limsup_{t \to t_1} \sup_{x \in \mathbb{R}^N} u(x,t) = +\infty. \tag{10.43}$$

Задача 12. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u = |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p \in (0,1), \tag{10.44}$$

$$u(x,0) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.45}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно показать, что в нелинейном случае единственность решения этой задачи может быть нарушена, даже если решение ищется в классе А. Н. Тихонова.

Решение. Действительно, как и в предыдущем примере, имеем $u(x,t) \geqslant 0$. Рассмотрим вспомогательную задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t = z^p \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = 0. \tag{10.46}$$

Его семейство всех решений (их бесконечно много) может быть представлено в следующем виде:

$$z(t) = (1-p)^{1/(1-p)} \begin{cases} (t-t_0)^{1/(1-p)}, & \text{если} \quad t \geqslant t_0; \\ 0, & \text{если} \quad t \in [0, t_0], \end{cases} \tag{10.47}$$

где $t_0 \geqslant 0$ — любое неотрицательное число. Ясно, что решения $u(x,t) = z(t)$ удовлетворяют условиям задачи Коши (10.44) и (10.45).

Задача 13. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$u_t - \Delta u + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad p > 1, \tag{10.48}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.49}$$

Решения рассматриваем в классе $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1}_+) \cap \mathbb{C}(\overline{\mathbb{R}^{N+1}_+})$. Нужно получить оценку сверху на скорость убывания решения при $t \to +\infty$ этой задачи.

Решение. Как и в первом примере, используя сильный признак сравнения можно доказать, что $u(x,t) \geqslant 0$

Предположим, что $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$. Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$z_t + z^p = 0 \quad \text{при} \quad t > 0, \quad z(0) = M > 0, \quad p > 1. \tag{10.50}$$

Единственное решение дается следующей формулой:

$$z(t) = \left(M^{1-p} + (p-1)t\right)^{-1/(p-1)}, \quad t \geqslant 0. \tag{10.51}$$

Как и ранее, можно легко показать, что функция

$$v(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} z(t) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \tag{10.52}$$

удовлетворяет дифференциальному неравенству

$$v_t - \Delta v > -v^p, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \tag{10.53}$$

причем

$$v(x,0) = M + \varepsilon > M \geqslant u_0(x) = u(x,0) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{10.54}$$

Осталось применить теорему сравнения 10, в которой положить $w(x,t) = u(x,t)$, и получить оценку

$$0 \leqslant u(x,t) < v(x,t) = z(t) + \varepsilon \Rightarrow \Rightarrow 0 \leqslant u(x,t) \leqslant z(t) = = \frac{1}{\left(M^{1-p} + (p-1)t\right)^{1/(p-1)}} \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+. \quad (10.55)$$

Задача для самостоятельного решения 1. Рассмотреть задачу Коши

$$u_t - \Delta u + |\nabla u|^q + |u|^p = 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad (10.56)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (10.57)$$

при условиях $q > 0$, $p \in (0,1)$, $0 \leqslant u_0(x) \leqslant M$ и $u(x,t) \geqslant 0$. Доказать, что для решения этой задачи имеет место неравенство (10.33)

Задача для самостоятельного решения 2. Рассмотреть задачу Коши

$$u_t - \Delta u = |\nabla u|^q + |u|^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{N+1}_+, \quad (10.58)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \quad (10.59)$$

при условиях $q > 0$, $1 < p$, $0 < M \leqslant u_0(x)$. Доказать, что для решения этой задачи имеет место неравенство (10.42).

Теперь мы рассмотрим *нелинейную третью краевую задачу* и докажем признак сравнения для нее. Именно сначала рассмотрим следующую краевую задачу:

$$u_t - \Delta u = f(x,t,u,D_x u) \quad \text{в} \quad D \cup B_T, \quad (10.60)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \text{на} \quad \overline{B}, \quad (10.61)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t,u(x,t)) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad S, \quad (10.62)$$

где $D_x = (\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_N})$.

Справедлива следующая теорема *о признаке сравнения для третьей краевой задачи*:

Теорема 11. *Пусть все предположения теоремы* 10 *остаются без изменения. Если*

$$v_t - \Delta v > f(x,t,v,D_x v) \quad \textit{в} \quad D, \quad (10.63)$$

$$w_t - \Delta w \leqslant f(x,t,w,D_x w) \quad \textit{в} \quad D \quad (10.64)$$

и если

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{на} \quad \overline{B}, \quad (10.65)$$

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t,v(x,t)) < \frac{\partial w(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t,w(x,t)) \quad \textit{на} \quad S, \tag{10.66}$$

где $\beta = \beta(x,t,p)$ *— это любая функция определенная на множестве* $S \otimes \mathbb{R}^1$, $\nu_{x,t}$ *— внутренняя конормаль. Тогда*

$$v(x,t) > w(x,t) \quad \textit{в} \quad D. \tag{10.67}$$

Доказательство.

Здесь нужно заметить, что доказательство этой теоремы в точности повторяет доказательство предыдущей теоремы. Только точка P_0 не может принадлежать ∂B_{t_0}, поскольку с одной стороны в силу принципа максимума

$$\frac{\partial z}{\partial \nu_{P_0}} \geqslant 0,$$

а, с другой стороны, в силу неравенства (10.66) имеем

$$\frac{\partial z}{\partial \nu_{P_0}} < 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 22. Заметим, что для цилиндрической области D строгое неравенство (10.66) можно заменить на нестрогое неравенство

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t,v(x,t)) \leqslant \frac{\partial w(x,t)}{\partial \nu_{x,t}} + \beta(x,t,w(x,t)) \quad \text{на} \quad S \tag{10.68}$$

и при этом результат теоремы остается в силе, если применить теорему типа Жиро.

Замечание 23. Заметим, что результат теоремы сравнения остается в силе при замене строгих неравенств на нестрогие. Результатом также будет нестрогое неравенство.

Задача 14. [14] Рассмотрим следующую задачу с *нелинейными граничными условиями*:

$$u_t = \Delta u \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \tag{10.69}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial n_x} = u^p(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes [0,T], \quad p > 1, \tag{10.70}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{10.71}$$

где n_x — это вектор внешней нормали к ляпуновской границе $\partial\Omega \in A^{1,h}$ ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Нужно доказать, что всякое нетривиальное решение $u(x,t) \in \mathbb{C}_t^{(1)}((0,T];\mathbb{C}_x^{(2)}(\overline{\Omega})) \cap \mathbb{C}_{x,t}^{1,0}(\overline{\Omega} \otimes [0,T])$ разрушается за конечное время.

Решение.

Шаг 1. Прежде всего докажем, что

$$\inf_{x\in\Omega} u(x,\varepsilon) = c > 0 \quad \text{для достаточно малого} \quad \varepsilon > 0. \tag{10.72}$$

□ Действительно, в силу доказанного признака сравнения и замечания 23 имеем

$$u(x,t) \geqslant 0,$$

поскольку $v(x,t) = 0$ удовлетворяет уравнению (10.69), граничному условию (10.70) и $u_0(x) \geqslant 0 = v(x,0)$. Теперь заметим, что если

$$u(x_0,\varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \in \Omega,$$

то в силу сильного принципа максимума имеем

$$u(x,t) = 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \overline{\Omega} \otimes [0,\varepsilon],$$

а, стало быть, $u_0(x) = 0$ для всех $x \in \overline{\Omega}$. Это противоречит тому, что $u_0(x) \not\equiv 0$. Кроме того, если $u(x,t) \not\equiv 0$ при $(x,t) \in \Omega \otimes [0,\varepsilon]$ и

$$u(x_0,\varepsilon) = 0 \quad \text{при} \quad x_0 \in \partial\Omega,$$

то в этой точке минимума в силу граничного условия (10.70) и теоремы типа Жиро получим

$$\frac{\partial u}{\partial n_x}(x_0,\varepsilon) = 0 \Rightarrow u(x,\varepsilon) = 0 \;\forall\, x \in \overline{\Omega} \Rightarrow u(x,0) = 0 \;\forall\, x \in \overline{\Omega}. \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Меняя если необходимо $t = 0$ на $t = \varepsilon > 0$ без ограничения общности можем сразу же считать, что

$$\inf_{x\in\Omega} u_0(x) = c > 0. \tag{10.73}$$

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: [1])

$$\varphi_t = \Delta\varphi \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T), \tag{10.74}$$

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n_x} = \varphi^p(x,t) - c^p \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes [0,T], \tag{10.75}$$

$$\varphi(x,0) = c > 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{10.76}$$

Сравнивая $\varphi(x,t)$ с функцией $u(x,t)$ мы получим неравенство

$$u(x,t) \geqslant \varphi(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0,T]. \tag{10.77}$$

[1]) Отметим, что внимательный читатель заметит, что решение следующей третьей краевой задачи удовлетворяет условию согласования начального и граничного условий.

Шаг 3. Рассмотрим следующую функцию:

$$\psi(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(x,t+\eta) - \varphi(x,t) \quad \text{при} \quad \eta > 0. \tag{10.78}$$

Эта функция удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\psi_t = \Delta\psi \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0, T-\eta], \tag{10.79}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial n_x} = \frac{\partial\varphi(x,t+\eta)}{\partial n_x} - \frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial n_x} = \\ = (\varphi^p(x,t+\eta) - \varphi^p(x,t)) = \\ = p\xi^{p-1}(x,t)\psi(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in S = \partial\Omega \otimes (0, T-\eta],\end{aligned} \tag{10.80}$$

где $\xi(x,t) \in [\varphi(x,t), \varphi(x,t+\eta)]$,

$$\psi(x,0) = \varphi(x,\eta) - c \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{10.81}$$

Используя признак сравнения мы получим, что

$$\begin{aligned}\psi(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0, T-\eta) \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi_t(x,t) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in D.\end{aligned} \tag{10.82}$$

Шаг 4. Отметим, что в классе

$$\varphi(x,t) \in \mathbb{C}_t^{(1)}((0,T]; \mathbb{C}_x^{(2)}(\overline{\Omega})) \cap \mathbb{C}_{x,t}^{0,1}(\overline{\Omega} \otimes [0,T])$$

функция

$$z(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_t(x,t)$$

удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$z_t = \Delta z \quad \text{при} \quad (x,t) \in D = \Omega \otimes (0,T),$$

$$\frac{\partial z(x,t)}{\partial n_x} = p\varphi^{p-1}(x,t)z(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial\Omega \otimes (0,T),$$

$$z(x,0) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Аналогично доказательству свойства (10.72) мы получим, что для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$\inf_{x\in\Omega} z(x,\varepsilon) = \inf_{x\in\Omega} \varphi_t(x,\varepsilon) > 0. \tag{10.83}$$

Шаг 5. Рассмотрим следующую функцию:

$$w(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_t(x,t) - \delta\varphi^p(x,t). \tag{10.84}$$

Прежде всего имеет место цепочка выражений

$$
\begin{aligned}
w_t - \Delta w = \varphi_{tt} - \delta p \varphi^{p-1}\varphi_t - \Delta\varphi_t + \delta\Delta\varphi^p = \\
= -\delta p\varphi^{p-1}\Delta\varphi + p(p-1)\delta\varphi^{p-2}|D_x\varphi|^2 + \delta p\varphi^{p-1}\Delta\varphi = \\
= p(p-1)\delta\varphi^{p-2}|D_x\varphi|^2 \geqslant 0,
\end{aligned} \tag{10.85}
$$

поскольку

$$\varphi_{tt} = \Delta\varphi_t.$$

Кроме того,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial n_x} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial n_x} - \delta\frac{\partial \varphi^p}{\partial n_x} = p\varphi^{p-1}\left(\varphi_t - \delta\frac{\partial\varphi}{\partial n_x}\right) = \\
= p\varphi^{p-1}\left(\varphi_t - \delta\varphi^p + \delta c^p\right) = p\varphi^{p-1}w + \delta p c^p\varphi^{p-1} \geqslant p\varphi^{p-1}w.
\end{aligned} \tag{10.86}
$$

Кроме того, при достаточно малом $\delta > 0$ в силу (10.83) выполнено следующее неравенство:

$$w(x,\varepsilon) = \varphi_t(x,\varepsilon) - \delta\varphi^p(x,\varepsilon) \geqslant 0. \tag{10.87}$$

Используя признак сравнения получим, что

$$w(x,t) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]. \tag{10.88}$$

Шаг 6. Итак, выполнено неравенство

$$\varphi_t(x,t) \geqslant \delta\varphi^p(x,t) \quad \text{для всех} \quad (x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]. \tag{10.89}$$

Решением этого дифференциального неравенства является следующее неравенство:

$$\varphi(x,t) \geqslant \left(\varphi(x,\varepsilon) - (p-1)\delta(t-\varepsilon)\right)^{-1/(p-1)} \tag{10.90}$$

для всех $(x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]$. В силу неравенства (10.77) мы получим, что имеет место неравенство

$$u(x,t) \geqslant \left(\varphi(x,\varepsilon) - (p-1)\delta(t-\varepsilon)\right)^{-1/(p-1)} \tag{10.91}$$

для всех $(x,t) \in \Omega \otimes [\varepsilon, T]$. Это неравенство означает, что $T < +\infty$.

Таким образом, утверждение задачи доказано.

§ 11. Случай нелинейного эллиптического оператора общего вида. Теорема сравнения

В этом параграфе мы докажем признак сравнения для общего оператора (эллиптического оператора) следующего вида:

$$L(u)(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} F\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{11.1}$$

в котором функция $F = F(x, t, p, p_i, p_{ij})$ определена на множестве $D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$, на котором она является непрерывно дифференцируемой функцией от $N^2 + N + 3$ переменных. Потребуем, чтобы функция $F = F(x, t, p, p_i, p_{ij})$ определяла эллиптический оператор. Для этого достаточно потребовать, чтобы было выполнено следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \frac{\partial F}{\partial p_{ij}} \xi_i \xi_j > 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^N \tag{11.2}$$

и для всех $(x, t, p, p_i, p_{ij}) \in D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$. Теперь предположим, что область D является цилиндрической:

$$D = \Omega \otimes (0, T), \; S = \partial\Omega \otimes [0, T], \; B = \Omega \otimes \{t = 0\}, \; B_T = \Omega \otimes \{t = T\}.$$

Рассмотрим следующее нелинейное параболическое уравнение:

$$L(u)(x, t) = f(x, t) \quad \text{при} \quad (x, t) \in D \cup B_T, \tag{11.3}$$

а также дифференциальное неравенство

$$L(w)(x, t) \leqslant f(x, t) \quad \text{при} \quad (x, t) \in D \cup B_T. \tag{11.4}$$

Введем функцию

$$v(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} u(x, t) - w(x, t). \tag{11.5}$$

В силу выражений (11.3) и (11.4) для функции $v(x, t)$ в области D выполнено следующее неравенство:

$$F(x, t, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}) - F(x, t, w_i, w_{x_i}, w_{x_i x_j}) - \\ - \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \geqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \tag{11.6}$$

Теперь применим формулу Адамара среднего значения следующего вида:

$$F(x, t, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}) - F(x, t, w, w_{x_i}, w_{x_i x_j}) = \\ = \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x, t) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i} + c(x, t) v(x, t), \tag{11.7}$$

где

$$(a_{ij}(x, t), b_i(x, t), c(x, t)) = \int\limits_0^1 \big(F_{p_{ij}}, F_{p_i}, F_p\big) \Big(x, t, \vartheta u + (1 - \vartheta) w,$$

$$, \vartheta u_{x_i} + (1-\vartheta) w_{x_i}, \vartheta u_{x_i x_j} + (1-\vartheta) w_{x_i x_j}\Big)\, ds. \quad (11.8)$$

Итак, с учетом (11.6) и (11.7) мы получим следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \sum_{i=1}^{N} b_i(x,t) \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i} + c(x,t) v(x,t) - \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \geqslant 0 \quad (11.9)$$

в области D. Предположим, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{на} \quad \partial^{'} D = S \cup B, \quad (11.10)$$

тогда применяя принцип максимума (теоремы 2, 3) для решения $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ в ограниченной и неограниченной цилиндрической области D мы получим, что

$$v(x,t) \leqslant 0 \quad \text{в} \quad D. \quad (11.11)$$

Таким образом, мы приходим к следующему сильному признаку сравнения для нелинейной первой краевой задачи [17]:

Теорема 12. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *— это решение уравнения* (11.3) *в цилиндрической области* D [1]. *Предположим, кроме того, функция* $u(x,t)$ *удовлетворяет граничным условиям*

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{на} \quad \overline{B} = \overline{\Omega}, \quad (11.12)$$

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes [0,T]. \quad (11.13)$$

Пусть $v(x,t)$ *и* $w(x,t)$ *класса* $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D \cup B_T) \cap \mathbb{C}(\overline{D})$ *удовлетворяют неравенствам*

$$L(w)(x,t) \leqslant f(x,t) \leqslant L(v)(x,t) \quad \text{в} \quad D, \quad (11.14)$$

причем оператор L *является параболическим в подобласти* E *области* $D \otimes \mathbb{R}^1 \otimes \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^{N^2}$ *следующего вида*:

$$E = \Big\{ (x,t,p,p_i,p_{ij}) : \\ p \in \{\vartheta u(x,t) + (1-\vartheta) v(x,t)\} \cup \{\vartheta u(x,t) + (1-\vartheta) w(x,t)\}, \\ p_i \in \{\vartheta u_{x_i}(x,t) + (1-\vartheta) v_{x_i}(x,t)\} \cup \{\vartheta u_{x_i}(x,t) + (1-\vartheta) w_{x_i}(x,t)\}, \\ p_{ij} \in \{\vartheta u_{x_i x_j}(x,t) + (1-\vartheta) v_{x_i x_j}(x,t)\} \cup$$

[1] Ограниченной или неограниченной.

$$\cup \{\vartheta u_{x_i x_i}(x,t) + (1-\vartheta) w_{x_i x_j}(x,t)\}, (x,t) \in D,\ i,j = \overline{1,N}\Big\}.$$

Если

$$v(x,0) \leqslant u_0(x) \leqslant w(x,0) \quad \textit{в} \quad \overline{\Omega}, \tag{11.15}$$

$$v(x,t) \leqslant \psi(x,t) \leqslant w(x,t) \quad \textit{на} \quad S, \tag{11.16}$$

тогда

$$v(x,t) \leqslant u(x,t) \leqslant w(x,t) \quad \textit{в} \quad D. \tag{11.17}$$

Задача 15. [10] Рассмотрим следующую первую краевую задачу для *уравнения нелинейной диффузии*:

$$u_t = \Delta u^{1+p} \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0,T), \quad p > 0, \quad T > 0 \tag{11.18}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{11.19}$$

$$u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes [0,T]. \tag{11.20}$$

Рассматривая решения этой задачи с разделенными переменными, с помощью признака сравнения получить оценки решения во времени.

Решение. Прежде всего заметим, что $u(x,t) \geqslant 0$ в силу теоремы 12, в которой нужно взять $v(x,t) = 0$. Будем искать частное решение уравнения (11.18) в виде

$$u_a(x,t) = f_a(x)\varphi_a(t).$$

Подставляя в уравнение (11.18), мы получим равенство

$$\varphi_{at}(t) f_a(x) = \varphi_a^{1+p}(t) \Delta f_a^{1+p}(x) \Rightarrow \frac{\varphi_{at}(t)}{\varphi_a^{1+p}(t)} = \frac{\Delta f_a^{1+p}(x)}{f_a(x)} = \lambda.$$

Нужно рассмотреть два случая: $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$.

Случай первый: глобальная разрешимость. Для удобства положим

$$\lambda = -\frac{1}{p}.$$

Откуда получим два уравнения

$$\varphi_{at}(t) + \frac{1}{p}\varphi_a^{1+p}(t) = 0, \quad \Delta f_a^{1+p}(x) + \frac{1}{p} f_a(x) = 0, \quad (x,t) \in D. \tag{11.21}$$

Функция $\varphi_a(t)$ имеет следующий явный вид:

$$\varphi_a(t) = \frac{1}{(a+t)^{1/p}}, \tag{11.22}$$

где $a > 0$ — произвольная постоянная. А относительно функции $f_a(x)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла граничному условию

$$f_a(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{11.23}$$

Итак, функция
$$u_a(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{f_a(x)}{(a+t)^{1/p}}, \quad a > 0 \tag{11.24}$$
удовлетворяет уравнению
$$u_{at} = \Delta u_a^{p+1} \quad \text{в} \quad D = \Omega \otimes (0, +\infty), \tag{11.25}$$
и граничным условиям
$$u_a(x,0) = \frac{f_a(x)}{a^{1/p}} \quad \text{в} \quad \overline{\Omega}, \tag{11.26}$$
$$u_a(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad S = \partial\Omega \otimes [0, +\infty). \tag{11.27}$$
Пусть начальное условие $u_0(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:
$$\frac{f_a(x)}{a_1^{1/p}} \leqslant u_0(x) \leqslant \frac{f_a(x)}{a_2^{1/p}}, \quad a_1 > 0,\ a_2 > 0, \tag{11.28}$$
тогда в силу теоремы 12, в которой
$$v(x,t) = \frac{f_a(x)}{(a_1+t)^{1/p}}, \quad w(x,t) = \frac{f_a(x)}{(a_2+t)^{1/p}},$$
получим неравенства
$$\frac{f_a(x)}{(a_1+t)^{1/p}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{f_a(x)}{(a_2+t)^{1/p}} \quad \text{при} \quad (x,t) \in \Omega \otimes (0, +\infty). \tag{11.29}$$
Отметим, что существует (см. [10]) не нулевое решение $f_a(x) \not\equiv 0$ краевой задачи
$$\Delta f_a^{1+p}(x) + \frac{1}{p} f_a(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \quad f_a(x) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{11.30}$$

Случай второй: разрушение за конечное время. Для удобства положим
$$\lambda = \frac{1}{p}.$$
Рассуждая аналогичным образом, мы получим следующую функцию:
$$u_b(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T-t)^{1/p}}, \quad T > 0 \tag{11.31}$$
— это произвольная постоянная,
$$\Delta f_b^{p+1}(x) - \frac{1}{p} f_b(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \tag{11.32}$$

$$f_b(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega. \tag{11.33}$$

Нетривиальное решение краевой задачи (11.32), (11.33) существует (см. монографию [19]). Предположим, что начальная функция $u_0(x)$ удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\frac{f_b(x)}{T_1^{1/p}} \leqslant u_0(x) \leqslant \frac{f_b(x)}{T_2^{1/p}}, \quad 0 < T_2 < T_1, \tag{11.34}$$

тогда в силу теоремы 12, в которой

$$v(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T_1 - t)^{1/p}}, \quad w(x,t) = \frac{f_b(x)}{(T_2 - t)^{1/p}},$$

получим неравенства

$$\frac{f_b(x)}{(T_1 - t)^{1/p}} \leqslant u(x,t) \leqslant \frac{f_b(x)}{(T_2 - t)^{1/p}} \quad \text{при} \quad x \in \Omega, \quad t \in [0, T_2). \tag{11.35}$$

Отметим, что из неравенства снизу в (11.35) вытекает *разрушение за конечное время* $T_0 \in [0, T_1]$.

Тематическая лекция 3

ПРОСТРАНСТВА ГЕЛЬДЕРА

В этой лекции мы рассмотрим параболические пространства Гельдера, априорные оценки решений первой краевой задачи в пространствах Гельдера, называемые априорными оценками Шаудера, и, наконец, используя метод продолжения по параметру, мы докажем существование единственного в силу принципа максимума решения первой краевой задачи в параболических пространствах Гельдера.

§ 1. Параболические пространства Гельдера

В пространстве $(x, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$ эвклидово расстояние между точками $z_1 = (x_1, t_1)$ и $z_2 = (x_2, t_2)$ имеет вид

$$d(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|. \tag{1.1}$$

Однако, для наших дальнейших целей метрическое пространство $(\mathbb{R}^{N+1}, d)$ не удобно. Поэтому введем так называемое *параболическое расстояние*

$$\rho(z_1, z_2) = |x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2}. \tag{1.2}$$

Нужно только проверить, что $\rho(z_1, z_2)$ удовлетворяет аксиомам расстояния. Докажем неравенство треугольника

$$\rho(z_1, z_2) \leqslant \rho(z_1, z_3) + \rho(z_3, z_2). \tag{1.3}$$

Для этого заметим, что имеет место следующая цепочка неравенств:

$$|t_1 - t_2| \leqslant |t_1 - t_3| + |t_3 - t_2| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |t_1 - t_2|^{1/2} \leqslant (|t_1 - t_3| + |t_3 - t_2|)^{1/2} \leqslant |t_1 - t_3|^{1/2} + |t_3 - t_2|^{1/2}.$$

Из этой цепочки неравенств сразу же вытекает неравенство треугольника (1.3).

Замечание 1. Отметим, что параболическое расстояние $\rho(z_1, z_2)$ обладает следующим важным свойством — если $z_1 = (rx_1, r^2t)$ и $z_2 = (rx_2, r^2t)$, то

$$\rho(z_1, z_2) = r\left(|x_1 - x_2| + |t_2 - t_1|^{1/2}\right).$$

Это свойство инвариантности относительно указанного растяжения важно для параболических уравнений.

Для функции $u(x,t)$, определенной в области $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$, введем следующие обозначения:

$$[u]_{\delta/2,\delta;D} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z_1 \neq z_2, z_1, z_2 \in D} \frac{|u(z_1) - u(z_2)|}{\rho^\delta(z_1, z_2)}, \tag{1.4}$$

$$|u|_{\delta/2,\delta;D} \stackrel{\text{def}}{=} |u|_{0;D} + [u]_{\delta/2,\delta;D}, \quad |u|_{0;D} = \sup_{(x,t)\in D} |u(x,t)| \tag{1.5}$$

для $\delta \in (0,1]$. Через $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ мы обозначаем линейное пространство всех функций $u(x,t)$, для которых конечна *норма* $|u|_{\delta/2,\delta;D} < +\infty$.

Параболическое пространство Гельдера $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ определим как множество всех вещественнозначных функций $u(x,t)$, заданных в D и таких, что

$$|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \stackrel{\text{def}}{=} |u|_{0;D} + \sum_{i=1}^{N} |u_{x_i}|_{0;D} + |u_t|_{0;D} + \\ + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} |u_{x_i x_j}|_{0;D} + [u]_{1+\delta/2;2+\delta;D} < +\infty, \tag{1.6}$$

где

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta;D} \stackrel{\text{def}}{=} [u_t]_{\delta/2,\delta;D} + \sum_{i,j=1,1}^{N,N} [u_{x_i x_j}]_{\delta/2,\delta;D}. \tag{1.7}$$

Можно доказать, что пространства $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ и $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ являются банаховыми, т. е. полными нормированными пространствами относительно норм (1.5) и (1.6). Действительно, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Пространства $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ и $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ являются банаховыми относительно норм $|\cdot|_{\delta/2,\delta;D}$ и $|\cdot|_{1+\delta/2,2+\delta;D}$, соответственно.*

Доказательство. Доказательство проведем для пространства $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$.

То, что величина $|\cdot|_{1+\delta/2,2+\delta;D}$ является нормой очевидно. Поэтому нам нужно доказать полноту пространства $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$.

Шаг 1. Пусть $\{u_m\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$, т. е.

$$|u_m - u_k|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m,k \to +\infty. \tag{1.8}$$

Отсюда сразу же имеем, что числовая последовательность $|u_m - u_{k_1}|_{1+\delta/2,2+\delta;D}$ является ограниченной для каждого фиксированного $k_1 \in \mathbb{N}$, поэтому в силу неравенства треугольника справедливо следующее неравенство:

$$|u_m|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \leqslant |u_m - u_{k_1}|_{1+\delta/2,2+\delta;D} + |u_{k_1}|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \leqslant K, \tag{1.9}$$

где $K > 0$ и не зависит от $m \in \mathbb{N}$.

Шаг 2. В частности, справедливы следующие неравенства [1]:

$$\sup_{(x,t)\in D} \left| D^2_{x_i x_j} u_m \right| \leqslant K, \quad [D^2_{x_i x_j} u_m]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant K. \tag{1.10}$$

Из первого неравенства получим, что последовательность $\{D^2_{x_i x_j} u_m\}$ является равномерно ограниченной, а из второго неравенства имеем

$$\left| D^2_{x_i x_j} u_m(x_1, t_1) - D^2_{x_i x_j} u_m(x_2, t_2) \right| \leqslant K \left[|x_1 - x_2| + |t_1 - t_2|^{1/2} \right]^{\delta},$$

но это означает, что последовательность $\{D^2_{x_i x_j} u_m\}$ является равностепенно непрерывной. По теореме Арцела существует такая подпоследовательность $\{D^2_{x_i x_j} u_{m'}\}$, которая равномерно сходится в $\mathbb{C}(\overline{D})$, т. е. существует такая функция $v_{ij}(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{D})$, что

$$\sup_{(x,t)\in D} \left| D^2_{x_i x_j} u_{m'} - v_{ij}(x,t) \right| \to +0 \quad \text{при} \quad m^{'} \to +\infty. \tag{1.11}$$

Аналогичным образом, доказываются аналогичные результаты для самой последовательности $\{u_m\}$, последовательностей $\{D_t u_m\}$ и $\{D_{x_i} u_m\}$.

Шаг 3. Нам нужно доказать, что если $\{u_{m''}\}$ — это итоговая подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$ и при этом

$$u_{m''}(x,t) \rightrightarrows u(x,t) \quad \text{равномерно в} \quad (x,t) \in D \quad \text{при} \quad m^{''} \to +\infty, \tag{1.12}$$

то

$$D_{x_i} u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D_{x_i} u(x,t), \quad D^2_{x_i x_j} u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D^2_{x_i x_j} u(x,t), \tag{1.13}$$

$$D_t u_{m''}(x,t) \rightrightarrows D_t u(x,t) \tag{1.14}$$

равномерно в D. Но это следствие того, что из фундаментальности последовательности $\{u_m\}$ в $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ вытекает ее фундаментальность в $\mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(D) \supset \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$, которое является банаховым пространством.

Шаг 4. Докажем теперь, что $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$. Для этого достаточно доказать, что

$$[D_t u(x,t)]_{\delta/2,\delta;D} < +\infty, \quad [D^2_{x_i x_j} u(x,t)]_{\delta/2,\delta;D} < +\infty.$$

Докажем, например, второе неравенство. Действительно, имеем

$$\frac{\left| D^2_{x_i x_j} u_m(P) - D^2_{x_i x_j} u_m(Q) \right|}{\rho^{\delta}(P,Q)} \leqslant K.$$

[1] Здесь мы используем обозначение $D^2_{x_i x_j} u$ для согответствующей частной производной второго порядка от функции u по переменным x_i и x_j.

Возьмем в этом неравенстве $m = m''$ и устремим $m'' \to +\infty$. В результате получим, что

$$\frac{\left|D^2_{x_ix_j}u(P) - D^2_{x_ix_j}u(Q)\right|}{\rho^\delta(P,Q)} \leqslant K.$$

Итак, $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$.

Шаг 5. Осталось доказать, что $\{u_m\}$ сходится по норме к $u(x,t)$. Заметим, что справедливо неравенство

$$|u_m - u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \leqslant \\ \leqslant |u_{m''} - u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} + |u_m - u_{m''}|_{1+\delta/2,2+\delta;D}, \quad (1.15)$$

а поскольку в силу фундаментальности $\{u_m\}$ имеем

$$|u_m - u_{m''}|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m, m'' \to +\infty, \quad (1.16)$$

то нам достаточно доказать, что

$$|u_{m''} - u|_{1+\delta/2,2+\delta;D} \to +0 \quad \text{при} \quad m'' \to +\infty. \quad (1.17)$$

В силу фундаментальности $\{u_m\}$ имеем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие достаточно большие m'' и k'', что

$$\left[D^2_{x_ix_j}u_{m''} - D^2_{x_ix_j}u_{k''}\right]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \varepsilon. \quad (1.18)$$

Отсюда получаем, что для любых $P, Q \in D$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{\rho^\delta(P,Q)}\Bigl|D^2_{x_ix_j}u_{m''}(P) - D^2_{x_ix_j}u_{k''}(P) - \\ - D^2_{x_ix_j}u_{m''}(Q) + D^2_{x_ix_j}u_{k''}(Q)\Bigr| \leqslant \varepsilon. \quad (1.19)$$

стремим в этом неравенстве $k'' \to +\infty$ и получим, что имеет место следующее неравенство:

$$\frac{1}{\rho^\delta(P,Q)}\left|D^2_{x_ix_j}u_{m''}(P) - D^2_{x_ix_j}u(P) - D^2_{x_ix_j}u_{m''}(Q) + D^2_{x_ix_j}u(Q)\right| \leqslant \varepsilon. \quad (1.20)$$

Взяв supremum от обеих частей этого неравенства $P, Q \in D$, $P \neq Q$, в результате мы получим, что

$$\left[D^2_{x_ix_j}u_{m''} - D^2_{x_ix_j}u\right]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow \left[D^2_{x_ix_j}u_{m''} - D^2_{x_ix_j}u\right]_{\delta/2,\delta;D} \to +0 \quad (1.21)$$

при $m'' \to +\infty$. Аналогичным образом можно рассмотреть все слагаемые в выражении (1.17) и доказать его справедливость.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что если область D достаточно «хорошая», например, если область D выпуклая, то рассматриваемые банаховы пространства совпадают с банаховыми пространствами $\mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(\overline{D})$ и $\mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\overline{D})$.

Справедливы следующие неравенства:

$$[uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D}, \tag{1.22}$$

$$|uv|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{\delta/2,\delta;D}|v|_{\delta/2,\delta;D} \tag{1.23}$$

для всех $u, v \in \mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$.

□ Действительно, прежде всего справедливо следующее элементарное неравенство:

$$|u(z_1)v(z_1) - u(z_2)v(z_2)| \leqslant |u(z_1)||v(z_1) - v(z_2)| + |v(z_2)||u(z_1) - u(z_2)|,$$

из которого разделив обе части на $\rho^\delta(z_1, z_2)$ и взяв supremum по $z_1, z_2 \in \in D$, мы получим следующее неравенство:

$$[uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D}. \tag{1.24}$$

Теперь заметим, что справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} |uv|_{\delta/2,\delta;D} = |uv|_{0;D} + [uv]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \\ \leqslant |u|_{0;D}|v|_{0;D} + |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D} \leqslant \\ \leqslant |u|_{0;D}|v|_{0;D} + |u|_{0;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} + |v|_{0;D}[u]_{\delta/2,\delta;D} + [u]_{\delta/2,\delta;D}[v]_{\delta/2,\delta;D} = \\ = |u|_{\delta/2,\delta;D}|v|_{\delta/2,\delta;D}. \quad \boxtimes \end{aligned} \tag{1.25}$$

Справедливо следующее важное утверждение:

Л е м м а 1. *Для всякой функции $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(D)$ и для всех $a_{ij}(x,t), c(x,t) \in \mathbb{C}^{\delta/2,\delta}(D)$ найдется такая постоянная $M > 0$, не зависящая от u, что имеет место следующее неравенство*:

$$|Lu|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant M|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}, \tag{1.26}$$

$$Lu(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x,t)u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

где $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ — это ограниченная область.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что в силу неравенства (1.25) имеем

$$\left|a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |a_{ij}|_{\delta/2,\delta;D}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant M_1|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}. \tag{1.27}$$

Шаг 2. В силу неравенства (1.25) и формулы Тейлора имеем

$$|cu|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |c|_{\delta/2,\delta;D}|u|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant$$
$$\leqslant M_2\left[|u_t|_{0;D} + \sum_{i=1}^{N}|u_{x_i}|_{0;D}\right] \leqslant M_2|u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}. \quad (1.28)$$

Шаг 3. Справедливо неравенство

$$|u_t|_{\delta/2,\delta;D} \leqslant |u|_{1+\delta/2,2+\delta;D}. \quad (1.29)$$

Из неравенств (1.27)–(1.27) вытекает оценка (1.26).
Лемма доказана.

§ 2. Эквивалентные полунормы

Отметим, что величины $[u]_{1+\delta/2;2+\delta;D}$ и $[u]_{\delta/2,\delta;D}$ являются *полунормами*, т.е. функциями для которых выполнены все свойства нормы за исключением того свойства, что

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0,$$

поскольку, например, из равенства $[u]_{\delta/2,\delta;D} = 0$ вытекает, что $u = const$. В дальнейшем при выводе априорной оценки Шаудера в $\mathbb{R}^{N+1}$ по методу Сафонова нам нужно ввести эквивалентную полунорму $[u]'_{1+\delta/2;2+\delta;D}$.

Итак, пусть $\mathcal{P}_2$ — это множество всех полиномов не выше второго порядка вида

$$\mathcal{P}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\alpha t + \sum_{i=1}^{N}\alpha^i x_i + \sum_{i,j=1,1}^{N,N}\alpha^{ij}x_i x_j + \beta\right\} \quad (2.1)$$

с вещественными коэффициентами относительно переменных $t, x_1, ..., x_N$. Пусть

$$B_\rho(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^N : |x-y| < \rho\right\}, \quad Q_\rho(z) = (t-\rho^2, t) \otimes B_\rho(x) \subset \mathbb{R}^{N+1}$$

при $z = (t,x) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Определим следующую полунорму:

$$[u]'_{1+\delta/2,2+\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{z=(x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}} \sup_{\rho>0} \frac{1}{\rho^{2+\delta}} \inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2} |u(z)-p(z)|_{0;Q_\rho(z)}. \quad (2.2)$$

Справедлива следующая теорема:
Теорема 2. *Существует константа $c_1 = c_1(N) > 0$ такая, что для любой функции $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1})$ справедливы оценки*

$$[u]'_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant c_1[u]_{1+\delta/2,2+\delta}, \quad [u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant c_1[u]'_{1+\delta/2,2+\delta}. \quad (2.3)$$

Доказательство.

Шаг 1. Сначала докажем первое неравенство в (2.3). С одной стороны, согласно формуле Тейлора для любых точек $z = (t, x)$, $z_0 = (t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$ имеет место следующее равенство:

$$u(z) = u(t_0, x) + (t - t_0)u_t(\vartheta, x) = \\ = u(z_0) + (t - t_0)u_t(\vartheta, x) + \sum_{i=1}^{N} u_{x_i}(z_0)(x_i - x_{0i}) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_i x_j}(t_0, \xi)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}), \quad (2.4)$$

где $\vartheta \in [t, t_0]$ и $\xi \in [x, x_0]$. С другой стороны, для полинома Тейлора по определению имеем

$$T_{z_0}u(z) \stackrel{\text{def}}{=} u(z_0) + (t - t_0)u_t(z_0) + \\ + \sum_{i=1}^{N} u_{x_i}(z_0)(x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} u_{x_i x_j}(z_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}). \quad (2.5)$$

Пусть $\rho(z, z_0) \leqslant \rho$, где

$$\rho(z, z_0) = |x - x_0| + |t - t_0|^{1/2}.$$

Тогда, в частности, получим

$$|t - t_0| \leqslant \rho^2, \quad |x - x_0| \leqslant \rho.$$

Из (2.4) и (2.5) получим следующую цепочку неравенств:

$$|u(z) - T_{z_0}u(z)| \leqslant |t - t_0|\,|u_t(\vartheta, x) - u_t(z_0)| + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left|u_{x_i x_j}(z_0) - u_{x_i x_j}(t_0, \xi)\right| |x_i - x_{0i}||x_j - x_{0j}| \leqslant \\ \leqslant \rho^2\,|u_t(\vartheta, x) - u_t(z_0)| + \rho^2 \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N} \left|u_{x_i x_j}(z_0) - u_{x_i x_j}(t_0, \xi)\right| \leqslant \\ \leqslant c_1\rho^2[u]_{1+\delta/2,2+\delta}\left(\rho^\delta\left((\vartheta, x), z_0\right) + \rho^\delta\left((t_0, \xi), z_0\right)\right) \leqslant \\ \leqslant c_1\rho^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}. \quad (2.6)$$

Из этого неравенства вытекает цепочка неравенств

$$\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2} |u(z) - p(z)| \leqslant c_1\rho^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{\rho>0} \frac{1}{\rho^{2+\delta}} \inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2} |u(z)-p(z)| \leqslant c_1[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{z\in\mathbb{R}^{N+1}} \sup_{\rho>0} \frac{1}{\rho^{2+\delta}} \inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2} |u(z)-p(z)| \leqslant c_1[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [u]^{'}_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant c_1[u]_{1+\delta/2,2+\delta}. \quad (2.7)$$

Шаг 2. Докажем [1]) теперь второе неравенство в (2.3). Прежде всего обозначим через D один из операторов

$$D_t := \frac{\partial}{\partial t}, \quad D^2_{x_ix_j} := \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Стандартным образом сопоставим этим операторам следующие конечно–разностные операторы σ_h при $h>0$:

$$u(t,x) \to \frac{1}{h^2}\Big[u(t,x)-u(t-h^2,x)\Big], \quad (2.8)$$

$$u(t,x) \to \frac{1}{h^2}\Big[u(t,x+he_i+he_j)- \\ - u(t,x+he_i)-u(t,x+he_j)+u(t,x)\Big]. \quad (2.9)$$

Кроме того, введем операторы $\sigma^{'}_h$, следующего вида:

$$u(t,x) \to u_t(t-h^2,x), \quad (2.10)$$

$$u(t,x) \to \frac{1}{2}\Big[u_{x_ix_i}(t,x+he_i+he_j)+u_{x_jx_j}(t,x+he_i+he_j)+ \\ + 2u_{x_ix_j}(t,x+he_i+he_j)-u_{x_ix_i}(t,x+he_i)-u_{x_jx_j}(t,x+he_j)\Big] \quad (2.11)$$

Используя формулу Тейлора в выражениях (2.8) и (2.9) мы получим следующее равенство:

$$\sigma_h u(z) = \sigma^{'}_{h^{'}} u(z) \quad \text{при} \quad h^{'} = h^{'}(z) \leqslant h. \quad (2.12)$$

$\square$ Действительно, докажем сначала равенство (2.12) для $D=D_t$. Справедливо равенство

[1]) Эта часть доказательства в силу его сложности доказывается в курсе в том случае, если имеется дополнительное время.

$$u(t,x) = u(t-h^2,x) + u_t(t-h^{'2},x)h^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sigma_h u(z) := \frac{1}{h^2}\Big[u(t,x) - u(t-h^2,x)\Big] =$$
$$= u_t(t-h^{'2},x) =: \sigma^{'}_{h'}u(z) \quad \text{при некотором} \quad 0 \leqslant h^{'}(z) \leqslant h. \quad (2.13)$$

Теперь мы докажем равенство (2.12) для случая $D = D^2_{x_i x_j}$. Справедливы следующие равенства:

$$u(t,x+he_i+he_j) = u(t,x) + u_{x_i}(t,x)h + u_{x_j}(t,x)h+$$
$$+\frac{1}{2}u_{x_ix_i}(t,x+h^{'}e_i+h^{'}e_j)h^2 + \frac{1}{2}u_{x_jx_j}(t,x+h^{'}e_i+h^{'}e_j)h^2+$$
$$+u_{x_ix_j}(t,x+h^{'}e_i+h^{'}e_j)h^2, \quad (2.14)$$

$$u(t+he_i,x) = u(t,x) + u_{x_i}(t,x)h + \frac{1}{2}u_{x_ix_i}(t+h^{'}e_i,x)h^2, \qquad (2.15)$$

$$u(t+he_j,x) = u(t,x) + u_{x_j}(t,x)h + \frac{1}{2}u_{x_jx_j}(t+h^{'}e_j,x)h^2 \qquad (2.16)$$

при некотором $h^{'} \in [0,h]$. В силу равенств (2.14)–(2.16) мы получим равенство

$$\sigma_h u(z) :=$$
$$= \frac{1}{h^2}\Big[u(t,x+he_i+he_j) - u(t,x+he_i) - u(t,x+he_j) + u(t,x)\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\Big[u_{x_ix_i}(t,x+h^{'}e_i+h^{'}e_j) + u_{x_jx_j}(t,x+h^{'}e_i+h^{'}e_j)+$$
$$+2u_{x_ix_j}(t,x+h^{'}e_i+h^{'}e_j) - u_{x_ix_i}(t+h^{'}e_i,x) - u_{x_jx_j}(t+h^{'}e_j,x)\Big] =$$
$$=: \sigma^{'}_{h'}u(z). \quad \boxtimes \quad (2.17)$$

В частности, для любого $p(z) \in \mathcal{P}_2$ выражение $\sigma_h p(z)$ — это константа, не зависящая от h и z.

□ Действительно, рассмотрим сначала $D = D_t$. Справедлива цепочка равенств

$$\sigma_h p(z) = \sigma^{'}_{h'}p(z) = \alpha, \quad p(z) := \alpha t + \sum_{i=1}^{N}\alpha^i x_i + \sum_{i,j=1,1}^{N,N}\alpha^{ij}x_ix_j + \beta.$$

Теперь рассмотрим случай оператора $D = D^2_{x_ix_j}$.

$$\sigma_h p(z) = \sigma^{'}_{h'}p(z) = \frac{1}{2}\left[\alpha^{ii} + \alpha^{jj} + 2\alpha^{ij} - \alpha^{ii} - \alpha^{jj}\right] = \alpha^{ij}. \quad \boxtimes$$

Кроме того, если $u(z) \in \mathbb{C}^{1+\delta/2,2+\delta}(\mathbb{R}^{N+1})$, то справедлива цепочка равенств

$$|\sigma_h u(z) - Du(z)| = \left|\sigma'_{h'} u(z) - Du(z)\right| \leqslant c_2 h^\delta [u]_{1+\delta/2,2+\delta}, \qquad (2.18)$$

где c_2 — это абсолютная постоянная.

□ Действительно, в случае $D = D_t$ имеет место цепочка выражений

$$\left|\sigma'_{h'} u(z) - u_t(z)\right| = |u_t(t - h'^2, x) - u_t(t,x)| \leqslant$$
$$\leqslant h'^\delta [u_t]_{\delta/2,\delta} \leqslant h^\delta [u]_{1+\delta/2,2+\delta}.$$

В случае $D = D^2_{x_i x_j}$ имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\left|\sigma'_{h'} u(z) - u_{x_i x_j}(z)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_{x_i x_i}(t, x + h' e_i + h' e_j) - u_{x_i x_i}(t, x + h' e_i)\right| +$$
$$+ \frac{1}{2}\left|u_{x_j x_j}(t, x + h' e_i + h' e_j) - u_{x_j x_j}(t, x + h' e_j)\right| +$$
$$+ \left|u_{x_i x_j}(t, x + h' e_i + h' e_j) - u_{x_i x_j}(t, x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant [D^2_{x_i x_i} u]_{\delta/2,\delta} \frac{1}{2} h'^\delta + [D^2_{x_j x_j} u]_{\delta/2,\delta} \frac{1}{2} h'^\delta + [D^2_{x_i x_j} u]_{\delta/2,\delta} \sqrt{2}\, h'^\delta \leqslant$$
$$\leqslant c_2 h^\delta [u]_{1+\delta/2,2+\delta}. \quad \boxtimes$$

Шаг 3. Теперь возьмем z_1, z_2 и обозначим $\rho = \rho(z_1, z_2)$ и выберем $h = \varepsilon\rho$, где константу $\varepsilon \in (0,1)$ мы выберем позже. Без ограничения общности будем считать, что $t_1 \leqslant t_2$. Тогда все точки

$$(t_n - h^2, t_n), \quad (t_n, x_n + h e_i + h e_j) \in Q_{3\rho}(z_2), \quad n = 1, 2.$$

Следовательно, для любого $p(z) \in \mathcal{P}_2$ имеем

$$|Du(z_1) - Du(z_2)| \leqslant |Du(z_1) - \sigma_h u(z_1)| + |Du(z_2) - \sigma_h u(z_2)| +$$
$$+ |\sigma_h (u-p)(z_1) - \sigma_h (u-p)(z_2)| \leqslant 2c_2 h^\delta [u]_{1+\delta/2,2+\delta} +$$
$$+ |\sigma_h (u-p)(z_1)| + |\sigma_h (u-p)(z_2)|,$$

причем

$$|\sigma_h (u-p)(z_i)| \leqslant \frac{4}{h^2} |u-p|_{0;Q_{3\rho}(z_2)}.$$

□ Действительно, имеем в случае $D = D_t$ цепочку неравенств

$$|\sigma_h u(z_i) - \sigma_h p(z_i)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{h^2}|u(z_i) - p(z_i)| + \frac{1}{h^2}\left|u(t_i - h^2, x_i) - p(t_i - h^2, x_i)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{h^2}\,|u-p|_{0;Q_{3\rho}(z_2)}\,.$$

Совершенно аналогичным образом получаем в случае $D = D^2_{x_i x_j}$ неравенство

$$|\sigma_h u(z_i) - \sigma_h p(z_i)| \leqslant \frac{4}{h^2}\,|u-p|_{0;Q_{3\rho}(z_2)}\,. \quad \boxtimes$$

Заметим, что согласно определению полунормы $[\cdot]'_{1+\delta/2,2+\delta}$ получим неравенство

$$\frac{4}{h^2}|u-p|_{0;Q_{3\rho}(z_2)} \leqslant c_3\varepsilon^{-2}\rho^{\delta}[u]'_{1+\delta/2,2+\delta},$$

поскольку $h = \varepsilon\rho$.

Шаг 4. Итак, получаем

$$|Du(z_1) - Du(z_2)| \leqslant 2c_2\varepsilon^{\delta}\rho^{\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta} + c_3\varepsilon^{-2}\rho^{\delta}[u]'_{1+\delta/2,2+\delta}.$$

Отсюда разделив обе части на ρ^{δ} и взяв supremum от обеих частей неравенства, приходим к следующему неравенству:

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant 2c_2\varepsilon^{\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta} + c_3\varepsilon^{-2}[u]'_{1+\delta/2,2+\delta}.$$

Осталось выбрать величину $\varepsilon \in (0,1)$ настолько малым, чтобы

$$2c_2\varepsilon^{\delta} \leqslant \frac{1}{2}$$

и получим требуемое неравенство.

Теорема доказана.

§ 3. Оценки Бернштейна

В этом параграфе мы рассмотрим очень важные для дальнейших рассмотрений так называемые оценки, полученные методом Бернштейна. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть* $R > 0$ *и* $Q_R = B_R \otimes (-R^2, 0)$, $B_R = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < R\}$. *Предположим, что функция* $u(x,t) \in \mathbb{C}(\overline{Q}_R)$ *и бесконечное число раз дифференцируема в* Q_R *и удовлетворяет уравнению*

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \textit{в} \quad Q_R.$$

Тогда при любом мультииндексе $\alpha \in \mathbb{N}$ *и целом* $n \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$|D^n_t D^{\alpha}_x u(0)| \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n}(|\alpha|+2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}}|u|_{0;Q_R}. \tag{3.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что уравнение $\Delta u - u_t = 0$ инвариантно при замене $u(x,t)$ на $u(Rx, R^2 t.)$ Следовательно, достаточно доказать (3.1) только для $R = 1$, а затем сделать параболическое растяжение, т. е. замену переменных

$$(x,t) \to (Rx, R^2 t).$$

Шаг 2. Теперь мы применим метод Бернштейна. Возьмем функцию $\varphi(x,t) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ с носителем в $B_R \otimes (-R^2, R^2)$, предположим, что $\varphi(0,0) = 1$ и рассмотрим функцию

$$w(x,t) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi^2(x,t)|D_x u|^2 + \mu^2 |u|^2, \quad \mu > 0, \tag{3.2}$$

причем выбор постоянной μ будет сделан ниже. Тогда, поскольку

$$\Delta u - u_t = 0, \quad \Delta u_{x_i} - u_{x_i t} = 0,$$

то имеет место следующая цепочка выражений:

$$\begin{aligned}
\Delta w - w_t = |D_x u|^2 \Delta(\varphi^2) + \varphi^2 \left[2u_{x_i} \Delta u_{x_i} + 2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} u^2_{x_i x_j} \right] + \\
+ 8\varphi\varphi_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} + 2\mu |D_x u|^2 + 2\mu u \Delta u - 2\varphi\varphi_t |D_x u|^2 - 2\varphi^2 u_{x_i} u_{x_i t} - \\
- 2\mu u u_t = |D_x u|^2 [2\mu + \Delta(\varphi^2) - 2\varphi\varphi_t] + \\
+ 2\varphi^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} u^2_{x_i x_j} + 8[\varphi_{x_i} u_{x_j}][\varphi u_{x_i x_j}] \geqslant \\
\geqslant |D_x u|^2 \left[2\mu + \Delta(\varphi^2) - 8|D_x \varphi|^2 - 2\varphi\varphi_t \right],
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где мы воспользовались следующими неравенствами:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij} b_{ij} \leqslant \left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^2_{ij} \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} b^2_{ij} \right)^{1/2}, \quad a_{ij}, b_{ij} \geqslant 0,$$

$$\left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^2_{ij} \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1,1}^{N,N} b^2_{ij} \right)^{1/2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a^2_{ij} + \frac{1}{2\varepsilon} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} b^2_{ij}, \quad \varepsilon > 0.$$

Взяв

$$a_{ij} = \varphi_{x_i} u_{x_j}, \quad b_{ij} = -\varphi u_{x_i x_j}, \quad \varepsilon = 2,$$

мы получим следующую оценку:

$$2\varphi^2 \sum_{i,j=1,1}^{N,N} u^2_{x_i x_j} + 8\varphi_{x_i} u_{x_j} \varphi u_{x_i x_j} \geqslant -8|D_x u|^2 |D_x \varphi|^2.$$

Шаг 3. Выбирая $\mu > 0$ достаточно большим, из цепочки выражений (3.3) получим неравенство

$$\Delta w - w_t \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Согласно принципу максимума имеем следующую цепочку выражений:

$$|D_x u|^2(0) \leqslant \sup_{(x,t)\in Q_1} w(x,t) \leqslant \sup_{(x,t)\in\partial' Q_1} w(x,t) = \mu \sup_{(x,t)\in\partial' Q_1} |u|^2. \tag{3.5}$$

Отсюда получаем (3.1) для $|\alpha| = 1$, $n = 0$ и $R = 1$ и, следовательно, для всех $R > 0$.

Отметим, что выбор начала координат в оценке Бернштейна несущественен [1)] . Поэтому справедлива следующая оценка:

$$|D_x u(z_0)| \leqslant \frac{M(N)}{R} |u|_{0;z_0+Q_R}. \tag{3.6}$$

Шаг 4. Для доказательства утверждения теоремы при $|\alpha| = 2$ и $n = 0$ заметим, что

$$\Delta D_j u - (D_j u)_t = 0,$$

поэтому заменой R на $R/2$ в силу неравенства (3.6) имеем

$$|D_i D_j u(0)| \leqslant \frac{M(N)}{R/2} |D_i u|_{0;Q_{R/2}} \leqslant \frac{M(N)}{R/2}\frac{M(N)}{R/2} |u|_{0;Q_R}.$$

Те же рассуждения справедливы при любом $|\alpha|$. Так что неравенство (3.1) доказано при $n = 0$. При $n \geqslant 1$ достаточно заметить, что

$$\Delta(D_t u) - (D_t u)_t = 0,$$

откуда получаем (3.1) для $n = 1$ и $|\alpha| = 1$. В общем случае $n \geqslant 1$ и $|\alpha| \geqslant 1$ заметим, что

$$\Delta(D_x^\alpha D_t u) - (D_x^\alpha D_t u)_t = 0.$$

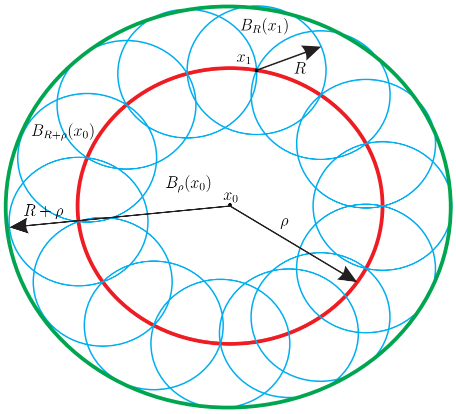
Теорема доказана.

Замечание 3. Отметим, что выбор начала координат является несущественным. Тогда при любом мультииндексе $\alpha \in \mathbb{N}$ и целом $n \geqslant 0$ справедлива оценка

$$|D_t^n D_x^\alpha u(z)| \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n}(|\alpha| + 2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}} |u|_{0;Q_R(z)}, \tag{3.7}$$

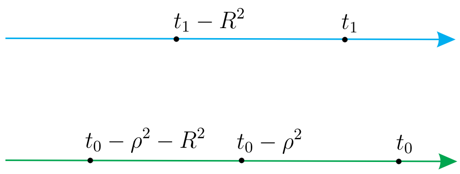
где $Q_R(z) = z + Q_R$. Более того, из оценки (3.7) вытекает следующая оценка:

$$|D_t^n D_x^\alpha u(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant \frac{M^{|\alpha|+2n}(|\alpha| + 2n)^{|\alpha|+2n}}{R^{|\alpha|+2n}} |u|_{0;Q_{R+\rho}(z_0)}, \tag{3.8}$$



$$\sup_{x_1 \in B_\rho(x_0)} |u|_{0;B_R(x_1)} = |u|_{0;B_{\rho+R}(x_0)}$$

Рис. 42. К формуле (3.8) «x переменная».



$$\sup_{t_1 \in (t_0-\rho^2, t_0)} |u|_{0;(t_1-R^2,t_1)} = |u|_{0;(t_0-\rho^2-R^2,t_0)}$$

Рис. 43. К формуле (3.8) «t переменная».

Теорема типа Лиувилля. *Решение* $u = u(x,t) \in \mathbb{C}^{2,1}_{x,t}(\mathbb{R}^{N+1})$ *уравнения*

$$\Delta u - u_t = 0 \quad \textit{в} \quad \mathbb{R}^{N+1},$$

удовлетворяющая условию $|u(x,t)| \leqslant M_1$ $(M_1 > 0)$, *является постоянной*

$$u(x,t) = const.$$

Доказательство.

В силу неравенства (3.7) и условия $|u(x,t)| \leqslant M$ мы получим два неравенства

$$|D_t u(z)| \leqslant \frac{M_2}{R^2}, \quad |D^\alpha_x u(z)| \leqslant \frac{M_3}{R}, \quad |\alpha| = 1, \tag{3.9}$$

[1]) Смотри замечание 3.

где постоянные $M_2 > 0$ и $M_3 > 0$ не зависят от $R > 0$. Устремим теперь $R \to +\infty$ в неравенствах (3.9) и получим следующие равенства:

$$|D_t u(z)| = 0, \quad |D_x^\alpha u(z)| = 0, \quad |\alpha| = 1 \Rightarrow u(z) = const$$

для всех $z = (x, t) \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Теорема доказана.

§ 4. Априорная оценка Шаудера

Прежде чем формулировать теорему об априорных оценках Шаудера нам нужно напомнить некоторые обозначения. Предположим, что $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ — ограниченная область. Область D ограничивается областью $B \in \mathbb{R}^N \otimes \{t = 0\}$, областью $B_T \subset \mathbb{R}^N \otimes \{t = T\}$ и многообразием $S = \partial D \setminus (B \cup B_T)$ (не обязательно связным). Положим

$$B_\tau = D \cap \{t = \tau\}, \quad S_\tau = S \cap \{t \leqslant \tau\}, \quad D_\tau = D \cap \{t < \tau\}.$$

Предположим, что B_τ является областью в $\mathbb{R}^N$ для любого $\tau \in (0, T)$. Кроме того, предположим, что существуют некоторая точка Q_1 на нижней крышке B и некоторая точка Q_2 на верхней крышке B_T, которые можно соединить простой непрерывной кривой γ, вдоль которой от Q_1 к Q_2 координата t не убывает.

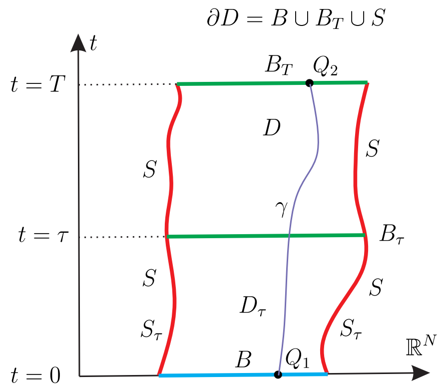


Рис. 44. Область D и некоторые множества.

Определение 1. *Мы скажем, что область D обладает свойством* (E), *если для каждой точки $Q \in S$ существует $(N+1)$–мерная окрестность V, такая, что $V \cap S$ может быть представлено в виде*

$$x_i = h(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N, t), \tag{4.1}$$

где h, $D_{x_k} h$, $D^2_{x_k x_l} h$, $D_t h$ — непрерывны по Гельдеру с показателем $\alpha \in (0, 1]$ относительно параболического расстояния (1.2).

Замечание 4. Отметим, что из этого определения вытекает, что касательные гиперплоскости к S ни в одной из точек S не могут иметь вида $t = const$. Смотри рисунок 43.

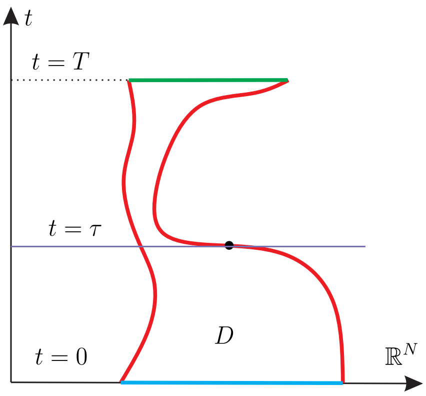


Рис. 45. Область D с точкой касания гиперплоскостью $t = const$.

Теперь нам следует изучить вопрос о возможности существования функции $\Psi(x,t)$, определенной на замыкании $\overline{D}$ всей области D, являющейся продолжением функции $\psi(x,t)$, определенной на параболической границе $\partial' D = B \cup S$ области D. Эта функция напомним возникает при рассмотрении первой краевой задачи при задании граничного условия

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на} \quad \partial' D.$$

Дадим следующее определение:

Определение 2. *Говорят, что функция $\psi(x,t)$, определенная на параболической границе $\partial' D = B \cup S$ принадлежит классу $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, если в $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ существует хотя бы одна функция $\Psi(x,t)$, такая, что $\Psi = \psi$ на $\partial' D$.*

При этом введем следующую величину:

$$|\psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\Psi} |\Psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}, \quad \Psi(x,t)|_{(x,t)\in\partial' D} = \psi(x,t). \tag{4.2}$$

Наконец, сделаем следующие предположения:

($\overline{\text{A}}$) Коэффициенты $a_{ij}(x,t)$, $b_i(x,t)$ и $c(x,t)$ параболического оператора L принадлежат классу $\mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$, причем

$$|a_{ij}|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1, \quad |b_i|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1, \quad |c|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_1. \tag{4.3}$$

($\overline{\text{B}}$) Для любой точки $(x,t) \in D$ и любого действительного вектора ξ выполняется следующее неравенство:

$$\sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant K_2|\xi|^2, \quad K_2 > 0. \tag{4.4}$$

($\overline{\mathrm{C}}$) Функция $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$.

Теперь мы в состоянии рассмотреть вопрос об априорных оценках вблизи границы для решения $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ первой краевой задачи следующего вида:

$$Lu(x,t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j=1,1}^{N,N} a_{ij}(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i \partial x_j} + c(x,t)u(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = f(x,t), \tag{4.5}$$

при $(x,t) \in D \cup B_T$,

$$u(x,t) = \psi(x,t) \quad \text{на нормальной границе} \quad \partial' D = B \cup S. \tag{4.6}$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема 4. *Если выполняются условия* ($\overline{\mathrm{A}}$), ($\overline{\mathrm{B}}$) *и* ($\overline{\mathrm{C}}$), *область* D *удовлетворяет свойству* (E) *и* $\psi \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, *то существует постоянная* $K_3 = K_3(K_1, K_2, \alpha, D)$, *такая, что для решения* $u(x,t)$ *класса* $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ *первой краевой задачи* (4.5), (4.6) *имеет место следующая априорная оценка Шаудера*:

$$|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K_3 \left(|\psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + |f|_{\alpha/2,\alpha;D}\right). \tag{4.7}$$

Доказательство.

Доказательство этой сложной теоремы будет частично доказано в следующем параграфе.

Теорема доказана.

§ 5. Априорная оценка Шаудера в $\mathbb{R}^{N+1}$

В этом разделе мы приведем доказательство основной априорной оценки в параболических пространствах Гельдера, доказанная оригинальным методом Сафоновым примерно в 1984 г. Пусть $\delta \in (0,1)$.

Теорема 5. *Пусть* $u(x,t) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$. *Положим* $f = \Delta u - u_t$. *Тогда существует константа* $M = M(N,\delta)$ *такая, что*

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta} \leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}. \tag{5.1}$$

Доказательство.

Шаг 1. Возьмем $z_0 = (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\rho > 0$ и константу $K \geqslant 1$, которую уточним ниже. Выберем также функцию $\varphi(z) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$ такую, что

$$\varphi(z) = 1 \quad \text{при} \quad z = (x,t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0) := B_R(x_0) \otimes (t_0 - (K+1)^2\rho^2, t_0).$$

Определим теперь следующую величину:

$$T_{z_0}u(z) \stackrel{\text{def}}{=} u(z_0) + (t-t_0)u_t(z_0) +$$

$$+ u_{x_i}(z_0)(x_i - x_{0i}) + \frac{1}{2} u_{x_i x_j}(z_0)(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}), \quad (5.2)$$

где $\rho(z, z_0) \leqslant \rho$ и поэтому, в частности, $|t - t_0| \leqslant \rho^2$ и $|x - x_0| \leqslant \rho$. Пусть

$$g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta\left(\varphi(z) T_{z_0} u(z)\right) - \left(\varphi(z) T_{z_0} u(z)\right)_t, \quad z = (x, t). \quad (5.3)$$

Справедливо следующее равенство:

$$g(z) = \Delta\left(T_{z_0} u(z)\right) - \left(T_{z_0} u(z)\right)_t = f(z_0) \quad (5.4)$$

при $z = (x, t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$.

□ Действительно, непосредственным вычислением с учетом определения (5.2) величины $T_{z_0} u(z)$ получим равенство

$$\Delta\left(T_{z_0} u(z)\right) = \Delta u(z_0), \quad \left(T_{z_0} u(z)\right)_t = u_t(z_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta\left(T_{z_0} u(z)\right) - \left(T_{z_0} u(z)\right)_t = \Delta u(z_0) - u_t(z_0) = f(z_0). \quad \boxtimes$$

Шаг 2. Прежде всего заметим, что в силу того, что $u(x, t) \in \mathbb{C}_0^\infty(\mathbb{R}^{N+1})$, то имеет место следующее равенство:

$$u(x, t) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t - s, x - y) f(y, s)\, dy\, ds = -G_0 * f, \quad (5.5)$$

$$f = \Delta u - u_t,$$

где

$$G_0(x, t) = \frac{\vartheta(t)}{(4\pi t)^{N/2}} \exp\left[-\frac{|x|^2}{4t}\right].$$

И, аналогично, в силу (5.3) имеем

$$\varphi(z) T_{z_0} u(z) = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t - s, x - y) g(y, s)\, dy\, ds = -G_0 * g. \quad (5.6)$$

Поэтому при $z = (x, t) \in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$ в силу (5.4) имеет место следующая цепочка равенств:

$$u(z) - T_{z_0} u(z) = u(z) - \varphi(z) T_{z_0} u(z) = G_0 * (g - f) =$$
$$= G_0 * \left[(f(z_0) - f(z)) I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}\right] + G_0 * \left[(g - f) I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}\right] =$$
$$=: r(z) + h(z), \quad (5.7)$$

где

$$I_D(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } z \in D; \\ 0, & \text{если } z \notin D, \end{cases} \quad D^c := \mathbb{R}^N \backslash D.$$

Шаг 3. Прежде всего заметим, что

$$h(z) = G_0 * [(g-f)I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}] = \\ = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^N} G_0(t-s, x-y)\left[(g(y,s)-f(y,s))I_{Q^c_{(K+1)\rho}(z_0)}(y,s)\right] dy\, ds, \tag{5.8}$$

то при $z=(x,t)\in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$ особенности у подынтегрального выражения нет — оно просто равно нулю при $(y,s)\in Q_{(K+1)\rho}(z_0)$, а особенность фундаментального решения $G(t-s,x-y)$ имеется как раз при $t=s$ и $x=y$, а при $t>s$ и $x\neq y$ фундаментальное решение бесконечное число раз дифференцируемо по (x,t). Следовательно,

$$h(z)\in\mathbb{C}^\infty(Q_{(K+1)\rho}(z_0)), \tag{5.9}$$

$$\Delta h(z)-(h(z))_t = 0 \quad \text{при} \quad z=(x,t)\in Q_{(K+1)\rho}(z_0), \tag{5.10}$$

потому что

$$\frac{\partial G_0(t-s,x-y)}{\partial t} = \Delta_x G_0(t-s,x-y) \quad \text{при} \quad t\neq s.$$

Шаг 4. Заметим, что для $z=(x,t)\in Q_\rho(z_0)$ в силу формулы Тейлора имеет место следующее неравенство:

$$|h_t(\vartheta,x)-h_t(z_0)| \leqslant \rho^2\left|D_t^2 h\right|_{0;Q_\rho(z_0)} + \rho\,|D_xD_th|_{0;Q_\rho(z_0)}. \tag{5.11}$$

Наконец, в силу (2.6) и оценок Бернштейна (3.8) справедлива цепочка неравенств

$$|h(z)-T_{z_0}h(z)| \leqslant |t-t_0|\,|h_t(\vartheta,x)-h_t(z_0)| + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1,1}^{N,N}\left|h_{x_ix_j}(z_0)-h_{x_ix_j}(t_0,\xi)\right||x_i-x_{0i}||x_j-x_{0j}| \leqslant \\ \leqslant \rho^4\left|D_t^2h\right|_{0;Q_\rho(z_0)} + \rho^3\,|D_xD_th|_{0;Q_\rho(z_0)} + \\ + \rho^3\sum_{i,j,k=1,1,1}^{N,N,N}|D_iD_jD_kh(z)|_{0;Q_\rho(z_0)} \leqslant \\ \leqslant M\left(K^{-4}+K^{-3}\right)|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant MK^{-3}|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)}. \tag{5.12}$$

Шаг 5. Теперь оценим функцию $r(z)$ из (5.7). Действительно,

$$
\begin{aligned}
|r(z)| &= \left|G_0 * \left[(f(z_0) - f(z)) I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z)\right]\right| = \\
&= \left|G_0 * \left[\left(\frac{f(z_0) - f(z)}{\rho^\delta(z, z_0)}\right) I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z) \rho^\delta(z, z_0)\right]\right| \leqslant \\
&\leqslant [f]_{\delta/2,\delta} \left[(K+1)\rho\right]^\delta \left|G_0 * I_{Q_{(K+1)\rho}(z_0)}(z)\right| \leqslant \\
&\leqslant [f]_{\delta/2,\delta} \left[(K+1)\rho\right]^{2+\delta}, \quad (5.13)
\end{aligned}
$$

где мы воспользовались неравенством

$$|G_0 * I_{Q_R}| \leqslant R^2,$$

которое мы докажем.

□ Действительно,

$$
\begin{aligned}
G_0 * I_{Q_R(z_0)} &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ds \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, G_0(x - y, t - s) I_{Q_R(z_0)}(y, s) = \\
&= \int\limits_{t_0 - R^2}^{t_0} ds \int\limits_{B_R(x_0)} dy\, \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right] \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{t_0 - R^2}^{t_0} ds \int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right] = R^2, \quad (5.14)
\end{aligned}
$$

где мы воспользовались легко проверяемым равенством

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} dy\, \frac{1}{(4\pi(t-s))^{N/2}} \exp\left[-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}\right] = 1 \quad \text{при} \quad t > s. \quad \boxtimes$$

Теперь мы можем воспользоваться неравенством (2.6), которое имеет следующий вид:

$$|u(z) - T_{z_0} u(z)|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant M[(K+1)\rho]^{2+\delta} [u]_{1+\delta/2, 2+\delta}. \quad (5.15)$$

Наконец, в силу (5.13) и (5.15) справедлива следующая цепочка неравенств:

$$
\begin{aligned}
|h|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} &= |u - T_{z_0} u - r|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant \\
&\leqslant |u - T_{z_0} u|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} + |r|_{0;Q_{(K+1)\rho}(z_0)} \leqslant \\
&\leqslant M(K+1)^{2+\delta} \rho^{2+\delta} \left([u]_{1+\delta/2, 2+\delta} + [f]_{\delta/2,\delta}\right) \quad (5.16)
\end{aligned}
$$

Шаг 6. В силу неравенств (5.12), (5.13) и (5.16) имеем

$$\inf_{p(z)\in\mathcal{P}_2}|u(z)-p(z)|_{0;Q_\rho(z_0)}\leqslant|u(z)-T_{z_0}u(z)-T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)}\leqslant$$
$$\leqslant|u(z)-T_{z_0}u(z)-h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)}+|h(z)-T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)}=$$
$$=|r|_{0;Q_\rho(z_0)}+|h(z)-T_{z_0}h(z)|_{0;Q_\rho(z_0)}\leqslant$$
$$\leqslant M[f]_{\delta/2,\delta}\left[(K+1)\rho\right]^{2+\delta}+$$
$$+K^{-3}M(K+1)^{2+\delta}\rho^{2+\delta}\left([u]_{1+\delta/2,2+\delta}+[f]_{\delta/2,\delta}\right). \quad (5.17)$$

Разделим обе части последнего неравенства на $\rho^{2+\delta}$ и взяв supremum от обеих частей по всем $z_0\in\mathbb{R}^{N+1}$ и $\rho>0$ в силу эквивалентности полунорм $[u]'_{1+\delta/2,2+\delta}$ и $[u]_{1+\delta/2,2+\delta}$ получим следующее неравенство:

$$[u]_{1+\delta/2,2+\delta}\leqslant MK^{-3}(K+1)^{2+\delta}[u]_{1+\delta/2,2+\delta}+$$
$$+M(K+1)^{2+\delta}\left(1+K^{-3}\right)[f]_{\delta/2,\delta}. \quad (5.18)$$

Осталось выбрать $K>0$ настолько большим, чтобы величина

$$MK^{-3}(K+1)^{2+\delta}\leqslant\frac{1}{2},$$

поскольку по условию $\delta\in(0,1)$.

Теорема доказана.

§ 6. Решение первой краевой задачи

Для того чтобы провести редукцию первой краевой задачи (4.5), (4.6) к случаю $\psi(x,t)\equiv 0$ нужно в дополнение привести следующее определение:

Определение 3. *Если область D обладает свойством* (E) *и, кроме того, производные $\partial_x\partial_t h$ и $\partial_t^2 h$ от функций h, локально представляющих S, являются непрерывными, то мы скажем, что D обладает свойством* ($\overline{\text{E}}$).

Теорема 6. *Если выполняются условия* ($\overline{\text{A}}$), ($\overline{\text{B}}$), ($\overline{\text{C}}$), *область D обладает свойством* ($\overline{\text{E}}$), $\psi(x,t)\in\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, $L\psi=f$ *на* ∂B, [1]) *то существует единственное решение $u(x,t)$ первой краевой задачи* (4.5), (4.6) *класса* $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$.

Доказательство.

Шаг 1. Единственность была ранее доказана с помощью принципа максимума.

Шаг 2. Проведем редукцию исходной задачи (4.5), (4.6) к случаю $\psi(x,t)\equiv 0$. Если $\Psi\in\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, то в силу свойства ($\overline{\text{A}}$) получим, что

$$|L\Psi|_{\alpha/2,\alpha;D}\leqslant c_1|\Psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}.$$

---

[1]) Это естественное условие согласования.

Таким образом, мы можем ввести новую функцию

$$v(x,t) = u(x,t) - \Psi(x,t)$$

с какой–нибудь функцией $\Psi(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, совпадающей с ψ на нормальной границе $\partial' D = B \cup S$ и учесть, что

$$|Lv|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant |f|_{\alpha/2,\alpha;D} + |L\Psi|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant \\ \leqslant |f|_{\alpha/2,\alpha;D} + c_1|\Psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant |f|_{\alpha/2,\alpha;D} + 2c_1|\psi|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}$$

А далее нужно использовать эту априорную оценку вместо (4.7).

Шаг 3. Изложим схему доказательства *метода продолжения по параметру*. Рассмотрим однопараметрическое семейство параболических операторов

$$L_\lambda = \lambda L + (1-\lambda)L_0, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1, \tag{6.1}$$

где

$$L_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Обозначим через Σ множество всех значений λ, для которых задача

$$L_\lambda u_\lambda(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.2}$$

$$u_\lambda(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S \tag{6.3}$$

имеет единственное решение $u_\lambda(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ для любой $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$ такой, что $f(x,t) = 0$ на ∂B. Последнее равенство следствие того, что $\psi(x,t) = 0$ на ∂B. Стало быть, условие согласования

$$0 = L\psi(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in \partial B.$$

Нам нужно доказать следующие свойства:

(i) Σ содержит $\lambda = 0$, т. е. множество Σ не пусто;

(ii) Σ — открытое множество в сегменте $[0,1]$, т. е. если $\lambda_0 \in \Sigma$, то существует такое $\varepsilon > 0$, что все λ такие, что $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ содержатся в Σ;

(iii) Σ — замкнутое множество, т. е. для любой последовательности $\{\lambda_n\} \subset \Sigma$ таких, что $\lambda_n \to \overline{\lambda}$ следует, что $\overline{\lambda} \in \Sigma$.

Если $\Sigma \subset [0,1]$ удовлетворяет свойствам (i)–(iii), то это множество является непустым открыто–замкнутым множеством в метрическом пространстве $([0,1], d(a,b) = |a-b|)$. Но известно, что в этом метрическом пространстве имеется только два открыто–замкнутых множества — это пустое множество $\varnothing$ и сам отрезок $[0,1]$. Поскольку в силу (i) множество $\Sigma \neq \varnothing$, то следовательно $\Sigma = [0,1]$, а, значит, краевая задача

$$L_1 u_1(x,t) = f(x,t) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.4}$$

$$u_1(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S \tag{6.5}$$

имеет единственное решение $u_1(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ для любой $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$ такой, что $f(x,t) = 0$ на ∂B. Это и есть решение первой краевой задачи для параболического оператора L.

Теперь приступим к реализации этой схемы.

Шаг 4. Прежде всего заметим, что доказательство свойства (i) довольно сложное, однако гораздо проще, чем непосредственное доказательство однозначной разрешимости первой краевой задачи для общего параболического уравнения. Тем самым, считаем результат (i) известным.

Шаг 5. Запишем $L_\lambda u_\lambda = f$ в следующем эквивалентном виде:

$$L_{\lambda_0} u_\lambda = (L_{\lambda_0} u_\lambda - L_\lambda u_\lambda) + f = F(u_\lambda). \tag{6.6}$$

Рассмотрим линейное преобразование

$$v = A(u),$$

определенное следующим образом: для функции $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, равной нулю на $B \cup S$, возьмем в качестве $A(u)$ (единственное) решение задачи

$$L_{\lambda_0} v = F(u) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \quad v = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S. \tag{6.7}$$

Так как $\lambda_0 \in \Sigma$ и $F(u) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, $F = 0$ на ∂B, то преобразование $v = Au$ определено для всех $u \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, равных нулю на $B \cup S$.

Если мы докажем, что для некоторой функции $u(x,t)$ выполняется равенство $Au = u$, то u будет единственным решением задачи (6.2), (6.3) и, следовательно, $\lambda \in \Sigma$.

Заметим, что имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} F(u) = f + [\lambda_0 L + (1-\lambda_0)L_0]\, u - [\lambda L + (1-\lambda)L_0]\, u = \\ = f + (\lambda_0 - \lambda)Lu + (\lambda - \lambda_0)L_0 u, \end{aligned} \tag{6.8}$$

из которой вытекает следующая оценка:

$$|F(u)|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant K_4|\lambda - \lambda_0||u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + |f|_{\alpha/2,\alpha;D}, \tag{6.9}$$

где K_4 — это постоянная, не зависящая от λ, u и f. Здесь мы воспользовались следующими неравенствами:

$$|Lu|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant M|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}, \quad |L_0 u|_{\alpha/2,\alpha;D} \leqslant M_0|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D},$$

справедливость которых вытекает из оценки (1.26).

Применяя априорную оценку Шаудера (4.7), получим из (6.7 и (6.9) следующее неравенство:

$$|v|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K_3K_4|\lambda-\lambda_0||u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} + K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}, \qquad (6.10)$$

где K_3 не зависит от λ, u и f. Теперь воспользуемся снова априорной оценкой Шаудера (4.7) и получим, что, в частности,

$$|u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}. \qquad (6.11)$$

С другой стороны, если потребовать, чтобы

$$K_3K_4|\lambda-\lambda_0| \leqslant \frac{1}{2} \Rightarrow |v|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}. \qquad (6.12)$$

Обозначая теперь через X_0 замкнутое в $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$ множество, определенное следующим образом:

$$X_0 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D): \ |u|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant 2K_3|f|_{\alpha/2,\alpha;D}\right\} \cap \\ \cap \{u(x,t) = 0 \quad \text{на} \quad (x,t) \in B \cup S\}. \qquad (6.13)$$

Из (6.11) и (6.12) приходим к выводу о том, что линейный оператор A отображает X_0 в X_0.

Докажем, что оператор A сжимающий на X_0. Действительно, пусть

$$v_1 = Au_1, \quad v_2 = Au_2, \quad u_1, u_2 \in X_0.$$

Тогда

$$L_{\lambda_0}(v_1 - v_2) = L_{\lambda_0}(u_1 - u_2) - L_\lambda(u_1 - u_2) \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T,$$

$$v_1 - v_2 = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S.$$

Аналогичными рассуждениями при помощи априорной оценки Шаудера (4.7) получим неравенство

$$|v_1 - v_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant \\ \leqslant K_3K_4|\lambda-\lambda_0||u_1-u_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant \frac{1}{2}|u_1-u_2|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D}$$

при условии

$$K_3K_4|\lambda-\lambda_0| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Таким образом, оператор при таких λ является сжимающим на X_0 —замкнутом, выпуклом и ограниченном множестве из $\mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$. Следовательно, в силу теоремы о сжимающем отображении мы приходим к выводу о существовании единственной неподвижной точки $u(x,t) \in X_0$.

Шаг 6. Пусть $\lambda_m \in \Sigma$ и

$$\lambda_m \to \sigma \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Нам нужно доказать, что $\sigma \in \Sigma$, т. е. для любой $f(x,t) \in \mathbb{C}^{\alpha/2,\alpha}(D)$, равной нулю на ∂B, существует функция $u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, такая, что

$$L_\sigma u = f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.14}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S. \tag{6.15}$$

По предположению для каждого m существует функция $u_m(x,t) \in \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D)$, такая, что

$$L_{\lambda_m} u_m = f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.16}$$

$$u_m = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S. \tag{6.17}$$

Заметим, что коэффициенты семейства операторов L_λ удовлетворяют условиям $\boxed{\text{A}}$ и $\boxed{\text{B}}$ с константами K_1 и K_2, не зависящими от λ. Поэтому применяя априорную оценку Шаудера (4.7), мы получим следующее неравенство

$$|u_m|_{1+\alpha/2,2+\alpha;D} \leqslant K_3 |f|_{\alpha/2,\alpha;D}, \tag{6.18}$$

где K_3 не зависит от $m \in \mathbb{N}$. Далее используя теорему Асколи–Арцела, как при доказательстве теоремы 1, докажем, что существует подпоследовательность последовательности $\{u_m\}$, которую мы снова обозначим через $\{u_m\}$, такая, что

$$\{u_m\}, \quad \{D_{x_i} u_m\}, \quad \{D^2_{x_i x_j} u_m\}, \quad \{D_t u_m\} \tag{6.19}$$

равномерно сходятся в D. Кроме того, если $u_m \to u$ равномерно в D, то соответствующие последовательности производных сходится равномерно к соответствующим производным u, причем

$$u(x,t) \in \mathbb{C}^{1+\alpha/2,2+\alpha}(D).$$

Переходя к пределу при $m \to +\infty$ в равенствах (6.16) и (6.17), записанных для соответствующей подпоследовательности $\{u_m\}$, получим равенства

$$L_\sigma u = f \quad \text{при} \quad (x,t) \in D \cup B_T, \tag{6.20}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad B \cup S. \tag{6.21}$$

Следовательно, $\sigma \in \Sigma$ — множество Σ замкнуто.

Теорема доказана.

Предметный указатель

Список литературы

1. *Боголюбов А. Н., Кравцов В. В., Свешников А. Г.* Лекции по математической физике. М.: Издательство МГУ; Наука, 2004.— 416 с.
2. *Вентцель Т. Д., Горицкий А. Ю., Капустина Т. О. и др.* Сборник задач по уравнениям с частными производными. Под редакцией А. С. Шамаева. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005, 158 с.
3. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа// УМН, 17:3(105), 1962, 3–146 с.
4. *Крылов Н. В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гельдера. Новосибирск: Научная книга, 1998, 178 с.
5. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. Москва: Наука, 1985, 376 с.
6. *Кудряшов Н. А.* Методы нелинейной математической физики. Издательский дом «Интеллект», 2010.– 368 с.
7. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. Москва: Наука, 1971, 288 с.
8. *Нефедов Н. Н.* Дополнительные главы к курсу Методы математической физики. "Нелинейные эллиптические уравнения. Метод дифференциальных неравенств.". Москва: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
9. *Олейник О. А.* Лекции об уравнениях с частными производными. I часть. Москва: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2005. – 252 с.
10. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Москва: Наука, 1987, 480 с.
11. *Тихонов А. Н.* Теорема единственности для уравнения теплопроводности// Мат. сборник.— 1935.– т. 42, N 2, – с. 189–216.
12. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. Москва: Мир, 1968, 428 с.
13. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2003, 562 с. — (Университетская серия; Т. 7).
14. *Hu Bei* Blow-up theories for semilinear parabolic equations. Lecture Notes in Mathematics, 2018. Springer, Heidelberg, 2011. 125 pp.
15. *Krylov N. V.* Lectures on Elliptic and Parabolic Equations in Sobolev Spaces. Graduate Studies in Mathematics Volume 96 American Mathematical Society. 2000, 374 pp.
16. *Patrizia Pucci, James Serrin* The Maximum Principle. Birkhauser, Basel–Boston–Berlin. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Volume 73. 2007, 240 pp.
17. *Protter M. H., Weinberger H. F.* Maximum principles in differential equations. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1967, 261 pp.

18. *Vicentiu D. Radulescu* Qualitative Analysis of Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations: Monotonicity, Analytic, and Variational Methods. Hindawi Publishing Corporation. 2008, 205 pp.
19. *Vazquez J. L.* The porous medium equation. Mathematical theory. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, Oxford, 2007, 624 pp.
20. *Zhuoqun Wu, Jingxue Yin, Chunpeng Wang* Elliptic and Parabolic Equations. World Scientific. 2006, 425 pp.