

Секция «Асимптотические методы»

О развитии теории сингулярных возмущений

Н.Н. Нефедов

(МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики)
nefedov@phys.msu.ru

Интенсивное развитие теории сингулярных возмущений началось после появления в середине прошлого века основополагающих работ академика А.Н. Тихонова]. Им была доказана теорема о предельном переходе в задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой часть уравнений содержит малый параметр (малый числовой множитель) при производной. Такие уравнения стали называть *сингулярно возмущёнными*. Эти исследования были продолжены и развиты в работах его ученицы А.Б.Васильевой, предложившей метод построения асимптотических приближений решений таких решений – метод пограничных функций. Этот метод получил существенное развитие в совместных работах А.Б. Васильевой и В.Ф. Бутузова. Валентин Федорович внес существенный вклад в исследование ряда новых классов задач, среди которых в докладе выделяются результаты, к которым автор доклада имеет определенное отношение, являясь учеником Валентина Федоровича.

1. Интегро – дифференциальные уравнения.
2. Сингулярно возмущенные задачи в случае, когда вырожденное уравнение имеет семейство решений – так называемый критический случай.
3. Угловой погранслои в сингулярно возмущенные задачах с частными производными.
4. Асимптотическая теория контрастных структур.
5. Сингулярно возмущенные задачи в случае смены устойчивости.
6. Сингулярно возмущенные задачи с кратными корнями вырожденного уравнения.

Эти исследования продолжаются в различных классах сингулярно возмущенных задач в нашей научной группе. О результатах новых исследований в одной из этих задач - задаче об асимптотическом описании движения фронта в сингулярно возмущенной задаче реакция-диффузия планируется рассказать в заключительной части доклада.

Работа выполнена при поддержке РФФИ –пр.№13-0100200.

Сингулярно возмущённые задачи с кратными корнями вырожденного уравнения

В.Ф. Бутузов

(МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики)
butuzov@phys.msu.ru

Асимптотические методы решения сингулярно возмущенных (с.в.) задач активно развиваются начиная с основополагающих работ А.Н. Тихонова . А.Б. Васильевой был разработан эффективный метод построения асимптотических приближений решений с пограничными и внутренними слоями. В ее работах и также в работах других авторов изучались в основном такие с.в. задачи, в которых соответствующее вырожденное уравнение имеет простой (однократный) корень. Характерной особенностью решений многих таких задач является разложение по целым степеням малого параметра и экспоненциальный характер убывания пограничных функций.

В последние годы в работах автора и его учеников исследуются с.в. задачи, в которых вырожденное уравнение имеет кратный корень. Оказалось, что асимптотики погранслойных решений с.в. задач с кратным корнем вырожденного уравнения во многом отличаются от асимптотик в случае простого корня. К числу наиболее существенных отличий относятся следующие:

1. Асимптотические разложения по дробным степеням малого параметра.
2. Пограничные слои, состоящие из трех зон с различными масштабами погранслойных переменных в разных зонах.
3. Влияние членов порядка малого параметра, входящих в правые части уравнений, на характер асимптотики.
4. Специфические требования на начальные (краевые) значения решения, обеспечивающие его погранслойный характер.

К настоящему времени случаи кратного корня вырожденного уравнения исследованы для начальных и краевых задач для ОДУ [1], а также для некоторых параболических [2] и эллиптических задач [3].

Список литературы

1. Бутузов В.Ф. Матем. заметки. 2013. Т. 94. Вып. 1. С 68-80.
2. Бутузов В.Ф. ЖВМиМФ. 2011. Т. 51. №1. С 44-55.
3. Белошапко В.А., Бутузов В.Ф. ЖВМиМФ. 2013. Т. 53. №8. С. 65-75.

Численный анализ уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова

С.В. Алешин, С.А. Кашенко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

fktbody@yandex.ru, kasch@uniyar.ac.ru

Уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова[1] (далее КПП) изучают при исследовании такого феномена как незатухающие бегущие волны конечной амплитуды.

Уравнение КПП имеет следующий вид:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + u(t, x) - u^2(t, x), \quad (1)$$

где $u(t, x)$ - достаточно гладкая функция на промежутке $[a, b]$. Будем рассматривать данное уравнение со следующими краевыми условиями $u(t, a) = u(t, b) = 0$, причем будем считать, что промежуток $[a, b]$ является достаточно большим (длина отрезка много больше 1).

Для численных расчетов перейдем к разностной схеме[2]. Заменим вторую производную $\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}$ по пространственной переменной конечно-разностным оператором. Для этого отрезок $[a, b]$ разобьем на N равных частей и построим сетку узлов с шагом $h = \frac{b-a}{N}$: $x_i = a + ih, i = 0, 1, \dots, N-1$. Обозначим через u_i значение функции $u(t, x)$ в соответствующих точках сетки. В итоге получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + u_i - u_i^2, \quad (2)$$

где $i = 0, 1, \dots, N-1$.

В качестве начальных условий в момент времени $t = 0$ выберем прямоугольное окно высотой 0,1 с единичным основанием, расположенное посередине отрезка $[a, b]$:

$$u_i = \begin{cases} 1/10, \text{ при } |(b-a)/2 - x_i| < 0,5 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}, \quad (3)$$

где $i = 0, 1, \dots, N-1$.

Далее решаем систему (2) с начальным условием (3) методом Дормана-Принца [3] с переменным шагом (DOPRI852). Численное моделирование при значениях параметров $a = 0, b = 100, N = 10000$ хорошо согласуется с высказываниями аналитического плана: уравнение (1) имеет два состояния равновесия. Первое это неустойчивый ноль, а второе – устойчивая единица. Первоначальное небольшое возмущение с течением времени доходит до единицы, а затем, возмущение начинает распространение далее по пространству. Это распространяющаяся с постоянной скоростью волна называется стационарным фронтом.

Совсем другую динамику показывает уравнение КПП с запаздыванием по времени и отклонением по пространству:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + (1 - u(t - \tau, x - \sigma))u(t, x), \quad (4)$$

где $\tau > 0, \sigma > 0$ - запаздывание по времени и отклонение по пространству соответственно. Краевые условия аналогичны краевым условиям задачи (1).

Выпишем постановку задачи для проведения численного моделирования задачи (4). Для этого перейдем, как и в случае задачи (1), к разностным операторам. Выберем такое разбиение отрезка $[a, b]$, чтобы отклонение по пространству было пропорционально шагу $h = \delta/k$, где $k \geq 1$ - натуральное число. Это позволит выписать следующую систему дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\frac{\partial u_i(t)}{\partial t} = \frac{u_{i+1}(t) - 2u_i(t) + u_{i-1}(t)}{h^2} + (1 - u_{i-k}(t - \tau))u_i(t), \quad (5)$$

где $i = 0, 1, \dots, N-1$. Если индекс выходит за пределы значений, то согласно краевым условиям полагаем значение функции в этих точках нулевыми. Начальные условия для каждого из N уравнений этой системы задаются на отрезке $t \in [-\tau, 0]$. Задача в представленной формулировке представляет большой интерес.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Колмогоров и др. // Бюлл. МГУ, секция А 1,6., 1937.
2. С.К. Годунов, В.С. Рябенский "Разностные схемы. Введение в теорию." // М.: Наука, 1977.
3. E. Hairer., et al. "Solving Ordinary Differential Equations 1 (Springer Series in Computational Mathematics): Nonstiff Problems" // 2ed., revised, Springer, 2008

Использование амплитудных уравнений типа Гинзбурга-Ландау для описания неустойчивостей в системах с большим запаздыванием

С. В. Янчук

*Берлинский университет им. Гумбольдта,
Факультет математики и естественных наук,
Институт математики, ул. Унтер ден Линден 6, 10099, Берлин, Германия*
yanchuk@math.hu-berlin.de

Дифференциальные уравнения с большим запаздыванием возникают при описании многих прикладных систем. Так, в системах взаимодействующих лазеров или лазеров с оптической обратной связью, запаздывание может достигать времен, превышающих на много порядков характеристические времена взаимодействия фотонов и носителей зарядов внутри самого лазера [1,2,5]. В результате, математическое моделирование таких систем неизбежно включает временное запаздывание и приводит к дифференциальным уравнениям вида

(1)

в котором Система (1) может быть также приведена к эквивалентному виду путем простых преобразований времени и переменной

(2)

где ϵ малый параметр. Из представления (2) хорошо видно, что задача является сингулярно-возмущенной при $\epsilon \rightarrow 0$ и исследование ее свойств сопряжено с дополнительными сложностями, как теоретическими, так и численными.

В работах [6,7,10] были исследованы свойства спектра собственных значений линейных систем с большим запаздыванием. В частности, было показано, что спектр при $\epsilon \rightarrow 0$ асимптотически приближается непрерывным спектром и имеет свойства в некотором смысле схожие со свойствами спектра параболических уравнений в частных производных. Такое свойство уравнений с большим запаздыванием приводит к тому, что возникновение неустойчивостей в таких системах вблизи бифуркаций описываются с помощью нормальных форм аналогичных тем, которые возникают в параболических уравнениях с частными производными, т.е. уравнением типа Гинзбурга-Ландау [3,4,8].

В работе [9] рассмотрено скалярное уравнение с запаздыванием (1) с $\epsilon \rightarrow 0$ и $\tau \rightarrow 0$

В частности, описаны свойства спектра соответствующего линейного уравнения, а также приведен вывод нормальной формы (амплитудного уравнения) типа Гинзбурга-Ландау. Получена оценка близости решений нормальной формы и уравнения с запаздыванием. В [11] рассмотрен случай с двумя запаздываниями, а также применение к системе Ланга-Кобаяши моделирующей динамику полупроводникового лазера с оптической обратной связью.

ЛИТЕРАТУРА

1. T. Dahms, V. Flunkert, F. Henneberger, P. Hövel, S. Schikora, E. Schöll, and H.J. Wünsche // The European Physical Journal - Special Topics 2010, V. 191 No 10. P.71.
2. T. Erneux. Applied Delay Differential Equations, Springer, 2009.

3. G. Giacomelli and A. Politi // *Phys. Rev. Lett.* 1996, V. 76 No 15. P. 2686.
4. S. A. Kashchenko // *Comp. Math. Math. Phys.* 1998, V. 38. P. 443.
5. R. Lang and K. Kobayashi // *IEEE J. Quantum Electron.* 1980, V. 16. P. 347.
6. M. Lichtner, M. Wolfrum, and S. Yanchuk // *SIAM J. Math. Anal.* 2011, V. 43. P. 788.
7. J. Sieber, M. Wolfrum, M. Lichtner, and S. Yanchuk // *Discrete Contin. Dyn. Syst. A* 2013, V. 33. P. 3109.
8. M. Wolfrum and S. Yanchuk // *Phys. Rev. Lett* 2006, V. 96. P. 220201.
9. S. Yanchuk, L. Lücken, M. Wolfrum, and A. Mielke // *Discrete Contin. Dyn. Syst. A* 2015, V. 35. P. 573.
10. S. Yanchuk and M. Wolfrum // Instabilities of equilibria of delay-differential equations with large delay. In D.H. van Campen, M.D. Lazaruko, and W.P.J.M. van der Oever, editors, *Proceedings of ENOC-2005*, P. 1060--1065, Eindhoven, Netherlands, August 2005.
11. S. Yanchuk and G. Giacomelli // *Phys. Rev. Lett.* 2014, V. 112. P. 174103.

Локальная динамика уравнения с линейно распределенным запаздыванием

И.С. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

ikashchenko@yandex.ru

В работе рассматривается уравнение с линейно распределенным на промежутке $[-T, 0]$ запаздыванием:

$$\dot{x} + x = \int_{-T}^0 \left(a + \frac{bs}{T}\right) x(t+s) ds + f(x).$$

Здесь $T > 0$, а $f(x)$ достаточно гладкая функция, имеющая в нуле порядок малости выше первого: $f(x) = f_2 x^2 + f_3 x^3 + \dots$. Исследуется вопрос о локальной — в окрестности нулевого состояния равновесия — динамике уравнений такого вида.

Основным предположением, открывающим путь к применению асимптотических методов заключается в том, что значение запаздывания T является достаточно большим:

$$T \gg 1.$$

После обозначения $\varepsilon = T^{-1}$ и выполнения в исходном уравнении стандартных нормирующих замен приходим к более удобной для исследований задаче

$$\varepsilon^2 \dot{x} + \varepsilon x = \int_{-1}^0 (a + bs) x(t+s) ds + \varepsilon f(x). \quad (1)$$

В качестве основных результатов (см. [1,2]) будут приведены специальные краевые задачи, не содержащие явно малые и большие параметры, которые играют роль нормальных форм. Это означает, что их нелокальная динамика определяет поведение решений исходного уравнения с начальными условиями из достаточно малой окрестности состояния равновесия и при достаточно больших значениях T .

Будут представлены формулы, которые позволяют по решению редуцированного уравнения получить асимптотику решений исходной задачи.

Характеристическое уравнение линеаризованной на нулевом состоянии равновесия задачи принимает вид

$$\varepsilon^2 \lambda + \varepsilon = a\lambda^{-1}[1 - e^{-\lambda}] + b\lambda^{-1}e^{-\lambda} - b\lambda^{-2}[1 - e^{-\lambda}]. \quad (2)$$

Лемма 1. Пусть выполнено одно из условий:

$$1) a > 0; 2) 2a + 1 > 0, |b - a| > |a|; 3) 2a + 1 < 0, |b - a| > \frac{1}{2}\sqrt{-(1 + 4a)}.$$

Тогда при всех достаточно малых ε у уравнения (2) существует корень с положительной вещественной частью. При этом нулевое решение задачи (1) неустойчиво, в его некоторой не зависящей от ε окрестности нет устойчивых режимов.

Лемма 2. Пусть выполнено одно из условий:

$$1) a < 0, 2a + 1 > 0, |b - a| < |a|; 2) a < 0, 2a + 1 < 0, |b - a| < \frac{1}{2}\sqrt{-1(1 + 4a)}.$$

Тогда при достаточно малых ε все корни характеристического квазиполинома (2) имеют отрицательные вещественные части и отделены от мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$. Нулевое решение задачи (1) асимптотически устойчиво.

Если параметры a и b таковы, что условия ни одной из этих лемм не выполняются, то необходимо проводить дополнительные исследования. При этом у характеристического квазиполинома (2) нет корней с положительной вещественной частью, отделенных от мнимой оси при $\varepsilon \rightarrow 0$, и есть бесконечное количество корней $\lambda_k(\varepsilon)$, действительная часть которых стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тем самым реализуется критический случай бесконечной размерности.

В случае $2a + 1 > 0$ и b близкого к нулю ($b = \varepsilon^2 b_1$) получаем, что роль нормальной формы играет краевая задача параболического типа

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{2a + 1}{2a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + b_1 u - f_2 \frac{\partial}{\partial r} u^2, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r + 1), \quad \int_0^1 u(\tau, r) dr = 0. \quad (3)$$

Теорема 1. Пусть задача (3) имеет ограниченное вместе со своими производными решение $u_0(\tau, r)$. Тогда у уравнения (1) существует асимптотическое по невязке с точностью до $o(\varepsilon)$ на луче $t > 0$ решение

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon u_0(\varepsilon^2 t, t(1 + \varepsilon a^{-1} + \varepsilon^2 a^{-2})).$$

В случае $2a + 1 < 0$ и b близкого к b_{\pm} получаем краевую задачу вида

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (d_1 + id_2) \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + (d_3 + id_4) \frac{\partial u}{\partial r} + (d_5 + id_6)u + (d_7 + d_8)u |u|^2, \quad u(\tau, r) = u(\tau, r + 1).$$

Имеет место аналог Теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.С. Кащенко // Дифф. ур. 2014, Т. 50, №1, с. 17-26.
2. И.С. Кащенко // Моделир. и анализ информ. систем 2009. Т.16., №1. С. 54-61.

An implicit function theorem for singularly perturbed problems

Lutz Recke¹, Oleh Omel'chenko²

¹ *Humboldt University of Berlin, Germany*

² *Weierstrass Institute, Germany*

recke@mathematik.hu-berlin.de

We present a rather general method for singularly perturbed problems how to verify if close to an approximate solution there exists an exact solution and how to estimate the corresponding error. The approach is based on Banach's fixed point theorem. It can be applied to stable and to unstable solutions to parabolic problems as well as to problems without the maximum principle property.

Исследование системы импульсных дифференциальных уравнений

Ни Минкан¹, Н.Н. Нефедов²

¹ *Восточно-Китайский педагогический университет, математический ф-т, e-mail: mingkang@mail.ru*

² *МГУ им.М.В.Ломоносова, физический факультет, кафедра математики, e-mail: nefedov@phys.msu.ru*

В данной работе изучаются динамические свойства системы дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями в фиксированные моменты времени, которая описывается системой ОДУ первого порядка. Предлагается рассматривать эту систему как предельную для некоторой сингулярно возмущённой системы ОДУ второго порядка. Это позволяет рассмотреть импульсное воздействие как внутренний переходный слой. Для асимптотического анализа такой задачи применена теория контрастных структур. При этом были выделены те типы сингулярных возмущений, для которых при стремлении малого параметра к нулю в областях с исключёнными точками импульсного воздействия стремится к решению исходной невозмущённой задачи.

Обзор некоторых результатов, полученных методами регуляризации и нормальных форм для сингулярно возмущенных интегродифференциальных уравнений (2001-2013гг)

А.А. Бободжанов, М.А. Бободжанова, В.Ф. Сафонов
(НИУ «МЭИ»)
bobojanova@mpei.ru

В конце пятидесятых – начале шестидесятых годов прошлого столетия С.А. Ломов, изучая модельное уравнение Лайтхилла, приходит к идее регуляризации сингулярных возмущений путем перехода в пространство бóльшей размерности. Эта идея глубоко развивается им в последующих работах и приводит к созданию *метода регуляризации*, наиболее полно изложенному в его монографии “Введение в общую теорию сингулярных возмущений” (М.: Наука, 1980). Метод регуляризации позволяет строить в некоторых случаях асимптотические решения сингулярно возмущенных задач в виде рядов по степеням малого параметра, сумма которых *псевдоаналитична*. Это означает, что регуляризованные ряды сходятся не только асимптотически, но и в обычном смысле в некоторой кольцевой окрестности $0 < |\varepsilon| < \varepsilon_0$ точки $\varepsilon = 0$. Впервые в теории дифференциальных уравнений наметилось новое направление, связанное с развитием аналитической теории сингулярных возмущений. Результаты С.А. Ломова по псевдоаналитичности были обобщены на нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, уравнения с частными производными и уравнения в банаховом пространстве его учениками Сафоновым В.Ф., Прохоренко, В. И., Качаловым В.И. (достаточно подробный обзор по псевдоаналитичности даётся в книге [1]). В настоящее время эта теория близка к завершению, благодаря исследованиям В. И. Качалова.

Дальнейшие исследования были направлены по двум путям: 1) по пути обобщения метода регуляризации на интегродифференциальные уравнения с ненулевым и тождественно нулевым операторами дифференциальной части; 2) по пути развития метода регуляризации на сингулярно возмущенные интегральные и интегродифференциальные уравнения с диагональным вырождением ядра произвольного порядка. Дадим обзор соответствующих работ в порядке их публикации в печати с 2001 г (приводим только основные работы).

1. Бободжанов А.А, Сафонов В.Ф.. //Матем. сборник.2001.Т.192,№8 .с 53-78.

Рассматривается сингулярно возмущенная система интегральных уравнений

$$\varepsilon y(t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^r \int_0^t k_j(t, s) \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_j(\theta) d\theta\right\} y(s, \varepsilon) ds + h(t), \quad (1)$$

в которой участвуют r спектральных значений $\mu_1(t), \dots, \mu_r(t)$ ядра интегрального оператора, $y = \{y_1, \dots, y_n\}$, $h(t) = \{h_1, \dots, h_n\}$, $k_1(t, s), \dots, k_r(t, s)$ – матрицы размера $n \times n$. Для разработки метода регуляризации для таких систем вводятся вектор-функции

$$z_j(t, \varepsilon) = \int_0^t k_j(t, s) \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_j(\theta) d\theta\right\} y(s, \varepsilon) ds, \quad j = \overline{1, r}.$$

которые удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{dz}{dt} = A(t)z + \sum_{j=1}^r \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_j(\theta) d\theta\right\} E_j k(t,s) z(s,\varepsilon) ds + \\ + \sum_{j=1}^r \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_j(\theta) d\theta\right\} H_j(t,s) ds + g(t), z(0,\varepsilon) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $z = \{z_1, \dots, z_r\}$, $A(t)$ и $k(t,s)$ – некоторые известные матрицы. Вводя регуляризующие переменные $\tau_j = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \lambda_j(\theta) d\theta \equiv \frac{\psi_j(t)}{\varepsilon}$, $j = \overline{1, (n+1)r}$ по спектру матрицы $A(t)$ и спектральным значениям $\mu_j(t)$ и производя регуляризацию интегрального оператора в пространстве U решений, получим регуляризованную (по отношению к (2)) систему

$$L_\varepsilon \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) - \tilde{J} \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) = g(t), L_\varepsilon \tilde{z}(t, \tau, \varepsilon) \equiv \sum_{j=1}^{(n+1)r} \lambda_j(t) \frac{\partial \tilde{z}}{\partial \tau_j} - A(t) \tilde{z} + \varepsilon \frac{\partial \tilde{z}}{\partial t}.$$

Для соответствующих итерационных задач метода регуляризации разрабатывается теория нормальной и однозначной разрешимости в пространстве U и строится формальное асимптотическое решение задачи (1). Обоснование асимптотической сходимости формальных решений к точным проводится на основе оценки корректной разрешимости интегральной системы (2), полученной в работе. В заключение в статье рассматривается вопрос о предельном переходе в системе (1) (при $\varepsilon \rightarrow +0$).

2. Бободжанов А.А, Сафонов В.Ф. // Дифференциальные уравнения. 2004. Т.40, №1. С.112-119.

Рассматривается интегродифференциальное уравнение

$$\varepsilon^3 \frac{dy}{dt} = \int_0^t (t-s) K(t,s) y(s,\varepsilon) ds + h(t), t \in [0, T] \quad (3)$$

с диагональным вырождением ядра первого порядка ($K(t,t) \neq 0, \forall t \in [0, T]$). Перенести результаты известных работ в случае $K(t,t) < 0$ с естественным условием $y(0,\varepsilon) = y^0$ не удастся, так как соответствующее характеристическое уравнение $\lambda^3 = K(t,t)$ имеет корни с вещественными частями разных знаков. Поэтому априори задача (12) с начальным условием $y(0,\varepsilon) = y^0$ будет неустойчивой при $\varepsilon \rightarrow +0$. Однако при $K(t,t) > 0 (\forall t \in [0, T])$ задача (3) будет устойчивой, если рассмотреть эту систему с начальным условием $y(T,\varepsilon) = y^0$. В этом случае она сводится к краевой сингулярно возмущенной задаче и может быть полностью исследована с помощью развиваемого в работе алгоритма. Эти результаты обобщаются и на случай вырождения ядра любого порядка ($K(t,s) = (t-s)^r K_1(t,s)$). Однако останавливаться на этих обобщениях не будем.

Для интегродифференциальных систем тип Вольтерра

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A(t)y + \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta} K(t,s)y(s,\varepsilon) ds + h(t), \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad t \in [0,T] \quad (4)$$

разрабатывается алгоритм нормальных форм при следующих ограничениях на

спектр $\{\lambda_j(t) \ j = \overline{1,n}\}$ матрицы $A(t)$:

$$\text{а) } \lambda_j(t) \neq \lambda_i(t), \quad i \neq j, \lambda_i(t) \neq \lambda_{n+1}(t) \forall t \in [0,1], i, j = \overline{1,n};$$

$$\text{б) } \lambda_1(t) \equiv 0 \forall t \in S \subset [0,T], \lambda_1(t) \neq 0 \forall t \in [0,T] \setminus S, \lambda_j(t) \neq 0 \forall t \in [0,1], j = \overline{2,n};$$

$$\text{в) } \lambda_{n+1}(t) < 0, \operatorname{Re} \lambda_i(t) \leq 0 \forall t \in [0,1], \quad i = \overline{2,n} \quad (\lambda_{n+1}(t) = \mu(t)).$$

Разрабатываемый алгоритм позволяет получать асимптотическое решение задачи (4) любого порядка по ε и исследовать контрастные структуры в окрестности множества S . Аналогичные результаты получены и для интегродифференциальных систем типа Фредгольма.

6. Бободжанова М.А, Сафонов В.Ф.. // Дифференциальные уравнения.2011.Т.47,№4. С.519-536.

Рассматривается интегродифференциальная система

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta} K_0(t,s)y(s,\varepsilon) ds + h(t), \quad y(0,\varepsilon) = y^0, \quad t \in [0,T], \quad (5)$$

оператор дифференциальной части которой тождественно равен нулю. Показывается, что асимптотическое поведение решений системы (5) и структура их регуляризованных асимптотических решений претерпевают существенное изменение при переходе от случая $\mu(t) \neq 0$ к случаю $\mu(t) \equiv 0$. Если оператор дифференциальный части не равен тождественно нулю, т.е. если рассматривается система

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = A_0(t)y + \int_0^t e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(\theta) d\theta} K_0(t,s)y(s,\varepsilon) ds + h(t), \quad y(0,\varepsilon) = y^0 \quad (6)$$

в случае $A_0(t) \neq 0$, то сингулярности в решении задачи (6) описываются полностью спектром $\{\lambda_j(t)\}$ оператора $A_0(t)$ и спектральным значением $\mu(t)$ интегрального оператора. При этом в случае $\mu(t) \equiv 0$ сингулярности индуцируются только спектром $\{\lambda_j(t)\}$. Если же $A_0(t) \equiv 0$, то при $\mu(t) \neq 0$ сингулярности описываются только спектральным значением $\mu(t)$, а в случае $\mu(t) \equiv 0$ при формировании сингулярностей принимают участие спектр "диагонального ядра" $K(t,t)$, чего не наблюдается в случае $A_0(t) \neq 0$. Кроме того, случай $\mu(t) \neq 0$ характеризуется тем, что при $A_0(t) \equiv 0$ в задаче (6) будет отсутствовать пограничный слой. Все эти вопросы нашли отражение в настоящей работе при построении асимптотических решений задачи (5), а также при исследовании передельного перехода в (5) при $\varepsilon \rightarrow +0$.

Мы привели обзор только основных работ. Перспектива дальнейших исследований связана с рассмотрением интегродифференциальных уравнений в частных производных и нелинейных интегродифференциальных уравнений типа Фредгольма, а также с изучением различных типов краевых задач.

Литература

1. Ломов С.А., Ломов И.С. *Основы математической теории пограничного слоя.*-М. Изд-во Московского университета, 2011.- 456 с.

Изменение устойчивости периодических решений с помощью запаздывающего управления

В. Г. Богаевская

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

BogaevskayaVG@yandex.ru

В области математического моделирования управление устойчивостью периодических решений является одним из ключевых вопросов. Для стабилизации и дестабилизации решений используется метод запаздывающего управления [1], позволяющий изменить динамику решения за счет слабого внешнего воздействия. В настоящей работе был исследован вопрос влияния параметров линейного запаздывающего управления на поведение решений в уравнения вида:

$$\dot{z} = \sigma z + \gamma |z|^2 z, \quad (1)$$

где z – комплекснозначная функция; γ и σ – некоторые заданные комплексные константы. При этом за счет нормировки времени можно добиться $Re \sigma = \pm 1/2$,

В предположении, что система (1) имеет устойчивую (неустойчивую) периодическую орбиту была поставлена задача определить такое запаздывающее управление, чтобы найденное периодическое решение существовало в новой системе, но становилось неустойчивым (устойчивым).

Рассматривалось два вида запаздывающего управления, – с одним и двумя запаздываниями – дающие системы (2) и (3) соответственно.

$$\dot{z} = \sigma z + \gamma |z|^2 z + K(z(t) - z(t-T)), \quad (2)$$

$$\dot{z} = \sigma z + \gamma |z|^2 z + K(z(t) - z(t-T_1)) + K(z(t) - z(t-T_2)). \quad (3)$$

Здесь $K = \alpha + i\beta$ – комплексный параметр, определяющий коэффициент запаздывающего управления; $T, T_1, T_2 > 0$ – время запаздывания. Периоды запаздывания выбраны таким образом, чтобы гарантировать существование исходной орбиты в новой системе. Для случая одного запаздывания это означает, что T должно быть кратно периоду исходной орбиты. Для двух запаздываний был рассмотрен случай

$$T_1 = nT_* + \frac{5T_*}{6}; T_2 = nT_* + \frac{T_*}{6},$$

где T_* – период исходной орбиты.

Для задачи дестабилизации было показано (см. [2]), что она имеет решение даже при одном запаздывании при условии вещественного K . Достаточным условием дестабилизации является условие

$$\alpha T < -1,$$

причем его всегда можно достичь за счет выбора параметра α .

Задача об устойчивости периодической орбиты была сведена к анализу зависимости расположения корней характеристического уравнения (4) для системы (2) и уравнения (5) для системы (3).

$$\mu^2 - \mu(2\alpha(e^{-\mu T} - 1) + 1) + (e^{-\mu T} - 1)(\alpha + g\beta) + (e^{-\mu T} - 1)^2(\alpha^2 + \beta^2) = 0 \quad (4)$$

$$\mu^2 - \mu(2\alpha(e^{-\mu T_1} + e^{-\mu T_2} - 2) + 1) + (e^{-\mu T_1} + e^{-\mu T_2} - 2)(\alpha + g\beta) + (e^{-\mu T_1} + e^{-\mu T_2} - 2)^2(\alpha^2 + \beta^2) = 0. \quad (5)$$

Были аналитически найдены кривые, при переходе через которые, в плоскости параметров (α, β) , изменяется количество корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью (см. [2]). Таким образом, плоскость параметров запаздывающего управления разбивается на области, внутри каждой из которых количество корней характеристического уравнения с положительной вещественной частью неизменно и может быть определено. Исследования данного разбиения позволили получить необходимые и достаточные условия стабилизации периодического решения.

На рис.1 приведено разбиение плоскости $(\frac{\text{Im} \gamma}{\text{Re} \gamma}, \text{Im} \sigma)$, иллюстрирующее полученные условия. Белым цветом отмечена область, для которой удастся добиться устойчивости при помощи управления с одним запаздыванием. Светло-серый цвет представляет собой улучшения, полученные при добавлении второго запаздывания. Для темно-серых областей стабилизация посредством управления указанных типов невозможна.

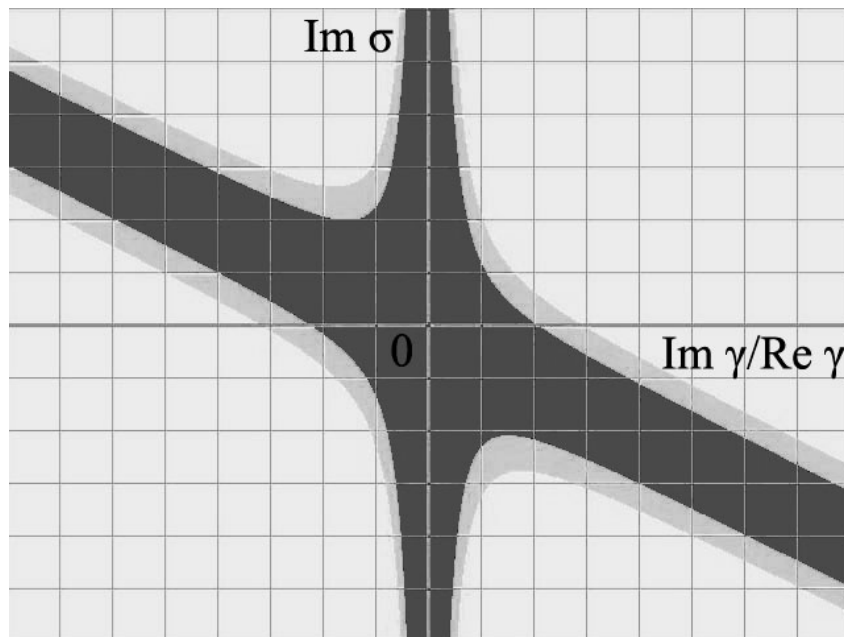


Рис.1 Разбиение плоскости параметров на области где возможно или невозможно стабилизация. Белый цвет – стабилизация возможна как в случае одного, так и в случае 2 запаздываний. Светло-серый цвет – стабилизация возможна только в случае 2

запаздываний. Темно-серый цвет – не удается стабилизировать периодическое решение.

Таким образом, в результате проведенного исследования была полностью решена задача дестабилизации. Для задачи стабилизации были аналитически найдены необходимые и достаточные условия, при которых возможно сделать решение устойчивым. Также было показано, что даже в частном случае для двух запаздываний имеется значительное улучшение, что позволяет надеяться на дальнейшее улучшение при рассмотрении задачи в общем виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. К. Pyragas // Phys. Lett. A 1992, 170, 421.
2. В.Г. Богаевская, И.С. Кащенко // Моделир. и анализ информ. систем 2014, Т.21., №1, с.53-65

Об асимптотическом интегрировании некоторых классов систем функционально-дифференциальных уравнений

П.Н. Нестеров

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
nesterov.pn@gmail.com

Хорошо известно, что не существует сколько-нибудь общих методов построения асимптотических формул при $t \rightarrow +\infty$ даже для решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Одним из продуктивных подходов в этом направлении является подход, предполагающий приведение исходной системы к так называемому L-диагональному виду. Для построения асимптотики решений таких систем может быть использована классическая теорема Н. Левинсона [1]. Основная трудность в ее применении состоит в необходимости приведения исходной системы к некоторому специальному (L-диагональному) виду. С этой задачей в ряде случаев хорошо справляется метод, известный теперь как метод Харриса-Латса или метод Q-преобразований [2,3]. Результаты исследований, связанных с применением теоремы Н. Левинсона для асимптотического интегрирования линейных систем ОДУ, подытожены в известной монографии [4]. В работе В.Ш. Бурда и В.А. Каракулина [5] был предложен метод асимптотического интегрирования некоторого класса систем ОДУ, опирающийся на идеологию метода усреднения. Этот метод, не уступающий по своей эффективности методу Харриса-Латса, в общем виде был затем приведен в работе [6]. Основное предположение, которое накладывается на систему, состоит в возможности выделения осциллирующих и медленно убывающих на бесконечности составляющих ее коэффициентов. Подобного рода системы, так называемые системы с колебательно убывающими коэффициентами, составляют довольно широкий класс динамических моделей.

Одно из направлений в теории асимптотического интегрирования линейных систем функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) связано с построением различных аналогов теоремы Н. Левинсона. К сожалению, возможности использования подобных результатов существенно ограничены тем обстоятельством, что не понятно, каким образом приводить исходную систему к специальному виду. В частности, для систем ФДУ не существует аналога метода Харриса-Латса. В работе [7] был предложен метод асимптотического интегрирования систем ФДУ с колебательно убывающими

коэффициентами в случае, когда «предельная» система при $t \rightarrow +\infty$ в некотором смысле близка к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Дальнейшие исследования [8,9] показали, что в случае, когда «предельная» система является системой ФДУ с постоянными коэффициентами, в некоторой критической ситуации возможно построение многообразия типа центрального в фазовом пространстве динамической системы с последующей редукцией исходной системы на это многообразие. Если построенное многообразие является притягивающим, динамика решений исходной системы будет определяться динамикой решений на данном многообразии. Редуцированная на многообразии система представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с колебательно убывающими коэффициентами. Для построения асимптотики решений таких систем автором был предложен специальный метод асимптотического интегрирования [6]. Этот метод опирается на идею усредняющих замен переменных с последующим использованием классической теоремы Н. Левинсона для получения асимптотических формул.

В докладе обсуждаются детали предложенных автором методов асимптотического интегрирования ФДУ. В качестве иллюстрации разработанной методики строятся асимптотические формулы для решений следующих уравнений с запаздыванием при $t \rightarrow +\infty$:

$$\ddot{x} + x + \frac{a \sin(\lambda t)}{t^\rho} x(t-h) = 0$$

и

$$\dot{x} = -\frac{\pi}{2} x(t-1) + \frac{a \sin(\lambda t)}{t^\rho} x(t),$$

где a, λ, ρ, h – действительные параметры и $\rho, h > 0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ № МК-80.2013.1 и проекта 1875 госзадания на НИР №2014/258.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. Levinson // Duke Math. J. 1948. V. 15. P. 111-126.
2. W.A. Harris Jr., D.A. Lutz // J. Math. Anal. Appl. 1974. V. 48. No 1. P. 1-16.
3. W.A. Harris Jr., D.A. Lutz // J. Math. Anal. Appl. 1977. V. 57. No 3. P. 571-586.
4. M.S.P. Eastham “The asymptotic solution of linear differential systems”. London Math. Soc. Monographs. Oxford: Clarendon Press, 1989.
5. В.Ш. Бурд, В.А. Каракулин // Матем. заметки. 1998. Т. 64, №5. С. 658-666.
6. П.Н. Нестеров // Дифф. уравнения. 2007. Т. 43. №6. С. 731-742.
7. P. Nesterov // Monatsh. Math. 2013. Vol. 171. No 2. P. 217-240.
8. П.Н. Нестеров // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21. № 3. С. 5-34.
9. П.Н. Нестеров // Модел. и анализ информ. систем. 2014. Т. 21. № 5. С. 5-38.

Существование и устойчивость простейших автомодельных решений для модели с запаздыванием, описывающей FDML лазер

А.А. Кашенко

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

sa-ahr@yandex.ru

Рассмотрим уравнение, описывающее FDML лазер [1]:

$$\varepsilon \dot{a} + a = \sqrt{\kappa} \exp\left(\frac{g_0(1-i\alpha)}{2(1+|a(t-1)|^2)}\right) a(t-1) e^{-i\Delta/\varepsilon}. \quad (1)$$

Здесь $0 < \kappa < 1$, $g_0 > 0$, α и Δ действительные, $\kappa e^{g_0} > 1$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Нас интересует существование и устойчивость в фазовом пространстве $C[-1,0]$ автомодельных решений вида

$$R \exp(i\Lambda t), \quad (2)$$

где R, Λ — действительные константы, $R > 0$.

Обозначим через $\Gamma(\kappa, g_0)$ множество точек (δ, ρ^2) , для которых выполняется равенство

$$\delta^2 = \kappa \exp(g_0(1+\rho^2)^{-1}) - 1.$$

Через $\theta = \theta(\delta, \Delta, \varepsilon)$ обозначим такое значение в полуинтервале $[0, 2\pi)$, для которого величина $(\Delta + \delta)/\varepsilon + \theta$ является целым кратным 2π , а через $\nu(\varepsilon)$, $d(\varepsilon)$ — некоторые ограниченные при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции. Назовем Ω действительный корень уравнения

$$i\delta + 1 = \sqrt{\kappa} \exp(g_0/2(1-i\alpha)(1+\rho^2)^{-1} - i\Omega),$$

принадлежащий полуинтервалу $[0, 2\pi)$. Справедлива теорема [2]

Теорема 1 Для каждой точки (δ_0, ρ_0^2) множества $\Gamma(\kappa, g_0)$ и для каждого натурального n при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ существует решение (2) уравнения (1), где $R = R_n(\varepsilon)$ и $\Lambda = \Lambda_n(\varepsilon)$ таковы, что $R_n(\varepsilon) = \rho_0 + \varepsilon \nu(\varepsilon)$, $\Lambda_n(\varepsilon) = \delta_0/\varepsilon + \theta + \Omega + 2\pi n + \varepsilon d$.

Для формулировки результата об устойчивости введем в рассмотрение систему неравенств:

$$\begin{cases} 2(1+\rho^2)^2 \delta^2 (1+\alpha^2) - g_0 \rho^2 (1+\alpha\delta)^2 < 0, \\ g_0 \rho^2 (1+\rho^2)^{-2} < 2, \\ -1 < \alpha\delta < 4(1+\rho^2)^2 (g_0 \rho^2)^{-1} - 1 \end{cases} \quad (3)$$

и назовем ρ_{max}^2 значение ρ^2 , равное $g_0 \ln^{-1}(\kappa^{-1}) - 1$.

Для формулировки теорем о неустойчивости введем следующие совокупности неравенств

$$\begin{cases} 2(1+\rho^2)^2 \delta^2 (1+\alpha^2) - g_0 \rho^2 (1+\alpha\delta)^2 > 0, \\ g_0 \rho^2 (1+\rho^2)^{-2} > 2 \end{cases} \quad (4)$$

и

$$\begin{cases} \alpha\delta < -1, \\ \alpha\delta > 4(1+\rho^2)^2(g_0\rho^2)^{-1} - 1. \end{cases} \quad (5)$$

Теорема 2 (Достаточное условие устойчивости) Пусть в точке $(0, \rho_{\max}^2)$ кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ выполнено второе неравенство системы (3). Пусть в точке (δ_0, ρ_0^2) кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ выполнены условия (3). Пусть уравнение $q(z) = 0$ не имеет корней на отрезке $[-1, 1]$ для всех точек дуги кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$, соединяющей точки $(0, \rho_{\max}^2)$ и (δ_0, ρ_0^2) . Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение (2) уравнения (1) с $\delta = \delta_0$ и $\rho^2 = \rho_0^2$ устойчиво.

Теорема 3 (Достаточное условие неустойчивости 1) Пусть в точке (δ_0, ρ_0^2) кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ выполнено условие (4). Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ решение (2) уравнения (1) с $\delta = \delta_0$ и $\rho^2 = \rho_0^2$ неустойчиво.

Теорема 4 (Достаточное условие неустойчивости 2) Пусть в точке (δ_0, ρ_0^2) кривой $\Gamma(\kappa, g_0)$ выполнено условие (5). Тогда существует такая положительная последовательность $\{\varepsilon_m\}$, что $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ и решение (2) уравнения (1) с $\delta = \delta_0$ и $\rho^2 = \rho_0^2$ неустойчиво при $\varepsilon = \varepsilon_m$ ($m = 1, 2, \dots$).

ЛИТЕРАТУРА

3. S. Slepneva et al. // Optics Express 2013, V. 21, №16, p. 19240.
4. А.А. Кащенко // Моделир. и анализ информ. систем 2014. Т.21., №3. С. 35-54.

Параметрический резонанс в логистическом уравнении с запаздыванием

Н.Д. Быкова¹

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

n.bykova90@gmail.com

Рассмотрим логистическое уравнение с запаздыванием

$$\dot{u} = r[1 - u(t - T)]u. \quad (1)$$

Здесь $u(t)$ – положительная функция, r – коэффициент, называемый мальтузианским, T – величина запаздывания. Все параметры положительны. Отметим, что все решения с положительной начальной функцией $\varphi(s) \in C[-T, 0]$, заданной при некотором $t = t_0$, остаются положительными при всех $t > t_0$.

Основным предположением является выполнение соотношений

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \varepsilon r_1 + \varepsilon r_{11} \sin\left(\frac{\pi}{T_0} + \varepsilon \delta_1\right) + \varepsilon r_{12} \sin\left(\frac{\pi}{T_0} + \varepsilon \delta_2\right), \\ T &= T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon T_{11} \sin\left(\frac{\pi}{T_0} + \varepsilon \delta_1\right) + \varepsilon T_{12} \sin\left(\frac{\pi}{T_0} + \varepsilon \delta_2\right), \end{aligned} \quad (2)$$

смысл которых объяснен ниже. Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$ и $r_0 T_0 = \pi/2$.

Вначале кратко остановимся на динамических свойствах уравнения (1) в отсутствие возмущения (при $\varepsilon = 0$). В этом случае уравнение (1) имеет два состояния равновесия: нулевое и $u_0 \equiv 1$, первое из которых всегда неустойчиво, а второе асимптотически устойчиво при $rT < \pi/2$ и неустойчиво при $rT > \pi/2$. При выполнении равенства, то есть $rT = \pi/2$, от состояния равновесия u_0 ответвляется цикл, соответствующие значения параметров r и T назовем критическими. Таким образом, соотношения (2) означают, что величины параметров r и T выбраны близкими к критическим, а частоты возмущения близки к удвоенной частоте собственных колебаний.

Нас будет интересовать вопрос о локальной динамике (в окрестности u_0) уравнения (1) при выполнении условий (2). Рассматриваемое уравнение может быть сведено к обыкновенному дифференциальному скалярному комплексному уравнению относительно медленно меняющейся амплитуды $\xi(\tau)$

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \alpha\xi + A(\tau)\bar{\xi} + d|\xi|^2\xi, \quad (3)$$

¹ Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ

где $\tau = \varepsilon t$, $A(\tau) = \alpha_1 \exp(i\delta_1\tau) + \alpha_2 \exp(i\delta_2\tau)$, $\alpha = \frac{r_0^2 T_1 + i r_1}{1 + i\pi/2}$, $d = -r_0 \frac{3\pi - 2 + i(\pi + 6)}{10(1 + \pi^2/4)}$,

$\alpha_1 = T_{11} \frac{r_0^2}{2i(1 + i\pi/2)}$ и $\alpha_2 = T_{12} \frac{r_0^2}{2i(1 + i\pi/2)}$ с помощью соотношения, связывающего решения уравнения (1) и решения (3)

$$u(t, \varepsilon) = 1 + \varepsilon^{1/2} \left[\xi(\tau) \exp\left(i \frac{\pi}{2T_0} t\right) + \bar{\xi}(\tau) \exp\left(-i \frac{\pi}{2T_0} t\right) \right] + \varepsilon u_2(t, \tau) + \varepsilon^{3/2} u_3(t, \tau) + O(\varepsilon^2).$$

Здесь функции $u_2(t, \tau)$ и $u_3(t, \tau)$ $4T_0$ – периодичны по t . Согласно этой формуле устойчивому циклу в (3) отвечает устойчивое периодическое решение в (1).

После замены в уравнении (3) $\xi = v \exp\left(\frac{i}{2} \delta_1 \tau\right)$, $\delta_2 - \delta_1 = \mu$ ($\delta_2 > \delta_1$) и $\mu\tau = \tau_1$ получаем уравнение с 2π - периодическими коэффициентами

$$\mu \frac{dv}{d\tau_1} = \alpha_0 v + (\alpha_1 + \alpha_2 \exp(i\tau_1)) \bar{v} + d|v|^2 v, \quad (4)$$

здесь $\alpha_0 = \alpha - i\delta_1$.

Уравнение (4) исследовалось при различных значениях параметра μ .

При достаточно больших μ в результате применения принципа усреднения задача сводится к случаю параметрического резонанса при одночастотном возмущении.

В случае малых значений параметра μ возможны три варианта поведения решений уравнения (4):

1. Нулевое решение системы (4) асимптотически устойчиво;
2. Нулевое решение системы (4) неустойчиво;
3. Устойчивость и неустойчивость решений системы (4) бесконечно чередуется при $\mu \rightarrow 0$.

При условно «средних» значениях параметра μ применялись численные методы. Было выяснено, что в этом случае могут наблюдаться нерегулярные колебания, а фазовые перестройки связаны с бифуркациями потери симметрии, с каскадами бифуркаций удвоения периодов и бифуркациями расщепления сепаратрис.

Наглядное представление о фазовых перестройках, происходящих с уравнением (4) в области неупорядоченных колебаний, дает график зависимости старшего ляпуновского показателя аттрактора уравнения (4) от параметра $\nu = 1/\mu$, представленный на рис. 1. Вычисления выполнены с шагом по параметру $\Delta\nu = 0.5 \cdot 10^{-4}$.

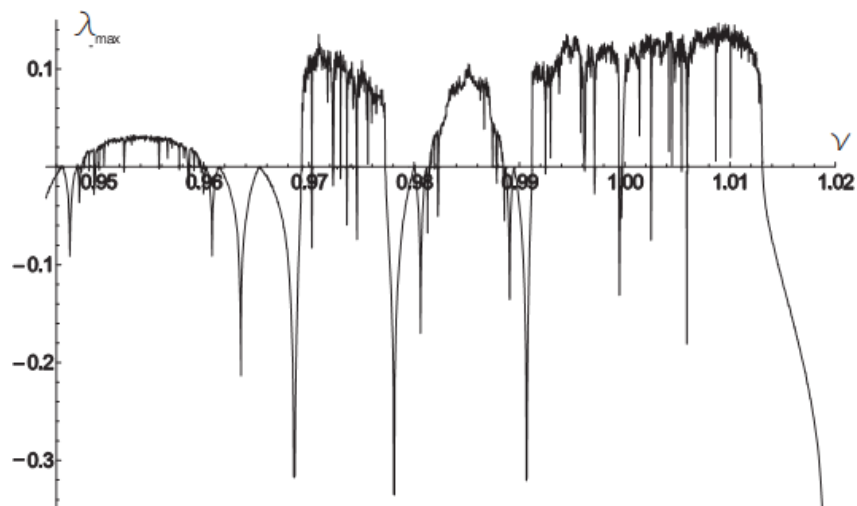


Рис. 1. Зависимость $\lambda_{\max}(\nu)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Д. Быкова, С.Д. Глызин, С.А. Кашенко // Модел. и анализ инф. систем. 2013. Т. 20. № 3. С. 86-98.

Динамика пары логистических уравнений с большим коэффициентом запаздывающего управления

Н.Д. Быкова², С.А. Кашенко

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

n.bykova90@gmail.com, kasch@uniyar.ac.ru

Будем рассматривать систему из двух связанных логистических уравнений с запаздыванием и большим запаздывающим управлением

$$\begin{aligned} \dot{u} &= r[1 - u(t-T)u] + \gamma(v(t-h) - u) \\ \dot{v} &= r[1 - v(t-T)v] + \gamma(u(t-h) - v) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь r – мальтузианский коэффициент, T – время запаздывания, γ – коэффициент запаздывающего управления, h – временная задержка запаздывающего управления. Все эти коэффициенты положительны. И, кроме того,

$$\gamma \gg 1.$$

² Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯргУ

Отметим, что мы будем рассматривать решения системы (1) с положительными начальными (при некотором $t = t_0$) функциями $\varphi(s) \in C[-H, 0]$, где $H = \max(T, h)$. Решения с такой начальной функцией остаются положительными при всех $t > t_0$.

Применив специальный асимптотический метод локального анализа – метод квазинормальных форм, разработанный в [1], получаем специальную нелинейную систему уравнений для некоторых вещественных функций $\xi(\tau, x)$ и $\eta(\tau, x)$, не содержащую малых и больших параметров, нелокальная динамика, которой определяет в главном поведение решений исходной системы в ограниченной при $\gamma \rightarrow \infty$ области фазового пространства $C = C[-H, 0] \times C[-H, 0]$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \tau} = \frac{1}{2h} [F_{\Delta}(\xi + \eta) + F_{\Delta}(\xi - \eta) + \frac{z^2}{2h} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}], \quad (2)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{1}{2h} [F_{\Delta}(\xi + \eta) - F_{\Delta}(\xi - \eta) + \frac{z^2}{2h} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \xi(\tau, x + h) &\equiv \xi(\tau, x), \\ \eta(\tau, x + h) &\equiv -\eta(\tau, x). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\tau = t / \gamma$, $x = (z\gamma^{1/2} + \theta_z)(1 - \gamma^{-1}h^{-1})t$, $\Delta = (z\gamma^{1/2} + \theta_z)(1 - \gamma^{-1}h^{-1})T$, z - произвольное вещественное число, θ_z - величина из интервала $[0, 2)$, для которой выражение $z\gamma^{1/2} + \theta_z$ является нечетным целым. Нелинейность определяется функцией $F_{\Delta}(w) = rw[1 - w(\tau, x - \Delta)]$, здесь $w = w(\tau, x)$.

Связь между решениями краевой задачи (2) – (4) и решениями исходной задачи (1) задает соотношение

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi(\tau, x) + \eta(\tau, x) \\ \xi(\tau, x) - \eta(\tau, x) \end{pmatrix} + O(\gamma^{-1}).$$

Краевую задачу (2) – (4) удобно переписать, сделав замену $U(\tau, x) = \xi(\tau, x) + \eta(\tau, x)$ и $V(\tau, x) = \xi(\tau, x) - \eta(\tau, x)$. Тогда приходим к системе уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{1}{h} F_{\Delta}(U) + \frac{z^2}{2h} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{h} F_{\Delta}(V) + \frac{z^2}{2h} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad (6)$$

с периодическими краевыми условиями

$$\begin{aligned} U(\tau, x + h) &\equiv V(\tau, x) \\ V(\tau, x + h) &\equiv U(\tau, x) \end{aligned} \quad (7)$$

Краевая задача (5) – (7) рассматривалась при конкретных значениях параметров таких, что уравнение Хатчинсона (уравнение (1) при условии $\gamma = 0$) имеет устойчивое состояние равновесия $(u, v) \equiv (1, 1)$. В результате численного эксперимента установлено, что при уменьшении параметра z в краевой задаче (5) – (7) наблюдается

явление мультистабильности, то есть нарастание количества сосуществующих устойчивых режимов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С.А. Кашенко // Журнал Вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. №3. С. 457-465.

Устойчивые режимы одной системы с импульсным воздействием

Ю.В. Богомолов, С.Д. Глызин

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

glyzin@uniyar.ac.ru, mathematics@inbox.ru

Рассматривается система диффузионно связанных сингулярно возмущенных осцилляторов

$$\dot{u}_j = d(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + \lambda [f(u_j(t-h)) - g(u_j(t-1))], \quad j=1, \dots, m, \quad (1)$$

моделирующая электрическую активность цепочки импульсных нейронов (см. [1,2]). Здесь $u_0 = u_1$, $u_{m+1} = u_m$, параметр d характеризует глубину связи между осцилляторами, величина λ определяется скоростью протекания процессов в системе и считается большой. Относительно функций $f(u), g(u) \in C^2(R_+)$, $R_+ = \{u \in R : u \geq 0\}$, предполагаем, что они обладают свойствами:

$$f(0) = 1, g(0) = 0, f(u) = -a_0 + O(1/u), uf'(u) = O(1/u), u^2 f''(u) = O(1/u), \quad (2)$$

$$g(u) = b_0 + O(1/u), ug'(u) = O(1/u), u^2 g''(u) = O(1/u) \text{ при } u \rightarrow +\infty,$$

где a_0, b_0 – положительные константы. В предположении, что значение λ велико, а параметры a_0, b_0, h удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{(n+1)(2+a_0+1/a_0)} < h < \frac{1}{n(2+a_0+1/a_0)+a_0+1/a_0}, \quad b_0 > 1+a_0, \quad (3)$$

в статье [1] доказано, что каждое отдельное уравнение системы (1) имеет экспоненциально орбитально устойчивый релаксационный цикл $u_*(t, \lambda)$ с n всплесками на периоде. Нетрудно видеть, что система (1) имеет однородный цикл

$$u_1 \equiv u_2 \equiv \dots \equiv u_m = u_*(t, \lambda). \quad (4)$$

Основным результатом изучения системы (1) является обоснование того факта, что в ней наряду с устойчивым циклом (4) сосуществуют не менее m экспоненциально орбитально устойчивых периодических движений. Для обоснования такого утверждения в системе (1) выполняется замена

$$u_1 = \exp(x/\varepsilon), \quad u_j = \exp\left(x/\varepsilon + \sum_{k=1}^{j-1} y_k\right). \quad j=1, \dots, m, \quad \varepsilon = 1/\lambda \ll 1. \quad (5)$$

Удается показать, что для переменных y_j при условиях (2), (3) и достаточно малых ε от задачи (1) можно перейти к следующей системе:

$$\dot{y}_j = d[\exp y_{j+1} + \exp(-y_j) - \exp y_j - \exp(-y_{j-1})], \quad y_0 = y_m = 0, \quad j=1, \dots, m-1, \quad (6)$$

с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} y_j(h+kT_0+0) &= y_j(h+kT_0-0) - (1+a_0)y_j(kT_0), \\ y_j(t_0+h+kT_0+0) &= y_j(t_0+h+kT_0-0) - (1+1/a_0)y_j(t_0+kT_0), \\ y_j(1+kT_0+0) &= y_j(1+kT_0-0) - b_0 y_j(kT_0), \\ y_j(1+t_0+kT_0+0) &= y_j(1+t_0+kT_0-0) - (b_0/a_0)y_j(t_0+kT_0), \\ k &= 0, 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m-1, \end{aligned} \quad (7)$$

где $T_0 = h(2 + a_0 + 1/a_0)$ – расстояние между соседними всплесками решения $u_*(t, \lambda)$, $t_0 = h(1 + 1/a_0)$, а индекс k определяет номер всплеска.

К системе (6), (7) добавим начальные условия $(y_1, \dots, y_{m-1})|_{t=-\sigma_0} = (z_1, \dots, z_{m-1})$. и рассмотрим отображение, действующее из R^{m-1} в R^{m-1} по правилу

$$z \rightarrow \Phi(z) \equiv (y_1(t, z), \dots, y_{m-1}(t, z))|_{t=T_*-\sigma_0}. \quad (8)$$

Здесь $(y_1(t, z), \dots, y_{m-1}(t, z))$ – решение импульсной системы (6), (7) с начальными условиями z , T_* – период решения $u_*(t, \lambda)$, наконец, $\sigma_0 > 0$ – некоторое достаточно малое фиксированное число. В [2] доказана базовая теорема о соответствии при достаточно малых ε экспоненциально устойчивых состояний равновесия отображения (9) устойчивым циклам системы (1). Представляет интерес задача о числе таких состояний равновесия. Асимптотическими методами можно показать, что при условиях (2), (3) на параметры системы (1) найдутся такие d_1, d_2 , что при всех достаточно малых ε и при значениях параметра связи d из промежутка $[d_1, d_2]$ отображение (9) имеет не менее m ненулевых устойчивых состояний равновесия. В случае если асимптотические методы не работают, используются численные методы. На основе обширного численного эксперимента найдены условия сосуществования большего, чем m количества автоволновых релаксационных циклов с заданным числом всплесков на периоде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 5. С. 840-858.
2. Глызин С.Д., Колесов А.Ю., Розов Н.Х. // Математические заметки. 2013. Т. 93. № 5. С. 682–699.

Оптимальное управление поведением решений начально-краевой задачи, моделирующей динамику одной дискретно-континуальной механической системы

Е.П. Кубышкин¹, М.С. Тряхов²

Ярославский государственный университет имени П. Г. Демидова

Работа выполнена при поддержке проекта № 984 в рамках базовой части государственного задания на НИР ЯрГУ

¹kubysh@uniyar.ac.ru ²m.tryakhov@uniyar.ac.ru

Рассматривается следующая начально-краевая задача

$$J_* \ddot{\theta} + \int_0^1 (x+a) y_{tt}(x, t) dx = M(t), \quad (1)$$

$$y_{tt} + y_{xxxx} = -(x+a) \ddot{\theta}, \quad (2)$$

$$y(0, t) = y_x(0, t) = 0, y_{xx}(1, t) = y_{xxx}(1, t) = 0, \quad (3)$$

$$\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0, y(x, 0) = y_0(x), y_t(x, 0) = \dot{y}_0(x), \quad (4)$$

для определения функций $\theta(t)$, $y(x, t)$ в области $Q = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$.

Здесь $M(t) \in L_\infty(0, T)$, $J_* = J_0 + a^2 + a + 1/3$, где $J_0, a > 0$. Начально-краевая задача описывает поворот твердого тела с упругим стержнем постоянного сечения под действием момента внешних сил $M(t)$. Стержень моделируется балкой Эйлера-Бернулли. Начально-краевая задача приведена в безразмерных переменных.

Для (1)-(4) рассматриваются следующие задачи оптимального управления.

Задача 1. Определить функцию $M(t) \in L_\infty(0, T)$, переводящую решение краевой задачи (1)-(3) из начального фазового состояния (4) в конечное

$$\theta(T) = \theta_T, \dot{\theta}(T) = \dot{\theta}_T, y(x, T) = y_T(x), y_t(x, T) = \dot{y}_T(x), \quad (5)$$

в заданный момент времени T и минимизирующую функционал

$$\Phi(M) = \|M(t)\|_{L_\infty(0, T)} = \text{vrai sup}_{0 \leq t \leq T} |M(t)|. \quad (6)$$

Задача 2 (Задача быстрогодействия). Определить функцию $M(t) \in L_\infty(0, T)$, $\Phi(M) \leq L < \infty$, переводящую решение начально-краевой задачи (1)-(4) из начального фазового состояния (4) в конечное (5) за минимальное время T .

В дальнейшем $\lambda_n = \beta_n^4$ и $v_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ - совокупность собственных значений и соответствующих собственных функций спектральной краевой задачи

$$v^{IV}(x) = J_0^{-1}(x+a)(av'''(0) - v''(0)) = \lambda v(x), \quad (7)$$

$$v(0) = v'(0) = 0, v''(1) = v'''(1) = 0. \quad (8)$$

Система собственных значений и собственных функций краевой задачи (7)-(8) построена в [1]. Показано, что β_n являются положительными корнями характеристического уравнения

$$1 + ch\beta \cos \beta + (2ash\beta \sin \beta + \beta^{-1}((a^2\beta^2 + 1)ch\beta \sin \beta + (a^2\beta^2 - 1)sh\beta \cos \beta)) / (J_0\beta^2) = 0, \text{ а}$$

$$\langle v_n(x), v_m(x) \rangle = \delta_{nm}, \langle v(x), u(x) \rangle = (v(x), u(x))_{L_2(0,1)} - J_*^{-1}(x+a, v(x))_{L_2(0,1)} (x+a, u(x))_{L_2(0,1)}.$$

Там же получен явный вид функций $v_n(x)$.

В $L_2(0,1)$ введем еще одно скалярное $(v(x), u(x))_{L_2(0,1)}$ и норму

$$\|u(x)\|_H = \langle u(x), u(x) \rangle_{L_2(0,1)}^{1/2}. \text{ Обозначим через } H_j(0,1) (j = 1, 2, 3) \text{ пространство функций}$$

$$y(x) \in L_2(0,1) \text{ вида } y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n v_n(x), \quad y_n = \langle y(x), v_n(x) \rangle,$$

$$\|y(x)\|_{H_j(0,1)} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^j y_n^2 \right)^{1/2} \quad (\omega_n = \beta_n^2). \text{ Отметим, что } H_j(0,1) \in W_2^j(0,1). \text{ В } L_2(Q_T) \text{ введем}$$

$$\text{норму } \|y(x,t)\|_{H(Q_T)} = \left(\int_0^T \langle y(x,t), y(x,t) \rangle dt \right)^{1/2}. \text{ Обозначим через } H_2(Q_T) \text{ подпространство}$$

$L_2(Q_T)$, полученное замыканием в норме

$$\|y(x,t)\|_{H_2(Q_T)} = \left(\int_0^T \left(\|y_t(x,t)\|_{H_2(0,1)}^2 + \|y_{xx}(x,t)\|_{L_2(0,1)}^2 \right) dt \right)^{1/2} \text{ множества функций}$$

$$y(x,t) \in C^{3,1}(Q_T), y(0,t) = y_x(0,t) = y_{xx}(1,t) = y_{xxx}(1,t) = 0. \text{ Отметим, что}$$

$$H_2(Q_T) \in W_2^{2,1}(Q_T).$$

Пусть

$$y_0(x) \in H_2(0,1), y_1(x) \in L_2(0,1), \zeta(t) \in W_2^1(0,T), \omega(x,t) \in H_2(Q_T), \zeta(T) = 0, \omega(x,T) = 0. \quad (9)$$

Под обобщенным решением начально-краевой задачи (1)-(4), определенном в области Q_T , будем понимать пару функций $\theta(t), y(x, t)$ ($\theta(0) = \theta_0, y(x, 0) = y_0(x)$), удовлетворяющих интегральному соотношению

$$\int_0^T [(\dot{\theta}(t) + J_0^{-1}\langle x + a, y_t(x, t) \rangle)\zeta(t) + \langle y_t(x, t), \omega_t(x, t) \rangle - (y_{xx}(x, t), \omega_{xx}(x, t))]_{L_2(0,1)} dt + (-J_*^{-1}\langle x + a, \omega(x, t) \rangle + J_*^{-1}\zeta(t))M(t) dt + (\dot{\theta}_0 + J_0\langle x + a, \dot{y}_0(x) \rangle)\zeta(0) + \langle \dot{y}_0(x), \omega(x, t) \rangle = 0$$

для любых функций $\zeta(t)$ и $\omega(x, t)$ вида (9).

Утверждение 1. *Обобщенное решение начально-краевой задачи (1)-(4) существует, единственно и задается формулами*

$$\theta(t) = \theta_0 + \theta_1 t + J_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} d_n (a_{0n} + b_{0n} t - y_n(t)) + J_0^{-1} \int_0^t (t - \tau) M(\tau) d\tau,$$

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) y_n(t), \quad y_n(t) = a_{0n} \cos(\omega_n t) + b_{0n} \omega_n^{-1} \sin(\omega_n t) - J_0^{-1} \omega_n^{-1} d_n \int_0^t \sin(t - \tau) M(\tau) d\tau,$$

где $a_{0n} = \langle y_0(x), v_n(x) \rangle$, $b_{0n} = \langle \dot{y}_0(x), v_n(x) \rangle$, $d_n = \langle x + a, v_n(x) \rangle$. При этом $d_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

Отсюда перевод решения начально-краевой задачи из (4) в (5) эквивалентен выполнению равенств:

$$(1, M(t))_{L_2(0,T)} = A_0(T) = J_* (\dot{\theta}_T - \dot{\theta}_0) + J_* J_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} d_n (b_{Tn} - b_{0n}), \quad (10)$$

$$(T - t, M(t))_{L_2(0,T)} = A_1(T) = J_* (\theta_T - \theta_0 - \dot{\theta}_0 T) + J_* J_0^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} d_n (a_{Tn} - a_{0n} - b_{0n} T), \quad (11)$$

$$(\sin(\omega_n(T - t)), M(t))_{L_2(0,T)} = A_{2n+1}(T) = J_0 d_n^{-1} (a_{0n} \omega_n \cos(\omega_n T) + b_{0n} \sin(\omega_n T) - a_{Tn} \omega_n), \quad (12)$$

$$(\cos(\omega_n(T - t)), M(t))_{L_2(0,T)} = A_{2n}(T) = J_0 d_n^{-1} (-a_{0n} \omega_n \sin(\omega_n T) + b_{0n} \cos(\omega_n T) - b_{Tn}). \quad (13)$$

Утверждение 2. Пусть $y_0(x), y_T(x) \in H_3(0,1)$, $\dot{y}_0(x), \dot{y}_T(x) \in H_1(0,1)$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^2(T) < \infty.$$

Положим $\varphi_0(t) = 1, \varphi_1(t) = t, \varphi_{2j}(t) = \cos(\omega_n t), \varphi_{2j+1}(t) = \sin(\omega_n t)$ ($j = 1, 2, \dots$) и перепишем (10)-(13) в виде

$$\int_0^T \varphi_n(t) M(t) dt = \beta_n(T), \quad (n = 0, 1, \dots), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^2(T) < \infty. \quad (14)$$

Введем в рассмотрение линейный непрерывный функционал в $L_1(0, T)$ вида

$$F(u) = \int_0^T u(t) M(t) dt \quad (\|F\| = \|M(t)\|_{L_{\infty}(0,T)}). \quad (15)$$

Задача 1 может быть сформулирована как следующая проблема моментов в $L_1(0, T)$.

Найти функционал вида (15), удовлетворяющий условиям (14) и имеющий минимальную норму $\|F\| = m(T)$ (оптимальный функционал).

Сформулируем двойственную к проблеме моментов задачу.

Найти

$$\min_{\xi=(\xi_1, \xi_2, \dots)} \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j^* \varphi_j(t) \right\|_{L_1(0,T)} = \|u^*(t)\|_{L_1(0,T)} = l^{-1}(T)$$

при условии $\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \beta_j(T) = 1$.

Утверждение 3. $m(T) = l(T)$.

Утверждение 4. Решение задачи (1) дается формулой

$$M^*(t) = l(T) \operatorname{sign}(u^*(t)). \quad (16)$$

Обозначим через $S(l(T))$ множество функционалов вида (15), имеющих норму $l(T)$.

Элемент $u_0(t) = u^*(t) / \|u^*(t)\|_{L_1(0,T)}$ назовем экстремальным.

Утверждение 5 (Принцип максимума). Оптимальный функционал $F_*(u)$, вида (15) и определенный функцией $M^*(t)$, выделяется из всех функционалов вида (15), имеющих ту же норму $l(T)$, следующим свойством максимума на экстремальном элементе $F_*(u_0) = \max_{S(l(T))} F(u_0)$.

Утверждение 6. $\lim_{T \rightarrow 0} l(T) = \infty$, $\lim_{T \rightarrow \infty} l(T) = 0$.

Обозначим через T^* первый положительный корень уравнения $l(T) = L$.

Утверждение 7. Решение задачи 2 дает пара $(T^*, M^*(t))$, где $M^*(t)$ определяется формулой (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.П. Кубышкин "Оптимальное управление поворотом твердого тела с гибким стержнем". Прикладная математика и механика. 1992. Т.56, Вып. 1. С. 240--249.

**Асимптотическое описание движущихся фронтов
в двумерной задаче реакция-диффузия^(*)**

Е.А. Антипов, В.Т. Волков, Н.Т. Левашова, Н.Н. Нефедов

*Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, кафедра математики, Москва,
Россия*

volkovvt@mail.ru

1. Постановка задачи.

Целью настоящей работы является развитие асимптотического подхода для описания решений с внутренними слоями – движущихся фронтов – в задачах типа реакция-диффузия в пространственно двумерном случае.

Рассмотрим следующую задачу

$$\varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, x, y, \varepsilon), \quad y \in (0, a), \quad x \in (-\infty, +\infty), \quad t > 0 \quad (1)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0, y=a} = 0, \quad u(x, y, t, \varepsilon) = u(x + L, y, t, \varepsilon) \quad (2)$$

$$u(x, y, t, \varepsilon)|_{t=0} = u^0(x, y) \quad (3)$$

В уравнении (1) $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Заметим, что его присутствие при пространственных производных объясняется особенностями физической постановки задачи, в то время как малый множитель при производной по времени лишь определяет масштаб времени, удобный для дальнейшего рассмотрения. Функции $u^0(x, y)$ и $f(u, x, y, \varepsilon)$ – достаточно гладкие и L -периодическими по переменной x .

Задача (1)–(3) в стационарной постановке хорошо изучена как в погранслоном случае, так и в случае с внутренними переходными слоями (см. [1] и ссылки в этой работе). Процесс формирования решения с переходным слоем из достаточно гладкой начальной функции общего вида рассмотрен в [2]. Основной целью данной работы является изучение решения с внутренним переходным слоем типа движущегося фронта и получение уравнений, позволяющих эффективно описывать его динамику. Доказано существование решения указанного типа и построена асимптотика по малому параметру. Представленные ниже результаты являются развитием [3], где был рассмотрен пространственно одномерный случай в аналогичной постановке. Для доказательства использованы идеи, изложенные в [4].

Пусть выполнены следующие условия.

Условие (A₁). а) Функция $f(u, x, y, \varepsilon)$ такова, что вырожденное уравнение $f(u, x, y, 0) = 0$ имеет ровно 3 корня $u = \varphi^{(\pm)}(x, y)$, $u = \varphi^{(0)}(x, y)$.

б) Пусть $\varphi^{(-)}(x, y) < \varphi^{(0)}(x, y) < \varphi^{(+)}(x, y)$ при всех $(x, y) \in \bar{D} = \{(-\infty, +\infty) \times [0, a]\}$ и $f_u(\varphi^{(\pm)}(x, y), x, y, 0) > 0$, $f_u(\varphi^{(0)}(x, y), x, y, 0) < 0$.

Хорошо известно [2], что при выполнении Условия (A₁) и достаточно общих требованиях на функцию $u^0(x, y)$, за время порядка $T = \varepsilon |\ln \varepsilon|$ решение задачи (1)–(3) формирует узкий переходный слой между уровнями $\varphi^{(-)}(x, y)$ и $\varphi^{(+)}(x, y)$, локализованный в окрестности некоторой кривой $C_0^0: y = h^0(x)$, форма и положение которой определяются видом функции $u^0(x, y)$.

Условие (A₂). Предположим, что переходный слой сформировался, т.е. будем рассматривать начальную функцию $u^0(x, y)$ следующего вида:

$$\begin{aligned} u^0(x, y, \varepsilon) &= \varphi^{(-)}(x, y) + O(\varepsilon) \quad \text{при } (x, y) \in D_0^{(-)} \\ u^0(x, y, \varepsilon) &= \varphi^{(+)}(x, y) + O(\varepsilon) \quad \text{при } (x, y) \in D_0^{(+)}, \end{aligned}$$

где $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$ – подобласти, разделенные кривой $C_0(t)$.

Дальнейшая цель – изучение динамики сформировавшегося фронта. Рассмотрим следующую задачу, где $f(u, x, y, \varepsilon)$ удовлетворяет Условию (A₁), а (x, y) – параметры:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + W \frac{\partial p}{\partial \xi} = f(p, x, y, 0), \quad p(x, 0) = \varphi^{(0)}(x, y), \quad p(x, \pm\infty) = \varphi^{(\pm)}(x, y) \quad (4)$$

Известно (см., например, [5]), что при каждом (x, y) существует единственная пара $(W(x, y), p(\xi; x, y))$, удовлетворяющая (4), причем имеет место оценка (C и σ – положительные постоянные): $|p(x, \xi) - \varphi^{(\pm)}(x, y)| \leq Ce^{\sigma|\xi|}$, $\xi \rightarrow \pm\infty$.

Условие (A₃). Пусть существует решение $h(x, t)$ задачи Коши

$$\frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}} = W(x, h(x, t)), \quad h(x, 0) = h^0(x), \quad h(x, t) = h(x+L, t)$$

где $W(x, y)$ определена в (4), и кривая $C(t) : \{0 \leq x \leq L; y = h(x, t)\} \in \bar{D}$ при $t \in [0, T]$.

2. Описание движения фронта.

Локализацию фронта при каждом фиксированном t будем описывать посредством кривой $C_\lambda(t)$, которую определим как пересечение решения $u(x, y, t, \varepsilon)$ с корнем $u = \varphi^{(0)}(x, y)$ вырожденного уравнения (см. Условие (A₁)). Обозначим $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$ – подобласти по разные стороны от кривой $C_\lambda(t)$.

Для определения кривой $C_\lambda(t)$ введем локальные координаты (r, l) в окрестности некоторой кривой $C_0(t): \{x=l, y=h(l, t)\}$, где r – расстояние от $C_0(t)$ по нормали к ней со знаком «+» в подобласти $D^{(+)}$ и со знаком «-» в подобласти $D^{(-)}$; l – координата той точки на кривой $C_0(t)$, из которой эта нормаль выходит. Уравнение, определяющее $C_0(t)$, будет выписано ниже. Заметим, что в указанной системе координат кривая $C_0(t)$ определяется уравнением $r=0$.

В локальных координатах (r, l) будем искать кривую $C_\lambda(t)$ в виде ряда по ε :

$$r = \lambda^*(l, t, \varepsilon) = \varepsilon \cdot \lambda_1(l, t) + \varepsilon^2 \cdot \lambda_2(l, t) + \dots \quad (5)$$

Асимптотика решения (1)–(3) строится в каждой из областей $D^{(+)}$ и $D^{(-)}$ в виде

$$U^{(\pm)}(x, y, t, \varepsilon) = \bar{u}^{(\pm)}(x, y, \varepsilon) + P^{(\pm)}(\rho^{(\pm)}, x, \varepsilon) + Q^{(\pm)}(\xi, l, \varepsilon) \quad (6)$$

где $\xi = \frac{r - \lambda^*(l, t, \varepsilon)}{\varepsilon}$, $\rho^{(+)} = \frac{a - y}{\varepsilon}$, $\rho^{(-)} = \frac{y}{\varepsilon}$, и функции $\bar{u}^{(\pm)}(x, y, \varepsilon)$, $P^{(\pm)}(\rho^{(\pm)}, x, \varepsilon)$, $Q^{(\pm)}(\xi, l, \varepsilon)$ – ряды по степеням ε , определяемые посредством стандартной процедуры [1]. На кривой $C_\lambda(t)$ потребуем выполнения условий гладкого согласования

$$U^{(-)} = U^{(+)}, \quad \varepsilon \frac{\partial U^{(-)}}{\partial n} = \varepsilon \frac{\partial U^{(+)}}{\partial n} \quad (7)$$

Переходя к переменным (ξ, l) в параболическом операторе из (1), получим

$$\hat{L}u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + V_n \frac{\partial u}{\partial \xi} - \varepsilon \left[k \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial t} \right] + O(\varepsilon^2) \quad (8)$$

где $V_n = V_0 + \lambda_t^*$ – нормальная скорость точки на кривой $C_\lambda(t)$, $V_0 \equiv \frac{h_t}{\sqrt{1+h_t^2}}$; $k = k(l)$

– локальная кривизна; $\lambda^*(l, t, \varepsilon) = \varepsilon \cdot \lambda_1(l, t) + \varepsilon^2 \cdot \lambda_2(l, t) + \dots$ определена в (5).

Для функции $\tilde{u}(\xi) = \varphi^{(\pm)}(x, y) + Q_0^{(\pm)}(\xi, l)$ – главного члена ряда, описывающего движущийся фронт, стандартная процедура и требование (7) приводит к задаче

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} + V_0 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} = f(\tilde{u}, x, y, 0) \quad \xi \in (-\infty; +\infty)$$

$$\tilde{u}(-\infty) = \varphi^{(-)}(x, y), \quad \tilde{u}(+\infty) = \varphi^{(+)}(x, y), \quad \tilde{u}(0) = \varphi^{(0)}(x, y),$$

Полагая $V_0 = W(x, y)$ из (4), для определения кривой $C_0(t): \{x=l, y=h(l, t)\}$ получим

$$\frac{h_t}{\sqrt{1+h_x^2}} = W(x, h), \quad h(x, 0) = h^0(x), \quad h(x, t) = h(x + L, t) \quad x \in [0, L] \quad (9)$$

Задача (9) разрешима при $t \in [0, T]$ в силу Условия (A₃).

Первый член ряда (5) $\lambda_1(l, t)$ находится из линейной задачи Коши:

$$\frac{d\lambda_1(l, t)}{dt} - k(l) = B(x, y) \cdot \lambda_1(l, t) + R(l, t), \quad \lambda_1(l, 0) = 0 \quad (10)$$

где $B(x, y)$ и $R(l, t)$ – известные функции, не зависящие от $\lambda_1(l, t)$ и ее производных, $k(l)$ – локальная кривизна $C_0(t)$. Аналогичные линейные задачи определяют и следующие члены разложения $\lambda_i(l, t)$, $i = 2, 3, \dots$

3. Теорема существования.

Доказательство существования решения (1)–(3) основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств [4] с незначительными изменениями. Процедура получения верхнего и нижнего решений состоит в модификации формальной асимптотики и проверке соответствующих неравенств из стандартного определения верхнего и нижнего решений $\alpha(x, y, t, \varepsilon)$, $\beta(x, y, t, \varepsilon)$. Справедлива теорема:

Теорема. При выполнении Условий (A₁)–(A₃), достаточно гладкой начальной функции, такой, что $\alpha(x, y, 0, \varepsilon) \leq u^0(x, y, \varepsilon) \leq \beta(x, y, 0, \varepsilon)$, и достаточно малом ε существует решение $u(x, y, t, \varepsilon)$ задачи (1)–(3), причем

- 1) $\alpha(x, y, t, \varepsilon) \leq u(x, y, t, \varepsilon) \leq \beta(x, y, t, \varepsilon)$
- 2) $u(x, y, t, \varepsilon) = U_n(x, y, t, \varepsilon) + O(\varepsilon^{n+1}) \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in (0, T], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$

где $U_n(x, y, t, \varepsilon)$ – частичная сумма ряда (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов // Фунд. и прикл. мат. 1998. Т.4. № 3. С. 799-851.
2. V.T. Volkov et all. // Comp. Math. and Math. Phys. 2007. V. 47. No 8. P. 1301-1309.
3. Y. V. Bozhevolnov, N.N. Nefedov // Comp. Math. and Math. Phys. 2010. V. 50. No 2. P. 264-273.
4. N.N. Nefedov // Diff. Uravn. 1995. V. 31. No. 7. P. 1142-1149.
5. P.C. Fife, L. Hsiao // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 1998. V. 12(1), P.19–41.
6. V.T. Volkov, N.N. Nefedov // Lect. Notes in Comp. Sci. Springer Berlin 2013. V. 8236. P. 524-531

Сингулярно возмущённое дифференциально-операторное нелинейное уравнение с переменными коэффициентами в критическом случае

А.В. Заборский¹, А.В. Нестеров²

¹Обнинский институт атомной энергетики – филиал ВПО «НИЯУ «МИФИ»

²ГБОУ ВПО «Московский городской педагогический университет»

alexander.zaborskiy@mail.ru

Настоящая работа является продолжением работы [1], в которой было построено формальное асимптотическое разложение (далее ФАР) по малому параметру ε решения сингулярно возмущенного дифференциально-операторного уравнения вида

$$\varepsilon^2(U(x,t,p)_t + D(p)U(x,t,p)_x) = L_p U(x,t,p) \quad (1)$$

в критическом случае (т.е. случае наличия у линейного оператора L_p нулевого однократного собственного значения [2]) с начальным условием вида всплеска

$$U(x,0,p) = w(x/\varepsilon,p), \quad (2)$$

где $U(x,t,p)$ - искомое решение, функция $w(z,p)$ быстро убывает при $|z| \rightarrow \infty$.

ФАР решения задачи (1)-(2) в [1] построено в виде суммы функции всплеска S , пограничной функции P и остаточного члена R

$$U(x,t,p) = S(\zeta,t,p) + P(\xi,\tau,p) + R = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (s_i(\zeta,t,p) + p_i(\xi,\tau,p)) + R, \quad (3)$$

где переменные ζ, ξ, τ были описаны в [1].

В настоящей работе результаты из [1] распространяются на уравнение с коэффициентами, зависящими от пространственной переменной и малой нелинейностью в правой части. Рассмотрим сингулярно возмущённое дифференциально-операторное нелинейное уравнение с переменными коэффициентами

$$\varepsilon^2(U(x,t,p)_t + D(x,p)U(x,t,p)_x) = L_p(x)U(x,t,p) + \varepsilon^2 F(x,p,U), \quad (4)$$

где $U(x,t,p)$ - решение, $\{x,t,p\} \in H = \{|x| < \infty; 0 \leq t \leq T, T > 0; p_1 \leq p \leq p_2\}$; $0 < \varepsilon \ll 1$ - малый параметр; $D(x,p)$ - непрерывная по p и достаточно гладкая по x функция на $\{x,p\} \in \{|x| < \infty; p_1 \leq p \leq p_2\}$; $L_p(x): A_p \rightarrow A_p$ - линейный оператор, действующий в пространстве A_p непрерывных по p функций $U(x,t,p)$ со скалярным произведением (h_1, h_2) и зависящим от переменной x как от параметра, имеющий однократное нулевое собственное значение; $F(x,p,U)$ - нелинейность. К уравнению (4) поставим начальное условие (2). На начальную задачу (4), (2) наложим тот же набор необходимых условий, что и в [1], остальные условия будут налагаться по мере необходимости.

Цель данной работы – найти ФАР решения задачи (4), (2) в виде

$$U = \bar{U}(x,t,p) + S(\zeta,t,p) + P(\xi,\tau,p) + R. \quad (5)$$

В соответствии с [2] представим функцию $F(x,p,U)$ в виде

$$F(x,p,U) = SF + PF + RF, \quad (6)$$

$$SF = F(x,p,S), \quad (7)$$

$$PF = F(x, p, S + P) - F(x, p, S), \quad (8)$$

$$RF = F(x, p, U) - F(x, p, S + P). \quad (9)$$

Обозначим $h_0(x, p)$ собственную функцию оператора $L_p(x)$, соответствующую его собственному однократному нулевому значению $\lambda_0 = 0$, а $h_0^*(x, p)$ - собственную функцию сопряженного оператора $L_p^*(x)$, соответствующий собственному нулевому значению $\lambda_0^* = 0$ последнего.

Очевидно, что регулярная часть ФАР решения \bar{U} при начальном условии вида (2), принимающем вид всплеска в малой ε -окрестности точки $x = 0$, как и в работе [1], тождественно равна нулю. Но, поскольку в дальнейшем в вычислениях будут присутствовать величины, полученные при построении регулярной части, приведем её построение. Регулярная часть ФАР строится в виде разложения по степеням малого параметра [1]

$$\bar{U}(x, t, p) = U_0(x, t, p) + \varepsilon^2 U_2(x, t, p) + \dots \quad (10)$$

Подставляя разложение (10) в (4), стандартным способом (далее ст. сп.) [2] получаем цепочку уравнений для определения членов разложения

$$\varepsilon^0 : L_p U_0 = 0, \quad (11)$$

$$\varepsilon^2 : L_p U_2 = U_{0,t} + D(x, p)U_{0,x} - F(x, p, U_0), \dots \quad (12)$$

Из (11) получаем вид решения

$$U_0 = \gamma_0(x, t)h_0(x, p), \quad (13)$$

где $\gamma_0(x, t)$ - пока произвольная функция. Для разрешимости уравнения (12), определяющего U_2 , необходимо выполнение условия ортогональности правой части к вектору $h_0^*(x, p)$

$$(U_{0,t} + D(x, p)U_{0,x} - F(x, p, U_0), h_0^*) = 0, \quad (14)$$

что дает уравнение для определения функции $\gamma_0(x, t)$

$$\gamma_{0,t} + \frac{(D(x, p)h_0, h_0^*)}{(h_0, h_0^*)} \gamma_{0,x} = \frac{(F(x, p, \gamma_0 h_0), h_0^*)}{(h_0, h_0^*)}. \quad (15)$$

Введем обозначение для характеристики уравнения (15)

$$\zeta(x, t) = \frac{t - \int_0^x \frac{(h_0, h_0^*)}{(D(s, p)h_0, h_0^*)} ds}{\varepsilon} = \frac{t - B(x)}{\varepsilon}, \quad (16)$$

$$B(x) = \int_0^x \frac{(h_0, h_0^*)}{(D(s, p)h_0, h_0^*)} ds. \quad (17)$$

Переменная $\zeta(x, t)$ из (16) потребуется ниже для описания функции S , растянутые переменные $\xi = x/\varepsilon$, $\tau = t/\varepsilon^2$ требуются для описания функции P .

Функция всплеска ищется в виде

$$S(\zeta, t, p) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i s_i(\zeta, t, p). \quad (18)$$

Подставив функцию $S(\zeta, t, p)$ и представление (6) в (4) и перейдя от переменных (x, t, p) к переменным (ζ, t, p) , получаем уравнение

$$L_p S = \varepsilon \Psi S_{\zeta} + \varepsilon^2 S_t - \varepsilon^2 S F, \quad (19)$$

$$\Psi(x, p) = 1 - D(x, p) \frac{(h_0, h_0^*)}{(D(x, p) h_0, h_0^*)}. \quad (20)$$

Потребуем, чтобы оператор $L_p(x)$, его собственные числа $\lambda(x)$ и векторы $h(x, p)$ зависели от параметра x достаточно гладким образом, в частности, для $L_p(x)$ справедливо разложение

$$L_p(x + \mu) = L_p(x) + \sum_{i=1}^N \mu^i l_i(x) + O(\mu^{N+1}), \quad (21)$$

где l_i - линейные равномерно по x ограниченные операторы, а оценка остаточного члена равномерная по x .

Подставив (18) и остальные члены уравнения в (19), ст. сп. получаем систему уравнений для определения s_i

$$\varepsilon^0 : L_0 s_0 = 0, \quad (22)$$

$$\varepsilon^1 : L_0 s_1 = \Psi_0 s_{0,\zeta} - L_1 s_0, \quad (23)$$

$$\varepsilon^i (i > 1) : L_0 s_i = \sum_{k=0}^{i-1} \Psi_k s_{i-k-1,\zeta} + s_{i-2,t} - S F_{i-2} - \sum_{k=1}^i L_k s_{i-k}. \quad (24)$$

Решения уравнений (22) -(24) имеют виды

$$s_0 = \varphi_0 h_0, \quad (25)$$

$$s_1 = \varphi_1 h_0 + G(\Psi_0 \varphi_{0,\zeta} h_0 - L_1 \varphi_0 h_0), \quad (26)$$

$$s_i = \varphi_i h_{00} + G\left(\sum_{k=0}^{i-1} \Psi_k s_{i-k-1,\zeta} + s_{i-2,t} - S F_{i-2} - \sum_{k=1}^i L_k s_{i-k}\right), \quad (27)$$

где $\varphi_i = \varphi_i(\zeta, t)$ - пока неизвестные функции, а G - псевдообратный к L_p оператор.

Записывая условие разрешимости для s_2 , исключая из него s_1 , получаем уравнение для φ_0

$$h \varphi_{0,t} + g \varphi_{0,\zeta\zeta} + A \varphi_{0,\zeta} + B \varphi_0 - (S F_0, h_{00}^*) = 0, \quad (28)$$

где h, g, A, B - известные функции от переменной t .

Уравнения для последующих φ_i имеют вид

$$h \varphi_{i,t} + g \varphi_{i,\zeta\zeta} + A \varphi_{i,\zeta} + \varphi_i \left(B - \left(\frac{\partial F}{\partial S} (B^{-1}(t), p, \varphi_0 h_{00}) h_{00}, h_{00}^* \right) \right) + \Phi_i = 0, \quad (29)$$

где Φ_i - известные функции, зависящие от φ_k с номерами $k < i$.

Начальные условия для определения (28)-(29) и погранфункция $P(\xi, \tau, p) = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i p_i(\xi, \tau, p)$ строятся по аналогии с [1].

Отметим, что добавление нелинейности и переменных коэффициентов значительно усложняет алгоритм построения главного члена асимптотики, и уравнение (28) для определения φ_0 становится нелинейным в отличие от [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. А.В. Заборский, А.В. Нестеров // Математическое моделирование. 2014. Т.26. №4. С.65-79.
2. А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов «Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях» М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1978.

Об асимптотике решений в дальней зоне одного класса гиперболических систем

А. В. Нестеров

¹Московский городской педагогический университет, НИЯУ МИФИ ИАТЭ (Обнинск)

andrenerov1@yandex.ru

Постановка задачи

Поставим задачу об определении поведения в дальней зоне ($x_1, x_2 \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$) решения задачи Коши для гиперболической системы уравнений с двумя пространственными переменными и малой нелинейностью:

$$(U_t + D_1 U_{x_1} + D_2 U_{x_2}) = AU + \varepsilon^2 F(U), \quad (1)$$

$$U(x_1, x_2, 0) = U^0(x_1, x_2) \quad (2)$$

где $(x_1, x_2, t) \in \Omega = \{0 < t < \infty, |x_i| < \infty, i = 1, 2\}$, $U(x_1, x_2, t) = \{u_i(x_1, x_2, t)\}$, $(i = \overline{1, n})$, $0 < \varepsilon \ll 1$.

Матрицы $D_k = \text{diag} \|d_{ii}^k\|$, $k = 1, 2$ – диагональные, среди элементов матриц есть хотя бы два не равных, матрица $A = \|a_{ij}\|$ – вырожденная ($\text{rang } A = n - 1$), начальные условия имеют вид всплеска, сосредоточенного в ε -окрестности начала координат.

Вместо изучения свойств решения задачи (1)-(2) при $x_1, x_2 \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$, перейдем к новым переменным $\tilde{x}_i = x_i \varepsilon^2, i = 1, 2, \tilde{t} = t \varepsilon^2$, опуская в дальнейшем знак \sim . При $x, t \sim \varepsilon^{-2}$ $\tilde{x}, \tilde{t} \sim 1$. В новых переменных задача принимает вид сингулярно возмущенной:

$$\varepsilon^2 (U_t + D_1 U_{x_1} + D_2 U_{x_2}) = AU + \varepsilon^2 F(U), \quad (3)$$

$$U(x_1, x_2, 0) = U^0(x_1, x_2, \varepsilon). \quad (4)$$

Ниже h_1, h_1^* – собственные векторы A и A^T , соответствующие $\lambda_1 = 0$.

Для построения асимптотического разложения (АР) задачи (3) - (4) налагается ряд условий, в частности:

1. Собственные значения λ матрицы A , отличные от нуля, удовлетворяют условию $\text{Re} \lambda < 0$ и однократны (им отвечают собственные векторы h_i).
2. $U^0(x_1, x_2, \varepsilon) = \omega(x_1 / \varepsilon, x_2 / \varepsilon) H$, где H – некоторый вектор и ω удовлетворяет оценке: $|\omega(z_1, z_2)| \leq C e^{-\sigma(z_1^2 + z_2^2)} \quad \forall |z_1| < \infty, |z_2| < \infty, \sigma > 0$, вместе со всеми своими производными до порядка $N + 1$.

Алгоритм построения АР

Алгоритм построения АР подробно описан в работе [1].

Регулярная часть AP решения при таких начальных условиях тождественно равна нулю. В соответствие с этим AP решения задачи (3) - (4) строится в виде

$$U(x_1, x_2, t, \varepsilon) = S_N(\zeta, \eta, t) + P_N(\xi, \nu, \tau) + RU = \sum_{i=0}^N \varepsilon^i (s_i(\zeta, \eta, t) + p_i(\xi, \nu, \tau)) + R = U_N + RU$$

где U_N – AP решения, R – остаточный член.

Представим функцию $F(U)$ в виде [2] $F(U) = SF + PF + RF$,
где $SF = F(S)$, $PF = F(S + P) - F(S)$, $RF = F(S + P + R) - F(S + P)$.

Построение функции всплеска

Функция всплеска $S(\zeta, \eta, t)$, где $\zeta = (x_1 - V_1 t) / \varepsilon$, $\eta = (x_2 - V_2 t) / \varepsilon$, $V_i = (D_i h_1, h_1^*)$, удовлетворяет уравнению

$$\varepsilon^2 (S_t + D_1 S_{x_1} + D_2 S_{x_2}) - AS = \varepsilon^2 SF,$$

которое в новых переменных (ζ, η, t) принимает вид:

$$\varepsilon^2 S_t + \varepsilon (D_1 \varepsilon^2 S_t + \varepsilon \Psi_1 S_\zeta + \varepsilon \Psi_2 S_\eta) - AS = \varepsilon^2 SF,$$

где $\Psi_i = D_i - V_i E$, E – единичная матрица.

Функция $S(\zeta, \eta, t)$ строится в виде:

$$S(\zeta, \eta, t) = \sum_{i=0}^{N+2} \varepsilon^i s_i(\zeta, \eta, t).$$

SF разлагается в ряд по степеням малого параметра

$$SF = F(S) = F\left(\sum_{i=0}^{N+2} \varepsilon^i s_i(\zeta, \eta, t)\right) = \sum_{i=0}^{N+2} \varepsilon^i S_i F + R_{N+2} S.$$

Ст. сп. [2] получаем выражение для вектор-функции $s_0 = \varphi_0(\zeta, \eta, t) h_1$,

где φ_0 есть решение уравнения:

$$\varphi_{0_t} + M_1 \varphi_{0_{\zeta\zeta}} + M_2 \varphi_{0_{\eta\eta}} + M_3 \varphi_{0_{\eta\zeta}} = S_0 F_{ef}, \quad (5)$$

$$M_i = (\Psi_i G \Psi_i h_1, h_1^*); i = 1, 3, M_2 = ((\Psi_1 G \Psi_2 + \Psi_2 G \Psi_1) h_1, h_1^*); S_0 F_{ef} = (S_0 F, h_1^*).$$

Здесь матрица G – псевдообратная к матрице A (если выполнено условие $(F, h_1^*) = 0$, то решение системы уравнений $AY = F$ записывается в виде $Y = GF + Ch_1$, где C – произвольная постоянная).

Уравнения для следующих приближений $\varphi_n, n \geq 1$ имеют вид

$$\varphi_{n_t} + M_1 \varphi_{n_{\zeta\zeta}} + M_2 \varphi_{n_{\eta\eta}} + M_3 \varphi_{n_{\eta\zeta}} = \left(\partial F / \partial U(\varphi_0 h_1) h_1, h_1^* \right) \varphi_n + \Phi_{ef_n},$$

где Φ_{ef_n} линейно выражается через $s_i, 0 \leq i \leq n-1$ и их производные.

Потребуем, чтобы форма $M_1 \zeta^2 + M_2 \zeta \eta + M_3 \eta^2$ была бы отрицательно строго или полу определена.

Построение пограничных P-функций.

Вообще говоря, функция S_N не может удовлетворить поставленным начальным условиям: $S_N(\zeta, \eta, 0) = \omega(x_1 \varepsilon, x_2 \varepsilon) H$.

Для выполнения начальных условий строится пограничная вектор-функция $P(\xi, \nu, \tau)$ [2], зависящая от растянутых переменных $\xi = x_1 \varepsilon, \nu = x_2 \varepsilon, \tau = t \varepsilon^2$. Она должна совместно с функцией S удовлетворять начальным условиям, системе уравнений:

$$\varepsilon^2 (P_t + D_1 P_{x_1} + D_2 P_{x_2}) - AP = \varepsilon^2 PF \text{ и условию } \lim_{\tau \rightarrow \infty} P = 0.$$

Погранфункция $P(\xi, \nu, \tau)$ строится в виде:

$$P(\xi, \nu, \tau) = \sum_{i=0}^{N+2} \varepsilon^i p_i(\xi, \nu, \tau)$$

Все p_i строятся стандартно [2], в частности, p_0 имеет вид:

$$p_0(\xi, \nu, \tau) = \sum_{i=2}^n C_{0_i}(\xi, \nu) h_i e^{\lambda_i \tau},$$

где суммирование ведется по номерам, отвечающим ненулевым собственным значениям матрицы A .

Начальные условия для φ_0, p_0 определяются из равенства

$$\varphi_0(\zeta, \eta, 0) h_1 + \sum_{i=2}^n h_i C_{0_i}(\xi, \nu) = \omega(\xi, \nu) H.$$

Остальные $p_i(\xi, \nu, \tau)$, и начальные условия для φ_i, p_i определяются стандартно [2].

Все $\varphi_i(\zeta, \eta, t), p_i(\xi, \nu, \tau)$ существуют, единственны и имеют оценки [1]:

$$\|p_i(\xi, \nu, \tau)\| < C e^{-\kappa \tau}, |\partial^{k+j+r} \varphi_n(\zeta', \eta', t) \partial t^k \partial \zeta'^j \partial \eta'^r| < C e^{-\kappa(\zeta'^2 + \eta'^2)}, k + j + r \geq 0.$$

где $C > 0, \kappa > 0$ – постоянные.

Оценка остаточного члена

Доказательство оценки остаточного члена приведено в [1].

Построим $N+3$ члена разложения и представим решение задачи (3) - (4) в виде:

$$U(x_1, x_2, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{N+3} \varepsilon^i (s_i(\zeta, \eta, t) + p_i(\xi, \nu, \tau)) + R = U_{N+3} + R,$$

где U_{N+3} – построенная асимптотика, R – остаточный член.

При наложении дополнительных условий [1] справедлива

Теорема (об оценке остаточного члена R).

Существуют такие константы $\varepsilon_0 > 0$ и $T > 0, C \geq 0$, не зависящие от ε , что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0, |x_1| < \infty, |x_2| < \infty, 0 < t \leq T$ справедлива оценка $\|R\| \leq C \varepsilon^{N+1}$.

Заключение

Очевидно, что при $t = O(1)$ имеет место равенство $U = \varphi_0(\zeta, \eta, t) h_1 + O(\varepsilon)$, и поведение решения в дальней зоне определяется функцией $\varphi_0(\zeta, \eta, t)$, которая есть решение параболического уравнения $\varphi_{0_t} + M_1 \varphi_{0_{\zeta\zeta}} + M_2 \varphi_{0_{\eta\eta}} + M_3 \varphi_{0_{\eta\eta}} = S_0 F_{ef}$. Более детальный анализ квадратичной формы $M_1 \zeta^2 + M_2 \zeta \eta + M_3 \eta^2$, отвечающей пространственной части уравнения, показывает, что её знакоопределенность зависит от числа уравнений в системе (1). При числе уравнений, равном 2, эта форма всегда полузнакоопределена. Введем обозначения $\bar{V}^i = (D_1^i, D_2^i), \Delta V = \bar{V}^1 - \bar{V}^2, V_{\varphi\phi} = (V_1, V_2)$. Главная ось, отвечающая значению $\Lambda_1 < 0$, параллельна вектору $\Delta V = \bar{V}^1 - \bar{V}^2$, отвечающая значению $\Lambda_2 = 0$ - ортогональна.

Эволюция решения в дальней зоне с течением времени t в системе координат (x_1, x_2) в этом случае может быть иллюстрирована на рис. 1.

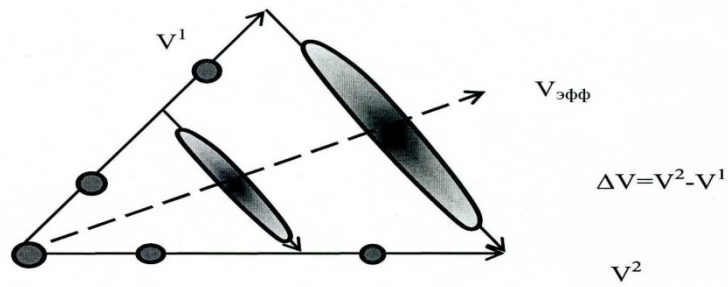


Рис. 1. Перенос в дальней зоне при $n=2$.

Кружками изображена эволюция решения при отсутствии взаимодействия, или, что то же, $A=0$, овалами – эволюция главного члена АР решения при $A \neq 0$. При $A=0$ начальные значения каждой компоненты переносятся вдоль векторов \bar{V}^1, \bar{V}^2 соответственно; при $A \neq 0$ после завершения процессов, описываемых функцией P , происходит перенос вдоль направления вектора $V_{эфф} = (V_1, V_2)$ с «псевдодиффузионным» размытием вдоль вектора $\Delta V = \bar{V}^1 - \bar{V}^2$. При числе уравнений $n > 2$ квадратичная форма строго отрицательно определена и «псевдодиффузионное» размытие происходит вдоль обеих главных осей. Этот случай иллюстрируется на рис. 2.

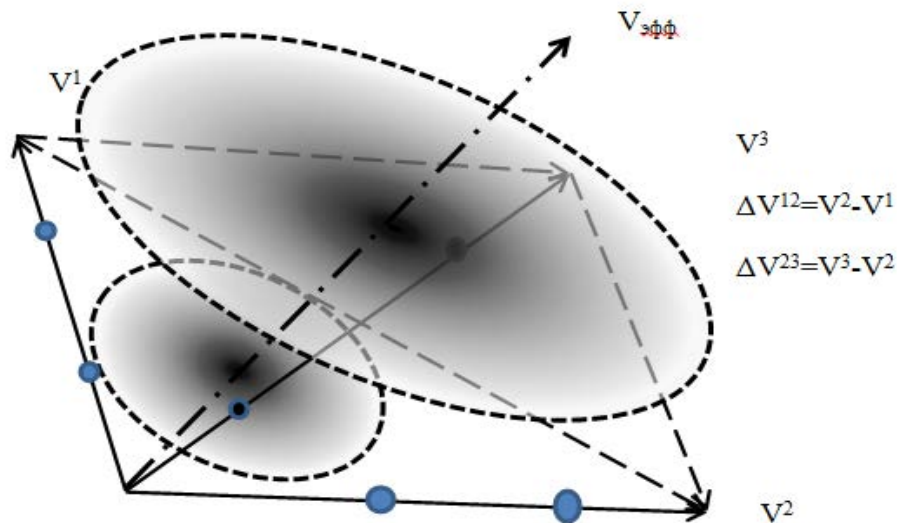


Рис. 2. Перенос в дальней зоне при $n>2$.

Для системы уравнений (3)-(4) с тремя пространственными переменными:

$$\varepsilon^2 (U_t + D_1 U_{x_1} + D_2 U_{x_2} + D_3 U_{x_3}) = AU + \varepsilon^2 F(U)$$

$$U(x_1, x_2, x_3, 0) = U^0(x_1, x_2, x_3)$$

АР решения задачи (33) - (34) имеет вид, аналогичный (25), но с добавлением третьей пространственной координаты. В частности, соответствующая функция φ_0 будет описываться уравнением

$$\varphi_0 + M_{11}\varphi_{0_{\zeta\zeta}} + M_{22}\varphi_{0_{\eta\eta}} + M_{33}\varphi_{0_{\theta\theta}} + M_{12}\varphi_{0_{\zeta\eta}} + M_{13}\varphi_{0_{\zeta\theta}} + M_{23}\varphi_{0_{\eta\theta}} = (F(\varphi_0 h_1) h_1, h_1^*), \quad (6)$$

где M_{ij} выражаются через данные задачи.

Прямым расчетом можно показать, что в случае системы двух уравнений квадратичная форма, отвечающая пространственной части уравнения (6), имеет два нулевых и одно отрицательное собственное значение: $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 = 0, \Lambda_3 = 0$, в случае системы трех уравнений - $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 = 0$, в случае системы 4-х и большего числа уравнений $\Lambda_1 < 0, \Lambda_2 < 0, \Lambda_3 < 0$. В первом случае «псевдодиффузия» происходит вдоль вектора $\Delta V^{12} = \bar{V}^1 - \bar{V}^2$, во втором – в плоскости векторов $\Delta V^{12} = \bar{V}^1 - \bar{V}^2, \Delta V^{23} = \bar{V}^2 - \bar{V}^3$, в третьем – по всем трем направлениям.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. В. Нестеров, Т. В. Павлюк. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной гиперболической системы уравнений с несколькими пространственными переменными в критическом случае // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014, Т. 54, 3, С. 450-462.
2. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во МГУ, 1978, 262 с.

Вольт - амперная характеристика квантового провода

И.А. Обухов

НПП «Системные ресурсы»

i_obukhov@systemres.ru

Квантовым проводом (QW) называется объект [1,2], состоящий из проводящего канала и двух контактов к нему: эмиттерного и коллекторного, как показано на рис. 1. Проводящим каналом является одномерный проводник. Роль проводящего канала может выполнять, например, полупроводниковая структура с поперечными размерами, меньшими длины размерного квантования при соответствующей температуре. Если носители заряда – электроны, то в качестве контактных областей может использоваться металл или высоколегированный полупроводник n-типа.

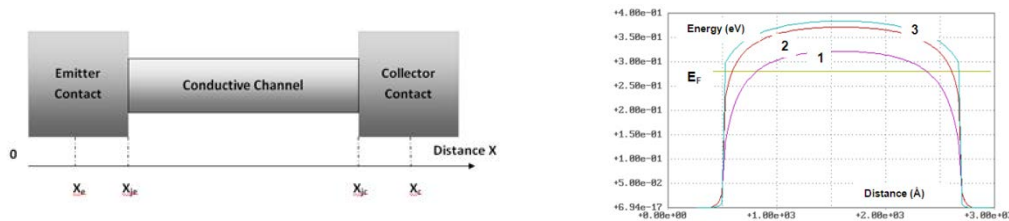


Рис. 1. Квантовый провод и потенциальные рельефы для электронов в нем при нулевом приложенном напряжении и различных $L_{\perp}=L_y=L_z$: 1 – $L_{\perp}=L_{dq}/2$; 2 – $L_{\perp}=L_{dq}/3$; 3 – $L_{\perp}=L_{dq}/4$.

L_{dq} – длина размерного квантования, E_F – энергия Ферми.

На рис. 1 также показаны потенциальные рельефы для электронов в квантовых проводах с разными поперечными размерами при нулевом приложенном напряжении. Видно, что проводящий канал представляет собой потенциальный барьер для

электронов, расположенный между контактами. При уменьшении поперечных размеров проводящего канала высота этого барьера возрастает.

Для описания переноса заряда в такой структуре можно использовать двухкомпонентную модель [2], в которой электроны разделены на две группы: с – электроны и s – электроны. Энергия с–электронов больше, чем высота потенциального барьера, образуемого проводящим каналом между контактами, а энергия s–электронов – меньше этой высоты.

Уравнения баланса для с и s-электронов в стационарном случае имеют вид

$$\begin{cases} (\Theta/e)\partial(\sigma_c(x)\partial F_c(x)/\partial x)/\partial x = -\tau_0^{-1}(F_c(x) - F_s(x))(n_c(x) + n_s(x)), \\ (\Theta/e)\partial(\sigma_s(x)\partial F_s(x)/\partial x)/\partial x = \tau_0^{-1}(F_c(x) - F_s(x))(n_c(x) + n_s(x)). \end{cases} \quad (1)$$

Здесь $\Theta = kT$; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; e – заряд электрона; $\sigma_{c,s}$ – проводимости с и s-электронов; $\tau_0 = \hbar/\Theta$ – характерное время релаксации химических потенциалов с и s-электронов F_c и F_s к состоянию локального химического равновесия, определяемого их равенством друг другу

$$F_c = F_s, \quad (2)$$

\hbar – постоянная Планка; $n_{c,s}$ – концентрации с и s-электронов. Как показано в [2], для вычисления $\sigma_{c,s}$ и $n_{c,s}$ уравнения (1) необходимо решать самосогласованно с соответствующими уравнениями Шредингера и Пуассона. Для уравнений (1) справедливы граничные условия

$$F_{c,s}(x_e) = 0, F_{c,s}(x_c) = -eV, \quad (3)$$

где V приложенное к QW напряжение. Точки $x_{e,c}$ должны выбираться достаточно далеко от точек переходов между проводящим каналом и контактами $x_{je,jc}$.

Удобно ввести величины

$$F_{\pm} = F_c \pm F_s, \quad (4)$$

и переписать уравнения (1) и условия (3) в виде

$$\begin{cases} \partial(\sigma_+ \partial F_+ / \partial x + \sigma_- \partial F_- / \partial x) / \partial x = 0, \\ \partial((\sigma_c \sigma_s / \sigma_+) \partial F_- / \partial x) / \partial x = (e/\hbar) F_- n + (I_0/2) \partial(\sigma_- / \sigma_+) / \partial x, \end{cases} \quad (5)$$

$$F_-(x_e) = F_-(x_c) = 0, F_+(x_e) = 0, F_+(x_c) = -2eV_c. \quad (6)$$

Здесь обозначено $\sigma_{\pm} = \sigma_c \pm \sigma_s$, $n = n_c + n_s$, $I_0 = -(\sigma_+ \partial F_+ / \partial x + \sigma_- \partial F_- / \partial x) = \text{const}$. Величина I_0 – это плотность тока через прибор, которая постоянна в одномерном стационарном случае.

Функция F_- характеризует уровень химической неравновесности с и s-электронов. Согласно (5) характерная длина релаксации к состоянию равновесия (2) дается выражением

$$L_{\text{rel}} = (\hbar \sigma_c \sigma_s / e n \sigma_+)^{1/2}. \quad (7)$$

Эта величина очень мала (0,1 нм – 1 нм) в контактных областях, где $n_s \gg n_c$, и может составлять десятки и даже сотни нанометров в проводящем канале QW, где релаксация незначительна. Для того, чтобы граничные условия (3) и (6) имели физический смысл, должны выполняться неравенства

$$L_e = x_{je} - x_e \gg L_{\text{rel}}(x_{je}), L_c = x_c - x_{jc} \gg L_{\text{rel}}(x_{jc}). \quad (8)$$

В тоже время длина проводящего канала $L_{\text{ch}} = x_{jc} - x_{je}$ может находиться в любом соотношении с L_{rel} . Таким образом, второе из уравнений (5) является сингулярно возмущенным [3] в контактных областях.

Из первого уравнения системы (5) найдем

$$F_+(x) = -2I_0 \int dx / \sigma_+(x) - \int dx (\sigma_-(x) / \sigma_+(x)) (\partial F_-(x) / \partial x). \quad (9)$$

$$x_e \quad x_e$$

Откуда с учетом (6) получим

$$V = I_0 r_{ohm} + (2e)^{-1} \int_{x_e}^{x_c} dx (\sigma_-(x)/\sigma_+(x)) (\partial F_-(x)/\partial x), \quad (10)$$

где

$$r_{ohm} = \int_{x_e}^{x_c} dx / e \sigma_+(x) \quad (11)$$

- омическое сопротивление квантового провода.

Положим, что переходы контакт – проводящий канал достаточно резкие и справедливы приближенные соотношения

$$\sigma_-/\sigma_+ = -1 \text{ при } x \in [x_e, x_{je}] \cup (x_{jc}, x_c], \quad \sigma_-/\sigma_+ = 1 \text{ при } x \in (x_{je}, x_{jc}),$$

$$\partial(\sigma_-/\sigma_+)/\partial x = 2(\delta(x - x_{je}) - \delta(x - x_{jc})). \quad (12)$$

Тогда из (10) найдем

$$V = I_0 r_{ohm} - e^{-1} F_-(x_{je}) + e^{-1} F_-(x_{jc}). \quad (13)$$

Предположим, что всюду в QW выполнено условие гладкости

$$\sigma_{c,s}/(\partial\sigma_{c,s}/\partial x) \gg L_{rel}, \quad (14)$$

тогда приближенное решение второго из уравнений (5) можно представить в виде [4]

$$F_-(x) \approx -I_0 (\hbar/e) G(x), \quad (15)$$

$$G(x) = \int_{x_e}^{x_c} dx' G(x, x') (\alpha^2(x')/n(x')) (\partial(\sigma_-(x')/\sigma_+(x'))/\partial x'). \quad (16)$$

Для функции Грина $G(x, x')$ справедливо выражение

$$G(x, x') = g(x, x') / 4\alpha(x') \Delta, \quad (17)$$

$$g(x, x') = \begin{cases} \exp\{-\alpha(x, x')\} (1 - \exp\{-2\alpha(x_e, x)\}) (1 - \exp\{-2\alpha(x', x_c)\}), & x_e \leq x \leq x' \leq x_c, \\ \exp\{-\alpha(x', x)\} (1 - \exp\{-2\alpha(x_e, x')\}) (1 - \exp\{-2\alpha(x, x_c)\}), & x_e \leq x' \leq x \leq x_c. \end{cases} \quad (18)$$

$$\alpha(x, x') = \int_x^{x'} \alpha(\xi) d\xi, \quad \alpha(x) = \alpha_{rel}(x) = L_{rel}^{-1}(x), \quad \Delta = (1 - \exp\{-2\alpha(x_e, x_c)\}). \quad (19)$$

Соотношение (15) позволяет представить ВАХ QW в виде

$$V = I_0 (r_{ohm} + r_{je} + r_{jc}), \quad (20)$$

где для сопротивлений переходов между проводящим каналом и контактами справедливы выражения

$$\Gamma_{j_e,j_c} = \pm r_0 G(x_{j_e,j_c}), \quad (21)$$

где $r_0 = \hbar/e^2$ - так называемое фундаментальное сопротивление (примерно 4,1 кОм).

Формулы (15) и (21) свидетельствуют о том, что сопротивления переходов обусловлены неравновесными квантовыми эффектами. Если проводящий канал квантового провода достаточно длинный, и кроме условий (8) справедливо неравенство $L_{ch} \gg L_{rel}$ получим простые формулы

$$\Gamma_{j_e,j_c} = (\hbar/e^2)/2n(x_{j_e,j_c})L_{rel}(x_{j_e,j_c}) = r_0/2n(x_{j_e,j_c})L_{rel}(x_{j_e,j_c}).$$

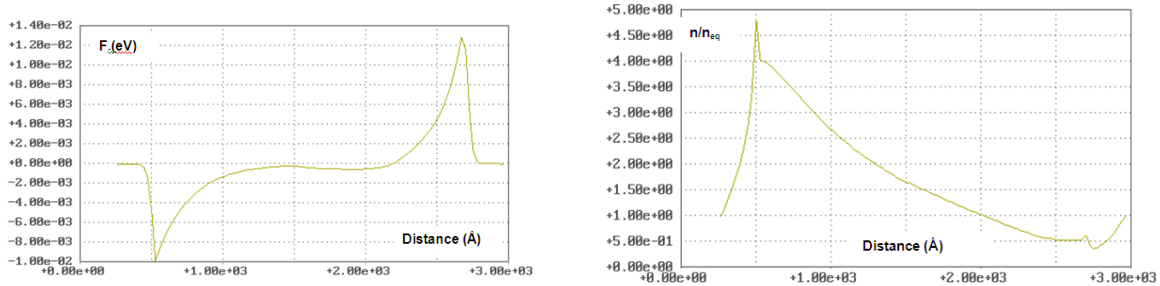


Рис. 2. Функция $F(x)$ и распределение электронов ($n_{neq} = n(V = 0)$) в квантовом проводе с

$$L_{\perp} = L_{dq}/4 \text{ при } V = 0,38 \text{ В.}$$

На рис. 2 показана функция F в QW при напряжении 0,38 В. Хорошо видны пограничные слои со стороны контактов в областях переходов контакт – проводящий канал. В самом канале F изменяется достаточно плавно. Легко показать, что

$$\Gamma_{ohm}/\Gamma_{j_e,j_c} \sim (L_{ch}/L_{rel})(n(x_{j_e,j_c})/n_c).$$

Это означает, что вклад переходов в падение напряжения на QW будет существенным, только для очень коротких проводов. Однако влияние переходов не сводится только к вкладу в Γ_{j_e,j_c} . Неравновесность электронов в области эмиттерного перехода приводит к их инжекции из эмиттерного контакта в проводящий канал, что в несколько раз увеличивает концентрацию электронов в канале (см. рис. 2) и его омическую проводимость. Этот важный вывод подтвержден экспериментально [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. И.И. Абрамов // Нано и микросистемная техника. 2009. № 8. С. 7.
2. I.A. Obukhov “Nonequilibrium Effects in One-Dimensional Quantum Devices”. LAMBERT Academic Publishing. 2014.
3. А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов «Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений». М.: «Наука». 1973.
4. В.П. Маслов В.П. «Операторные методы». М.: «Наука». – 1973.
5. R. Martel et al. // Appl. Phys. Lett. 1998. V. 73. No17, P. 2447.

Нестационарные контрастные структуры с разрывной плотностью источников

А.А. Быков, А.С. Шарло

¹ МГУ им.М.В.Ломоносова, физической факультет, abkov@yandex.ru

Мы рассматриваем начально-краевую задачу для так называемого обобщенного уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова, которое относится по общепринятой классификации к классу уравнений псевдо параболического типа:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t - \varepsilon^4 \mu u_{xxt} = \varepsilon^2 u_{xx} - f(u, x, \varepsilon), \\ u(a, x, \varepsilon) = u_a(t), \quad u(b, x, \varepsilon) = u_b(t), \quad u(x, 0, \varepsilon) = \varphi(x, \varepsilon), \end{cases} \quad (1)$$

$x \in (a, b)$, $t \in [0, T]$, $u(x, t, \varepsilon) \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $\Omega = [a, b] \times [0, T]$, $\varepsilon > 0$.

Мы предполагаем, что функция плотности источников $f(u, x, \varepsilon)$ имеет вид

$$f(u, x, \varepsilon) = f_0(u, x) + \varepsilon f_1(u, x). \quad (2)$$

Предполагаем, что уравнение $f_0(u, x) = 0$ имеет три корня $u = \varphi^{(-)}(x)$, $u = \varphi^{(0)}(x)$, $u = \varphi^{(+)}(x)$, причем $f_{0u}(\varphi^{(\pm)}(x), x) > 0$, $f_{0u}(\varphi^{(0)}(x), x) < 0$. В качестве примера рассматриваем многочлен третьей степени с тремя корнями, $f_0(u, x) = \gamma u(u^2 - U^2(x))$. Возмущающая функция первого порядка есть разрывная функция

$$f_1(u, x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < \hat{x}, \\ -2\gamma U(x)\delta U, & \text{если } x \geq \hat{x}, \end{cases}$$

где δU заданная константа. Таким образом, $f(u, x, \varepsilon)$ есть разрывная функция переменной x при всех u .

Построим формальную асимптотику решения задачи (1). Предположим, что $f_0(0, x) = 0$, и функция $f_0(u, x)$ является Липшиц непрерывной по переменной u , то есть $|f_0(u_1, x) - f_0(u_2, x)| \leq C|u_1 - u_2|$, $C > 0$ константа (единая для всех значений x).

Пусть $x^*(t)$ есть единственный корень уравнения $u(x^*(t), t) = \varphi^{(0)}(x(t))$. Решение уравнения (1) найдем сшиванием в точке $x^*(t)$ решений краевых задач

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t - \varepsilon^4 \mu u_{xxt} = \varepsilon^2 k u_{xx} - f(u, x, \varepsilon), & x < x^* \\ u(a, x, \varepsilon) = u_a, \quad u(x^*, t, \varepsilon) = \varphi^{(0)}(x^*), \quad u(x, 0, \varepsilon) = \psi(x, \varepsilon), \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \varepsilon^2 u_t - \varepsilon^4 \mu u_{xxt} = \varepsilon^2 k u_{xx} - f(u, x, \varepsilon), & x > x^* \\ u(b, x, \varepsilon) = u_b, \quad u(x^*, t, \varepsilon) = \varphi^{(0)}(x^*), \quad u(x, 0, \varepsilon) = \psi(x, \varepsilon), \end{cases} \quad (4)$$

Формальную асимптотику ищем в виде

$$U^{(-)}(x, t, \varepsilon) = \bar{u}^{(-)}(x, \varepsilon) + Q^{(-)}(\xi, t, \varepsilon) + \Pi_a(\zeta_a, \varepsilon), \quad x < x^*, \quad (5)$$

$$U^{(+)}(x, t, \varepsilon) = \bar{u}^{(+)}(x, \varepsilon) + Q^{(+)}(\xi, t, \varepsilon) + \Pi_b(\zeta_b, \varepsilon), \quad x > x^*, \quad (6)$$

где $\bar{u}^{(\pm)}(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k \bar{u}_k^{(\pm)}(x)$, $Q^{(\pm)}(\xi, t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k Q_k^{(\pm)}(\xi, t)$, $\xi = \varepsilon^{-1}(x - x^*(t, \varepsilon))$.

Формулы для пограничных слоев не приводим, так как они не отличаются от полученных в [1]. Мы раскладываем также координату точки перехода

$x^{(*)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k x_k(t)$. Асимптотические представления (5) и (6) сшиваются в точке

$x^*(t)$, требуем непрерывности и непрерывной дифференцируемости. Так же как в [2] представляем плотность источников в виде суммы четырех компонент, регулярной,

переходного слоя и двух погранслойных. Для функции переходного слоя получаем два уравнения вида

$$\left(\varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t} - \varepsilon \frac{dx^*}{dt} \frac{\partial}{\partial \xi} - \varepsilon^2 \mu \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{dx^*}{dt} \frac{\partial^3}{\partial \xi^3} - k \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) Q(\xi, t, \varepsilon) = -Qf, \quad (7)$$

Слева и справа от точки перехода. Накладываем также условия сопряжения и получаем две задачи Коши с условиями убывания на бесконечности. Наличие точки разрыва функции $f(u, x, \varepsilon)$ учитывается при решении задачи (7). Фактически, решаются три краевых задачи, две из которых имеют один бесконечный предел интегрирования и условия убывания на бесконечности, а третья ставится на промежутке между точкой перехода и точкой разрыва. В точке разрыва накладываем условие гладкого сшивания решения слева и справа от точки разрыва. Далее мы последовательно получаем асимптотические приближения. В нулевом приближении получаем обычное выражение

$$\frac{dQ_0^{(\pm)}}{d\xi} = \sqrt{\frac{2}{k}} \left(\int_{\varphi^{(\pm)}(x^*)}^{\varphi^{(\pm)}(x^*) + Q_0^{(\pm)}} f(u, x^*, 0) du \right)^{1/2} \quad (8)$$

В первом приближении находим $W_0 = dx^*(t)/dt$ из условий сшивания, причем

$$W_0 = \frac{-k\Phi(0)[\varphi_x^{(\pm)}(x)]_{x^*} + k\Phi(0)\mathcal{H}[\mathcal{K}_1^{(\pm)}]}{\int_{-\infty}^{+\infty} (Q_{0\xi}^{(\pm)})^2 d\xi + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} (Q_{0\xi\xi}^{(\pm)})^2 d\xi}, \quad (9)$$

где $\Phi^{(\pm)}(\xi) = Q_{0\xi}^{(\pm)}$, $\mathcal{H}[\mathcal{K}_1^{(\pm)}]$ есть оператор, действующий на функцию правой части задачи (1), явное выражение которого мы не приводим.

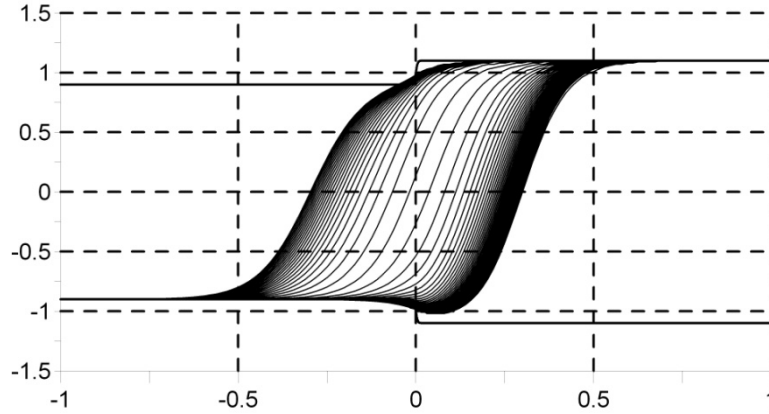


Рис. 1. Серия мгновенных снимков $u(x, t_k)$ для разрывной компоненты плотности источников 0,1.

Приведем результат вычисления скорости дрейфа нулевого порядка для случая кубической плотности источников, $f_0(u, x) = \gamma(u^2 - U^2(x))$. Тогда

$$W_0 = \frac{3}{1 + \frac{4\mu}{5\theta^2}} \left[-k \frac{U_x(x^*)}{U(x^*)} + \frac{\sqrt{k\gamma}\delta U}{2\sqrt{2}} \left(\tanh^2 \left(\sqrt{\frac{\gamma}{2k}} U(\hat{\xi}) \right) - 1 \right) \right]. \quad (10)$$

Здесь $\hat{\xi} = \varepsilon^{-1}(x^* - \hat{x})$. Таким образом, скорость дрейфа есть сумма скорости регулярного градиентного дрейфа, $W_{0a} = \frac{-3k}{1 + \frac{4\mu}{5\theta^2}} \frac{U_x(x^*)}{U(x^*)}$, которая определяется градиентом плотности источников, и скорости W_{0b} , нерегулярного дрейфа вблизи точки скачка, которая зависит также от новой растянутой переменной $\hat{\xi}$ и экспоненциально убывает при

удалении точки перехода (т.е. центра фронта контрастной структуры) от точки скачка. Мы проиллюстрируем этот эффект рис.1, который показывает процесс дрейфа фронта КС в окрестности точки разрыва при условии, что регулярная скорость дрейфа равна нулю. Мы видим, что вблизи точки скачка движение ВПС ускоряется в полном соответствии с (10). Покажем также графики скорости дрейфа КС в окрестности точки скачка, полученные методом компьютерного моделирования, рис.2. Мы видим, что при уменьшении амплитуды скачка δU отличие теоретической и экспериментальной скорости дрейфа стремится к нулю. Заметим, что сама скорость дрейфа также стремится к нулю, так как она пропорциональна δU .

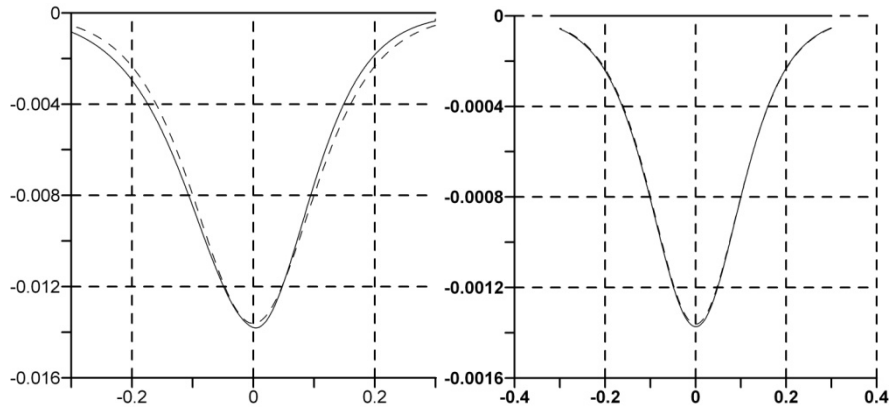


Рис. 2. Сравнение теоретической и экспериментально найденной скорости дрейфа фронта КС для двух различных амплитуд разрывной части плотности источников, 0,1 (слева) и 0,01 (справа).

Обоснование проводится с помощью метода дифференциальных неравенств.

Мы строим верхнее и нижнее решения задачи (1) стандартным [1] способом, используя частичную сумму асимптотического ряда. Нижнее и верхнее решения

$$\alpha_m(x, t, \varepsilon) = U_{m,\alpha} + \varepsilon^{m+1} (\tilde{u}_{(m+1),\alpha}(\xi_\alpha) - p + \Pi_{(m+1),\alpha}(\xi_\alpha) + \Pi_{(m+1),\beta}(\xi_\beta)), \quad (11)$$

$$\beta_m(x, t, \varepsilon) = U_{m,\beta} + \varepsilon^{m+1} (\tilde{u}_{(m+1),\beta}(\xi_\beta) + p + \Pi_{(m+1),\beta}(\xi_\alpha) + \Pi_{(m+1),\beta}(\xi_\beta)), \quad (12)$$

где $\xi_{\alpha,\beta} = \varepsilon^{-1}(x - x_{\alpha,\beta}^*(t, \varepsilon))$, $x_{\alpha,\beta}^*(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^k x_k(t) + \varepsilon^m x_{m,\alpha,\beta}(t)$,

модифицированные функции переходного слоя находим из задачи

$(k \partial^2 / \partial \xi_\gamma^2 - f_{0u}(\tilde{u}^{(\pm)}(\xi_\gamma), x^*, 0)) \tilde{u}_{j,\gamma}^{(\pm)} = q_{j,\gamma}^{(\pm)}(\xi_\gamma)$, $\tilde{u}_{j,\gamma}^{(\pm)}(0) = -p_{j,\gamma}^{(\pm)}$, $\tilde{u}_{j,\gamma}^{(\pm)}(\pm\infty) = 0$ для $j = 0, \dots, m+1$, $\gamma = \alpha, \beta$. Правые части $q_{j,\gamma}^{(\pm)}(\xi) = -W_{j-1,\gamma}(Q_{0\xi_\gamma}^{(\pm)}(\xi, t) - \mu Q_{0\xi_\gamma, \xi_\gamma, \xi_\gamma}^{(\pm)}(\xi, t)) + K_{j,\gamma}^{(\pm)}$. Выражения для

$K_{j,\gamma}^{(\pm)}$ включают производные плотности источников вне точки разрыва. Сдвигающий параметр $p_{j,\gamma}^{(\pm)} = 0$ для $j = 0, \dots, m$, $p_{m+1,\beta}^{(\pm)} = p$, $p_{m+1,\alpha}^{(\pm)} = -p$.

Для обоснования существования решения и принципа сравнения мы используем метод дифференциальных неравенств и обобщенный принцип максимума (ОПМ) для псевдопараболических уравнений [2], который обобщает результаты [3]. ОПМ позволяет установить существование точного решения. и тот факт, что точное решение заключено между верхним и нижним решениями при условии, что начальные условия заключены между таковыми. При этом приходится наложить дополнительное условие на плотность источников, которое для рассматриваемой задачи заведомо выполнено.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.В.Божевольнов, Н.Н. Нефедов. // ЖВМиМФ, 2010. V.50. N2. P.376-285.
2. А.И.Кожанов. // Матем. Заметки, 1999, V.65, вып.1, P.70-75.

3. С.В.Пав. Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations. Plenum Press, N.Y., 1992.

О непродолжаемом решении абстрактного уравнения Вольтерра

А.А. Панин

МГУ имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра математики

a-panin@yandex.ru

Основными результатами работы являются: 1) теорема о существовании и единственности непродолжаемого решения абстрактного интегрального уравнения Вольтерра, 2) теорема о существовании и единственности непродолжаемого решения абстрактной задачи Коши с ограниченно липшиц-непрерывной правой частью, 3) установление того факта, что непродолжаемое решение задачи Коши, не существующее на бесконечном промежутке, является бесконечно большим, а непродолжаемое решение уравнения Вольтерра в аналогичном случае является неограниченным, но не обязательно бесконечно большим (построен соответствующий явный пример).

Пусть B — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Пусть $L(B)$ — банахова алгебра всех ограниченных линейных операторов в пространстве B . Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра

$$u(t) = v(t) + \int_0^t K(t, \tau) A(s, u(\tau)) d\tau. \quad (1)$$

Пусть отображение $A(t, u) : [0, +\infty) \times B \rightarrow B$ удовлетворяет следующим двум условиям:

(A_1) оно непрерывно по совокупности переменных (t, u) ;

(A_2) оно ограниченно липшиц-непрерывно на B , т. е. существует такая функция

$$\mu(t, s) : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty),$$

ограниченная на каждом прямоугольнике $[0, T] \times [0, S]$, что при всех $t \geq 0$ и при всех $t \geq 0$ верно неравенство

$$\|A(t, u_1) - A(t, u_2)\| \leq \mu(t, \max(\|u_1\|, \|u_2\|)) \|u_1 - u_2\|.$$

Пусть оператор-функция $K(t, \tau)$ непрерывна по совокупности переменных в стандартной норме $L(B)$. Пусть функция $v(t)$ непрерывна на $[0, +\infty)$.

Теорема 1. Пусть для уравнения (1) выполнены сформулированные выше условия. Тогда верны следующие утверждения. 1. Уравнение (1) имеет единственное непродолжаемое решение $u(t)$. 2. Каждое другое решение является ограничением решения $u(t)$. 3. Если промежуток существования $[0, T)$ решения $u(t)$ ограничен, то при $t \rightarrow T - 0$ имеет место предельное соотношение $[0, +\infty)$

$$\limsup \|u(t)\| = +\infty. \quad (2)$$

Аналогичная теорема может быть доказана для абстрактной задачи Коши

$$\begin{cases} u'(t) = A(t, u), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (3)$$

При этом для непродолжаемого решения задачи (3) в случае конечного промежутка $[0, T)$ его существования вместо соотношения (2) получаем предельное соотношение

$$\lim \|u(t)\| = +\infty \text{ при } t \rightarrow T - 0. \quad (4)$$

Таким образом, верна

Теорема 2. Пусть для отображения $A(t, u)$, входящего в уравнение (2), выполнены сформулированные выше условия. Тогда верны следующие утверждения. 1. Уравнение (2) имеет единственное непродолжаемое решение $u(t)$. 2. Каждое другое решение является ограничением решения $u(t)$. 3. Если промежуток существования $[0, T)$ решения $u(t)$ ограничен, то при $t \rightarrow T - 0$ имеет место предельное соотношение (4).

Теоремы 1 и 2 являются обобщениями классических теорем типа теоремы Коши—Пикара (см., например, [1]) на случай абстрактных уравнений и лишь ограничено (а не глобально) липшиц-непрерывных правых частей.

Также нами построен пример, показывающий, что в теореме 1 соотношение (2) не может быть усилено до соотношения (4). Подобный вопрос был поставлен в [2] и впервые решён в [3]. Однако наш пример отличается от данного в [3] более простой конструктивной формой и принадлежностью более узкому классу уравнений. Наш пример — это уравнение Вольтерра

$$u(t) = 1 + \int_0^t K(t)(u(s))^3 ds, \quad t \in (0, T_0),$$

где $T_0 = 2/\pi$. Здесь ядро имеет вид

$$K(t, \tau) = K(t) = \begin{cases} \frac{(\cos^2(1/(T_0 - t)))/(T_0 - t)}{\int_0^t [1 + (\cos^2(1/(T_0 - s)))/(T_0 - s)]^3 ds}, & t \in (0, T_0), \\ 0, & t \in \{0\} \cup [T_0, +\infty), \end{cases}$$

отображение $A(t, u) = A(u) = u^3$, а решение уравнения есть

$$u(t) = 1 + \frac{\cos^2(1/(T_0 - t))}{T_0 - t}.$$

В литературе по интегральным уравнениям распространены ссылки на примеры значительно более сложного характера, чем пример из [3] и тем более чем наш пример.

Данные теоремы могут быть полезны при исследовании явлений разрушения решений нелинейных уравнений соболевского типа.

Работа поддержана грантом РФФИ, проект 12-01-00479-а

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Хартман “Обыкновенные дифференциальные уравнения” М.: Мир, 1970.
2. R.K Miller. “Nonlinear Volterra integral equations”. Menlo Park: W. A. Benjamin, 1971.
3. Z. Artstein // SIAM Jour. Math. Anal. 1975.V. 6. P. 446.

Апостериорная оценка погрешности для уравнения Гельмгольца с пограничным слоем

А.А. Белов¹, Н.Н. Калиткин²

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет

²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
belov_25.04.1991@mail.ru, kalitkin@imamod.ru

1. Проблема и подходы.

Задачи. Существует ряд важных прикладных задач, в которых основную роль играет малая диффузия из одной области в другую. Примерами являются насыщение поверхностного слоя стали азотом, что приводит к упрочнению; диффузия магнитного поля в сжимающую оболочку в магнитокумулятивных генераторах сверхсильных полей; поверхностный индукционный нагрев при закалке стальных деталей; поверхностное легирование полупроводников донорами и акцепторами. При этом детали могут иметь сложную форму, а глубина проникновения обычно невелика. К такому же типу задач можно отнести скалярную задачу дифракции высокочастотного электромагнитного поля на металлических поверхностях. Численный расчет таких задач труден, еще труднее получить гарантированную оценку погрешности.

Методы решения. Покажем, что современные разностные схемы позволяют решать такие задачи. Для этого ограничимся стационарной задачей индукционного нагрева проводника, которую можно описать уравнением Гельмгольца с малым параметром при старшей производной в области G с границей Γ :

$$\begin{cases} \mu^2 \Delta u - K^2(\mathbf{r})u = -f(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in G, \mu \ll 1 \\ u(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}), & \mathbf{r} \in \Gamma \end{cases} \quad (1)$$

Для решения этой задачи в прямоугольнике Н.С. Бахвалов предложил квазиравномерные сетки [1]. Для них была доказана [2] сходимость $O(N^{-2})$, где N – число узлов по одной переменной. Г.И. Шишкин предложил кусочно-равномерные сетки [3], для которых доказана [4] сходимость $O(N^{-2} \ln^4 N)$.

При этом все теоретические оценки мажорантны и могут сильно превышать фактическую погрешность. Использование этих оценок в практических расчетах заставляет завышать N , что в многомерном случае существенно увеличивает трудоемкость расчетов.

В данной работе мы предлагаем другой подход [5]. Выберем квазиравномерную сетку, адаптированную к ширине пограничного слоя. Аппроксимируем задачу (1) стандартной консервативной разностной схемой [6] (которую здесь не приводим за недостатком места). Проведем расчеты на последовательности сгущающихся сеток $N, 2N, 4N...$ начиная с небольшого N . Поточечно сравнивая решения на этих сетках и применяя метод Ричардсона, получим апостериорную асимптотически точную оценку погрешности. При этом можно остановиться на той сетке, которая обеспечивает требуемую точность. Одновременно по скорости убывания погрешности определяем порядок фактической точности. Это избавляет от необходимости строить громоздкие априорные оценки.

Пример. Проиллюстрируем этот подход на содержательном примере. В качестве области G возьмем квадрат $[-1,1] \times [-1,1]$. Положим также

$$K(\mathbf{r}) \equiv 1; f(\mathbf{r}) = \cos\left(\frac{\pi}{4}(x+y)^2\right) \cos\left(\frac{3\pi}{4}(y-x)\right); u(\mathbf{r}) = 2.5(x+y), \mathbf{r} \in \Gamma \quad (2)$$

При $\mu \ll 1$ решение имеет пограничный слой шириной $\sim \mu$, а на расстоянии нескольких μ от границы становится регулярным $u(\mathbf{r}) \approx f(\mathbf{r})$. Общий вид решения этой задачи представлен на рис. 1а в виде изолиний с фиксированным шагом.

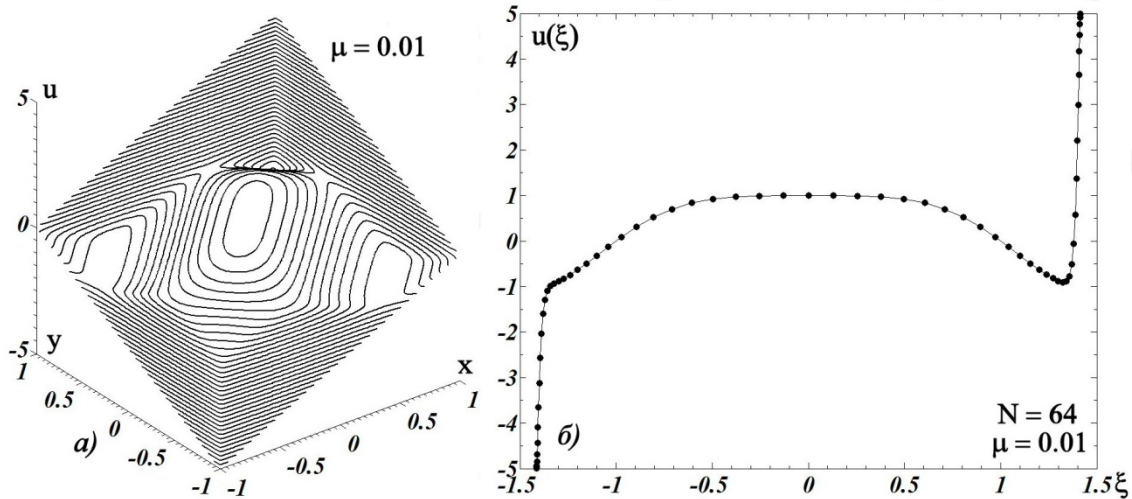


Рис. 1. Решение задачи (1)-(2) для $\mu = 10^{-2}$: а) общий вид, б) сечение плоскостью $x = y$.

2. Сетки по пространству.

Квазиравномерная сетка. Чтобы детально передавать особенности решения, нужно строить такие сетки, в которых в регулярную область, в пограничный слой и в переходную зону между ними попадает примерно одинаковое количество узлов. Хорошие результаты дала сетка следующего вида:

$$x(\zeta) = A \operatorname{th}\left[C\zeta\left(1 + \zeta^2/3\right)\right], \zeta \in [-1, 1]. \quad (3)$$

Параметры A и C подбираются так, чтобы 1) $x \in [-1, 1]$ и 2) $x'(0) = \mu/(\mu + K)$. Второе условие задает шаг на границе. В качестве окончательной сетки для задачи (1)-(2) выбирается декартово произведение сеток вида (3). Такая сетка подстраивается под особенности задачи и хорошо работает при любом соотношении μ и K . На рис. 1б представлено сечение решения задачи (1)-(2) плоскостью $x = y$. Это сечение содержит два угловых пограничных слоя. Видно, что все области детально разрешаются.

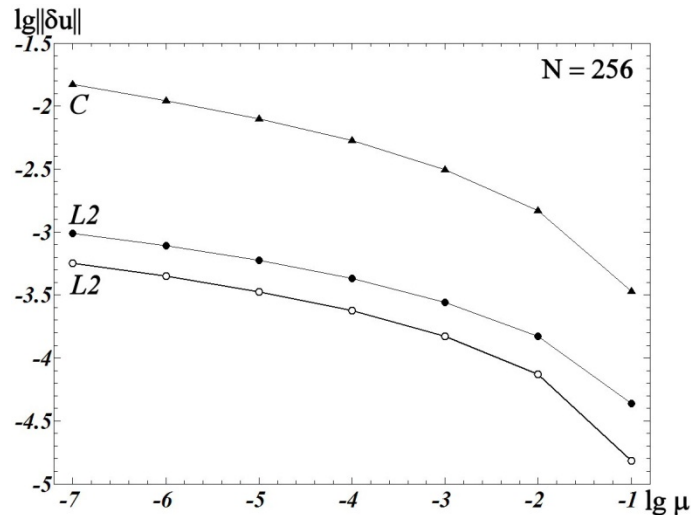


Рис. 2. Погрешности при разных μ и фиксированном N . Черные маркеры – шаг через разность x_n , светлые маркеры – шаг через производную производящей функции. Около кривых указаны нормы, в которых вычислены погрешности.

Шаг сетки будем определять через производную производящей функции в полужелой точке $h_{n+1/2} = x'(\zeta_{n+1/2})/N$. Это дает лучшую точность, чем при определении через разность соседних x_n . Данный вывод иллюстрируется на рис. 2, на котором представлена зависимость фактической точности от величины μ при разных определениях шага. Видно, что вычисления с шагом, определенном через производную производящей функции, являются более точными. Кроме того, описание ограниченных и неограниченных пространственных областей становится единообразным, что удобно.

3. Решение сеточных уравнений.

Задачу (1)-(2) можно решить счетом на установление с логарифмическим набором шагов [7] по эволюционно-факторизованной схеме [8]. Этот метод позволяет путем итераций получить решение с точностью ошибок округления. Он сходится экспоненциально быстро, требуемое число итераций пропорционально логарифму отношения границ спектра, то есть $S \approx 13 \ln N$. На практике это означает несколько десятков (но не более 100) итераций, причем каждая итерация малотрудоемка. Таким образом, по точности и скорости данный метод эквивалентен прямым методам (если выбрано достаточное число итераций). При этом он применим к гораздо более широкому классу задач; в частности, сетки по пространству могут быть неравномерными. Кроме того, данный метод позволяет апостериорно контролировать сходимость итераций: оценка сходимости [9] является асимптотически точной.

4. Установление сходимости.

На рис. 3 представлены кривые сходимости в двойном логарифмическом масштабе при сгущении сеток по пространству. Погрешности определяются методом Ричардсона.

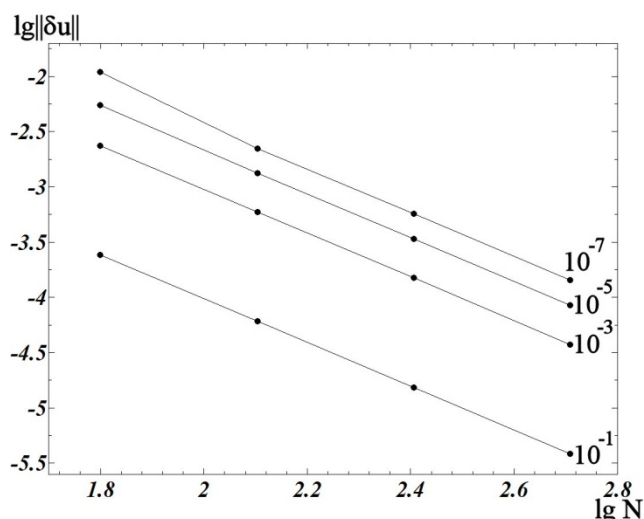


Рис. 3. Погрешности по методу Ричардсона, цифры около линий – значения μ .

Поскольку эти кривые выходят на прямые линии с наклоном 2, можно утверждать, что фактический порядок сходимости равен 2. Таким образом, даже в сингулярно возмущенной задаче для надежного установления порядка сходимости достаточно осуществить визуальный контроль по методу Ричардсона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.С. Бахвалов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1969. Т. 9. № 4. С. 841-859.
2. Т.Я. Ершова // Вестн. Моск. Ун-та, Серия 15. Вычисл. матем. и киберн. 2009. № 4. С. 7-14.
3. Г.И. Шишкин // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т. 27. № 9. С. 1360-1372.
4. В.Б. Андреев // Дифференц. уравн. 2006. Т. 42. № 7. С. 895-906.
5. Н.Н. Калиткин, А.Б. Альшин, Е.А. Альшина, Б.В. Рогов “Вычисления на квазиравномерных сетках” М.: Физматлит, 2005.
6. А.А. Самарский, А.В. Гулин “Численные методы” М.: Наука, 1989.
7. А.А. Болтнев, Н.Н. Калиткин, О.А. Качер // ДАН. 2005. Т. 404. № 2. С.177-180.
8. Н.Н. Калиткин // ДАН. 2005. Т. 402. № 4. С. 467-471.
9. Н.Н. Калиткин, А.А. Белов // ДАН. 2013. Т. 452. № 3. С.261-265.

КОНТРАСТНЫЕ СТРУКТУРЫ В МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЗАДАЧАХ РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ-АДВЕКЦИЯ

М.А. Давыдова

*МГУ им. М.В. Ломоносова, Физический факультет, кафедра математики,
email:m.davydova@bk.ru*

Рассмотрим краевую задачу для нелинейного сингулярно возмущенного уравнения

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \Delta u - f(\varepsilon \nabla u, u, x) &= 0, \quad x = (x_1, \dots, x_N) \in D \subset R^N, \\ u(x, \varepsilon) &= g(x), \quad x \in \partial D, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, функции f , $g(x)$ и граница ∂D предполагаются достаточно гладкими, $\Delta = \sum_{k=1}^N \partial^2 / \partial x_k^2$ – оператор Лапласа. Под обозначением $\varepsilon \nabla u$ подразумевается зависимость функции f от аргументов $v_1 \equiv \varepsilon \partial u / \partial x_1$, $v_2 \equiv \varepsilon \partial u / \partial x_2, \dots, v_N \equiv \varepsilon \partial u / \partial x_N$. Предполагается также, что функция f удовлетворяет стандартному условию не более чем квадратичного роста по ∇u . Соответствующая зависимость от нелинейно входящей адвекции и диффузии определяет важный для приложений и более сложный случай по сравнению с ранее изученным случаем, для которого функция f не зависела от градиента [1].

1. Существование решений погранслоного типа. Исследование решений задачи (1) с пограничными слоями непосредственно связано с изучением вопроса о существовании решений с внутренними слоями (контрастных структур) в системах типа реакция-диффузия-адвекция [2], [3].

Будем предполагать выполнение условия:

(\mathbf{Y}_1^1) Вырожденное уравнение $f(0, u, x) = 0$ имеет изолированное решение $u = \varphi(x)$, причем $f_u(0, \varphi(x), x) > 0$ при $x \in \bar{D}$.

Определим достаточно малую окрестность ∂D^δ поверхности ∂D :

$$\partial D^\delta = \{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) < \delta\}, \quad \delta > 0,$$

и локальные координаты в этой окрестности

$$x \in \partial D^\delta \mapsto (y, \bar{r}) \in \partial D \times [0; \delta],$$

где $y \in \partial D$, причем $\bar{r} = \text{dist}(x, \partial D) = \text{dist}(x, y)$. Если $\mathbf{n}(y)$ – единичная внутренняя нормаль к поверхности ∂D в точке y , то взаимно однозначное соответствие между координатами дается выражениями

$$x_i = y_i(\eta_1, \dots, \eta_{N-1}) + \bar{r}n_i(\eta_1, \dots, \eta_{N-1}), \quad i = \overline{1, N}, \quad (2)$$

где $\{\eta_1, \dots, \eta_{N-1}\}$ - криволинейные координаты на поверхности ∂D , $n_i(\eta)$ - направляющие косинусы нормали $\mathbf{n}(y)$. В этой системе координат производные $\partial u / \partial x_i$ вычисляются по

$$\text{формулам: } \partial u / \partial x_i = d^i(\bar{r}, \eta) \partial u / \partial \bar{r} + \sum_{j=1}^{N-1} \bar{q}_j^i(\bar{r}, \eta) \partial u / \partial \eta_j, \quad i = \overline{1, N}, \quad d^i(\bar{r}, \eta), \quad \bar{q}_j^i(\bar{r}, \eta) -$$

известные функции, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{N-1}) \in \Lambda$, Λ - область изменения координаты η на поверхности ∂D .

На поверхности ∂D определим присоединенную систему уравнений

$$\partial \tilde{v} / \partial \rho = f(d^1(0, \eta) \tilde{v}, \dots, d^N(0, \eta) \tilde{v}, \tilde{u}, 0, \eta), \quad \partial \tilde{u} / \partial \rho = \tilde{v}, \quad 0 < \rho < +\infty, \quad (3)$$

где η рассматривается как параметр.

(\mathbf{Y}_2^1) На фазовой плоскости системы (3) прямая $\tilde{u} = g(0, \eta)$ пересекает сепаратрису, входящую в седло $(\varphi(0, \eta), 0)$ при $\rho \rightarrow +\infty$ и $\eta \in \Lambda$.

В частности, если $f = A(u, x)(\varepsilon \nabla u)^2 + B(u, x)$ и $g(0, \eta) > \varphi(0, \eta)$, то требование $\int_{\varphi(0, \eta)}^{g(0, \eta)} B(\xi, 0, \eta) \exp\left(\int_{\xi}^{g(0, \eta)} M(\lambda, \eta) d\lambda\right) d\xi > 0$, $M(u, \eta) = 2A(u, 0, \eta) \sum_{i=1}^N (d^i(0, \eta))^2$ гарантирует выполнение условия (\mathbf{Y}_2^1).

Асимптотику решения погранслоного типа задачи (1) ищем в виде

$$u(x, \varepsilon) = \bar{u}(x, \varepsilon) + \Pi u(\rho, \bar{\theta}, \varepsilon), \quad (4)$$

где $\bar{u}(x, \varepsilon) = \bar{u}_0(x) + \varepsilon \bar{u}_1(x) + \dots$ - регулярный ряд, $\Pi u(\rho, \eta, \varepsilon) = \Pi_0 u(\rho, \eta) + \varepsilon \Pi_1 u(\rho, \eta) + \dots$ -

пограничный ряд, описывающий пограничный слой в окрестности границы ∂D , $\rho = \bar{r} / \varepsilon$.

Члены регулярного разложения определяются как решения конечных уравнений. Для определения члена $\Pi_0 u$ получаем нелинейную дифференциальную задачу,

разрешимость которой обеспечивается требованием (Y_2^1) . В следующих приближениях относительно членов погранслоного разложения приходим к линейным дифференциальным задачам с решениями в явном виде.

Существование решения с построенной асимптотикой обусловлено свойствами нелинейной функции f и доказывается на основе асимптотического метода дифференциальных неравенств (см. напр. [4]).

Теорема 1. *Если функции f , g и граница ∂D достаточно гладкие, то при выполнении условий (Y_1^1) , (Y_2^1) существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1), для которого в области $D \cup \partial D$ справедлива равномерная оценка $|u(x, \varepsilon) - U_n(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^{n+1}$, где $U_n(x, \varepsilon)$ – частичная сумма n – го порядка ряда (4), константа C не зависит от ε .*

Если рассмотреть решение с пограничным слоем задачи (1) как стационарное решение соответствующей параболической задачи, то его устойчивость по Ляпунову следует из известных результатов (см. напр. [4]).

2. Существование контрастных структур. Исследование многомерной задачи (1) на наличие решений с внутренними слоями существенно сложнее описания одномерного варианта этой задачи, который рассматривался ранее в [5]. Основная трудность связана с определением положения поверхности перехода, в окрестности которой происходит резкое изменение решения $u(x, \varepsilon)$ (локализован внутренний слой).

Рассмотрим множество поверхностей

$$\{\bar{\Omega}\} = \{\bar{\Omega} \in D : \bar{\Omega} \text{ – достаточно гладкое замкнутое многообразие размерности } N-1\}.$$

Для каждой поверхности $\bar{\Omega}$ в малой окрестности $\bar{\Omega}^\delta$ введем локальные координаты

$$x \in \bar{\Omega}^\delta \mapsto (y, r) \in \bar{\Omega} \times [-\delta; \delta],$$

где $y \in \bar{\Omega}$, причем $dist(x, \bar{\Omega}) = dist(x, y)$; $r = \begin{cases} dist(x, y), & x \in D^+, \\ -dist(x, y), & x \in D^-, \end{cases}$ D^+ и D^- -

соответственно внешняя и внутренняя подобласти области D , разделенные поверхностью $\bar{\Omega}$. Взаимно однозначное соответствие между координатами дается выражениями типа (2). В каждой окрестности $\bar{\Omega}^\delta$ определим присоединенную систему уравнений

$$\partial \tilde{v} / \partial \xi = f(l^1(r, \theta) \tilde{v}, \dots, l^N(r, \theta) \tilde{v}, \tilde{u}, r, \theta), \quad \partial \tilde{u} / \partial \xi = \tilde{v}, \quad -\infty < \xi < +\infty, \quad (5)$$

где r и θ рассматриваются как параметры, $l^i(r, \theta)$ известные функции, определяемые по аналогии с функциями $d^i(\bar{r}, \eta)$ из п.1, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_{N-1}) \in \bar{\Theta}$, $\bar{\Theta}$ – область изменения координаты θ на поверхности $\bar{\Omega}$.

Пусть выполнены условия

(\mathbf{Y}_1^2) Вырожденное уравнение $f(0, u, x) = 0$ имеет ровно три корня $u = \varphi_i(x)$, $i = \overline{1, 3}$, причем $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \varphi_3(x)$, $f_u(0, \varphi_i(x), x) > 0$, $i = 1, 3$, $f_u(0, \varphi_2(x), x) < 0$ при $x \in \bar{D}$.

(\mathbf{Y}_2^2) Для любого $(r, \theta) \in [-\delta; \delta] \times \bar{\Theta}$ сепаратриса, выходящая из седла $(\varphi_1(r, \theta), 0)$ представима в виде $\tilde{v} = \tilde{v}^-(\xi, r, \theta)$, $\tilde{u} = \tilde{u}^-(\xi, r, \theta)$ и пересекает линию $u = \varphi_2(r, \theta)$, при этом точке пересечения отвечает значение $\xi = 0$, а седлу – значение $\xi = -\infty$. Сепаратриса, входящая в седло $(\varphi_3(r, \theta), 0)$ представима в виде $\tilde{v} = \tilde{v}^+(\xi, r, \theta)$, $\tilde{u} = \tilde{u}^+(\xi, r, \theta)$ и пересекает линию $u = \varphi_2(r, \theta)$, при этом точке пересечения отвечает значение $\xi = 0$, а седлу – значение $\xi = +\infty$.

Сепаратрисы описываются уравнениями (5) с условиями на бесконечности

$$\tilde{u}^\mp(\mp\infty, r, \theta) = \varphi_i(r, \theta), \quad i = 1, 3, \quad \tilde{v}^\mp(\mp\infty, r, \theta) = 0. \quad (6)$$

Для каждой поверхности $\bar{\Omega}$ определим функцию $H(r, \theta) \equiv \tilde{v}^+(0, r, \theta) - \tilde{v}^-(0, r, \theta)$, $(r, \theta) \in [-\delta; \delta] \times \bar{\Theta}$.

(\mathbf{Y}_3^2) Существует поверхность Ω_0 из множества поверхностей $\{\bar{\Omega}\}$ такая, что функция $H(0, \theta) = 0$, $\theta \in \Theta_0$, где Θ_0 – область изменения координаты θ на поверхности Ω_0 .

Условие (\mathbf{Y}_3^2) означает, что для поверхности Ω_0 на фазовой плоскости (\tilde{u}, \tilde{v}) существует сепаратриса, соединяющая седла $(\varphi_1(0, \theta), 0)$ и $(\varphi_3(0, \theta), 0)$.

(\mathbf{Y}_4^2) Производная $H_r(0, \theta) > 0$ при $\theta \in \Theta_0$.

Асимптотическое разложение решения типа контрастной структуры ищем в виде

$$u^-(x, \varepsilon) = \bar{u}^-(x, \varepsilon) + Qu^-(\xi, \theta, \varepsilon), \quad u^+(x, \varepsilon) = \bar{u}^+(x, \varepsilon) + Pu(\rho, \eta, \varepsilon) + Qu^+(\xi, \theta, \varepsilon) \quad (7)$$

где $\bar{u}^\pm(x, \varepsilon) = \bar{u}_0^\pm(x) + \varepsilon \bar{u}_1^\pm(x) + \dots$ – регулярные ряды, $Pu(\rho, \varepsilon) = P_0u(\rho, \eta) +$

$+ \varepsilon \Pi_1 u(\rho, \eta) + \dots$ – пограничный ряд, описывающий пограничный слой в окрестности границы ∂D ((\bar{r}, η) – локальные координаты, определенные в п.1, $\rho = \bar{r}/\varepsilon$), $Qu^\pm(\xi, \theta, \varepsilon) = Q_0 u^\pm(\xi, \theta) + \varepsilon Q_1 u^\pm(\xi, \theta) + \dots$ ряды, описывающие внутренний слой в окрестности поверхности перехода Ω , уравнение которой в локальной системе координат, введенной в окрестности поверхности Ω_0 известным способом, ищем в виде

$$r = \varepsilon \lambda_1(\theta_1, \dots, \theta_{N-1}) + \varepsilon^2 \lambda_2(\theta_1, \dots, \theta_{N-1}) + \dots \quad (8)$$

Члены регулярных разложений в (7) определяются как решения конечных уравнений. При описании внутреннего слоя в нулевом приближении имеем нелинейные дифференциальные задачи, разрешимость которых обеспечивается требованием (Y_3^2) . В следующих приближениях приходим к линейным дифференциальным задачам с решениями в явном виде. Коэффициенты ряда (8) являются решениями конечных уравнений, которые получаются с использованием условия S^1 – сшивания асимптотик (7) на поверхности Ω . Описание пограничного слоя в окрестности границы области выполняется в соответствии с п. 1 и требует выполнения условия:

(Y_5^2) На фазовой плоскости системы $\partial v/\partial \rho = f(d^1(0, \eta)v, \dots, d^N(0, \eta)v, u, 0, \eta)$, $\partial u/\partial \rho = v$, $\rho < 0$, прямая $u = g(0, \eta)$ пересекает сепаратрису, входящую в седло $(\varphi_3(0, \eta), 0)$ при $\rho \rightarrow -\infty$.

На основе асимптотического метода дифференциальных неравенств доказана

Теорема 2. Пусть f , g и ∂D обладают достаточной степенью гладкости и выполнены условия (Y_1^2) - (Y_5^2) . Тогда существует решение $u(x, \varepsilon)$ задачи (1), являющееся контрастной структурой типа ступеньки, для которого в области $D \cup \partial D$ справедлива равномерная оценка $|u(x, \varepsilon) - U_n^\pm(x, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^{n+1}$, где $U_n^\pm(x, \varepsilon)$ – частичные суммы n -го порядка рядов (7), константа C не зависит от ε .

Если рассматривать решение с внутренним слоем задачи (1) как стационарное решение соответствующей параболической задачи, то его устойчивость по Ляпунову следует из известных результатов (см. напр. [4]).

Определенное значение для приложений имеют два частных случая задачи (1), которые изучены отдельно: 1) $f = A(u, x)(\varepsilon \nabla u)^2 + B(u, x)$; 2) $f = \varepsilon(\mathbf{A}(x), \nabla u) + B(u, x)$ [2,3].

Литература.

1. *Н.Н. Нефедов.* Метод дифференциальных неравенств для некоторых классов нелинейных сингулярно возмущенных задач с внутренними слоями. // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, №7. С. 1142-1149.
 2. *Н.Н. Нефедов, М.А. Давыдова.* Контрастные структуры в многомерных сингулярно возмущенных задачах реакция-диффузия-адвекция. // Дифференц. уравнения. Т. 48, № 5, с. 738–748, 2012.
 3. *Н.Н. Нефедов, М.А. Давыдова.* Контрастные структуры в сингулярно возмущенных квазилинейных уравнениях реакция-диффузия-адвекция. // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, №6. С. 715-733.
 4. *А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов, Н.Н. Нефедов.* Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Труды Математического Института имени В.А. Стеклова, 2010, т. 268, с. 268-283.
 5. *А.Б. Васильева, М.А. Давыдова.* О контрастной структуре типа ступеньки для одного класса нелинейных сингулярно возмущенных уравнений второго порядка. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 6. С. 938-947.
- Работа выполнена при поддержке РФФИ, пр. №13-01-00200.

Уравнение Гамильтона-Якоби для модели двухмерного динамо с меридиональной циркуляцией

Е.П. Попова, Н.А. Юхина,
МГУ имени М.В. Ломоносова

popovaelp@mail.ru

Циклы солнечной магнитной активности представляют собой хорошо известное явление. Они связаны с распространением магнитогиродинамической волны от средних широт к экватору, видимой прежде всего по широтно-временному распределению солнечных пятен. Природа цикла магнитной активности связывается с действием механизма солнечного динамо. Простейшая схема работы динамо для однослойной среды была предложена в [Parker, 1955]. Согласно такой схеме, магнитное поле звезды представимо в виде двух компонент: полоидальной и тороидальной. Тороидальное магнитное поле получается из полоидального под действием дифференциального вращения. Обратный процесс превращения тороидального магнитного поля в полоидальное происходит под действием альфа-эффекта, связанного с нарушением зеркальной симметрии конвекции во вращающемся теле. Это приводит к генерации и распространению внутри солнечной конвективной зоны волны крупномасштабного квазистационарного магнитного поля (динамо-волны), с которой и связано образование солнечных пятен. Уравнения динамо среднего поля для двухмерной (радиус - широта) модели можно исследовать асимптотически, с помощью метода, аналогичного методу ВКБ.

Уравнения динамо средних полей получаются из уравнения Штеенбека-Краузе-Рэдлера:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\alpha \vec{B}) + \text{rot}[\vec{V} \times \vec{B}] + \beta \Delta \vec{B}. \quad (1)$$

Здесь $\vec{B} = B_\phi(r, \theta, t)\vec{e}_\phi + \nabla \times (A(r, \theta, t)\vec{e}_\phi)$ магнитное поле в сферических координатах, $B_\phi(r, \theta, t)\vec{e}_\phi$ - тороидальная компонента, $\nabla \times (A(r, \theta, t)\vec{e}_\phi)$ - полоидальная. $\vec{V} = \Omega(r, \theta)r \sin \theta \vec{e}_\phi$ - скорость движения вещества, которая здесь является дифференциальным вращением.

Подставляя выражения для магнитного поля и меридиональной циркуляции в уравнение (1), можно получить уравнения электродинамики среднего поля, описывающие генерацию осесимметричного магнитного поля в дифференциально вращающемся сферическом слое [Иванова, Рuzмайкин, 1976] :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B + \frac{\beta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (Ar) + \frac{\beta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \cos \theta) \right], \quad (2)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = \frac{-D}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} (Ar \cos \theta) + \frac{D}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} (Ar \cos \theta) \quad (3)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\alpha \frac{\partial}{\partial r} (Ar) \right] - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\alpha}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \cos \theta) \right] + \frac{\beta}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (Br) + \frac{\beta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B \cos \theta) \right].$$

Здесь $B(r, \theta)$ — тороидальное магнитное поле, компонента $A(r, \theta)$ пропорциональна тороидальной компоненте векторного потенциала, которая определяет полоидальное магнитное поле, r и θ — радиус и широта в сферической системе координат с центром в центре Солнца (звезды), а $\theta = 0$ соответствует экватору, безразмерный параметр D - динамо-число, характеризующее амплитуду альфа-эффекта и дифференциального вращения. Величины α и β являются функциями положения, причем α обозначает α -эффект (среднюю турбулентную спиральность), обеспечивающий образование полоидального поля из тороидального, β — коэффициент турбулентной диффузии, полагаемый здесь однородным, а Ω - угловая скорость. Время измеряется в единицах времени диффузии R^2/β , а длина — в единицах внутреннего радиуса конвективной зоны R .

Решение системы (2, 3) можно искать в виде волн, в этом случае оно ищется в форме:

$$\begin{pmatrix} \hat{A}(r, \theta) \\ \hat{B}(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(r, \theta) \\ |D|^{\frac{2}{3}} B(r, \theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu(r, \theta) \\ \nu(r, \theta) \end{pmatrix} \exp(|D|^{\frac{2}{3}} \Gamma t + i |D|^{\frac{1}{3}} S(r, \theta)), \quad (4)$$

где $S(r, \theta)$, $\mu(r, \theta)$ и $\nu(r, \theta)$ гладкие функции. S аналог действия, комплексное Γ определяет собственное значение, его действительная часть дает скорость роста, а мнимая дает длительность цикла активности. Множители в комплексной скорости роста $|D|^{\frac{2}{3}}$ и $|D|^{\frac{1}{3}}$ в действии выбраны так, чтобы дифференциальное вращение, α -эффект, собственное значение и диссипация оказались одного порядка и вошли в старший член асимптотического разложения.

Предполагается, что вклад альфа-эффекта в генерацию тороидального магнитного поля пренебрежимо мал. Тогда уравнения динамо (2, 3) примут вид:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rA)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial (A \cos \theta)}{\partial \theta} \right), \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} = & \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rB)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial (B \cos \theta)}{\partial \theta} \right) - \frac{D}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial (A r \cos \theta)}{\partial \theta} + \\ & + \frac{D}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \frac{\partial (A r \cos \theta)}{\partial r} \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь мы перешли в нормировкам на диффузионное время [Belvedere, 2000]. При подстановке выбранного вида искомого решения в уравнения Паркера (5, 6), получаем алгебраическую систему уравнений для μ и ν . Условием разрешимости для этой системы является дисперсионное соотношение для частоты динамо-волны и ее волнового вектора, т.е. уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\begin{aligned} [\Gamma + (S_r)^2 + \frac{1}{r^2} (S_\theta)^2] &= i r a \cos \theta (G S_\theta + F S_r) \\ G &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} , \\ F &= - \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} . \end{aligned}$$

Здесь Γ - собственное значение ведущей моды, S_r и S_θ - частные производные от S .

В [Belvedere, 2000] было показано, что асимптотические решения на основе такого приближения дают достаточно корректное качественное объяснение имеющихся солнечных наблюдений. Они согласуются также и с результатами численного анализа. Основной особенностью решения, полученного с использованием двумерной модели, является его соответствие закону Йошимуры, согласно которому динамо-волна распространяется вдоль линий постоянной угловой скорости.

Однако данный подход не позволяет учитывать сложные потоки вещества в зоне генерации магнитного поля. Целью данной работы является вывод уравнений, содержащих меридиональную циркуляцию и получение уравнения Гамильтона-Якоби для них.

Представим поток вещества в виде $U(r, \theta) = U_r(r, \theta) \vec{e}_r + U_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta + \Omega(r, \theta) r \sin \theta \vec{e}_\varphi$, где первое слагаемое описывает радиальную компоненту меридиональной циркуляции, второе слагаемое – компоненту по широте, третье – дифференциальное вращение. Подставляя его в уравнение для крупномасштабного магнитного поля (уравнение Штеенбека-Краузе-Рэдлера) и полагая $U_r(r, \theta) = V_r(r, \theta) |D|^{1/3}$, $U_\theta(r, \theta) = V_\theta(r, \theta) |D|^{1/3}$, можно получить систему уравнений динамо с учетом меридиональных потоков в двухмерном случае:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= \alpha B + \frac{1}{r} \frac{\partial(rA)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial(A \cos \theta)}{\partial \theta} \right) - \\ &- V_\theta \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial(A \cos \theta)}{\partial \theta} - V_r \frac{1}{r} \frac{\partial(Ar)}{\partial r} \\ \frac{\partial B}{\partial t} &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rB)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial(B \cos \theta)}{\partial \theta} \right) - \frac{D}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} \frac{\partial(Ar \cos \theta)}{\partial \theta} + \\ &+ \frac{D}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \frac{\partial(Ar \cos \theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_r B)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(V_\theta B)}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Используя асимптотическое разложение (4), получаем алгебраическую систему уравнений относительно гладких функций μ и ν , условием разрешимости которой служит уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\left[\Gamma + \frac{1}{r^2} k_\theta^2 + k_r^2 + i \frac{1}{r} V_\theta k_\theta + i V_r k_r \right]^2 = i r \alpha \cos \theta (G k_\theta + F k_r).$$

Здесь $k_\theta = \frac{\partial S(r, \theta)}{\partial \theta}$ и $k_r = \frac{\partial S(r, \theta)}{\partial r}$ соответствуют волновым векторам.

Работа поддержана грантами Российского фонда фундаментальных исследований 12-02-00170, 12-02-00884.

Литература

1. Parker, E. N., Hydromagnetic dynamo models // *Astrophys.J.*, 122, p. 293-314, 1955.
2. Иванова Т. С., Рузмайкин А. А., Магнитногидродинамическая динамо-модель солнечного цикла // *Астрон. Ж.*, 53, стр. 398–410, 1976.
3. Belvedere, G. M., Kuzanyan, K. M., Sokoloff, D. D., A two-dimensional asymptotic solution for a dynamo wave in the light of the solar internal rotation // *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, 315, No. 4, p. 778–790, 2000.

Применение контрастных структур в задачах биофизики

А.А. Мельникова, Н.Н. Дерюгина

Физический факультет, МГУ имени М.В. Ломоносова

melnikova@physics.msu.ru

derunat@gmail.com

Рассматривается начально-краевая задача для системы двух уравнений с малым параметром:

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varepsilon^4 \frac{\partial u}{\partial t} &= f(u, v, \varepsilon), & \varepsilon^2 b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial t} &= g(u, v, \varepsilon), \\ x &\in (0; l), & t &\in (0; T], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t, \varepsilon) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t, \varepsilon) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0, t, \varepsilon) = \frac{\partial v}{\partial x}(l, t, \varepsilon) = 0, \quad t \in (0, T], \quad (2)$$

$$u(x, 0, \varepsilon) = u^0(x), \quad v(x, 0, \varepsilon) = v^0(x), \quad x \in [0; l],$$

где ε – малый параметр, f и g – достаточно гладкие функции в области $(u, v, \varepsilon) \in I_u \times I_v \times (0; \varepsilon_0]$, а I_u и I_v – некоторые промежутки изменения переменных u и v , $\varepsilon_0 > 0$, $T > 0$.

Исследуется вопрос об асимптотике при малых ε решения с переходным слоем в окрестности некоторой внутренней точки x^* отрезка $[0; l]$, где происходит быстрый переход решения $u(x, t, \varepsilon), v(x, t, \varepsilon)$ задачи (1), (2) от одного корня вырожденной системы к другому. Решения такого типа называют контрастными структурами типа ступеньки (КСТС) (см. Рис.1). Положение точки x^* изменяется со временем. Предполагается, что в начальный момент уже сформирован фронт в виде КСТС. Подобная задача в стационарной постановке рассматривалась в [1]. Заметим, что в данной постановке рассматривается распространение фронта в однородной среде, когда функции f и g не зависят от координаты x .

Пусть выполнены следующие требования:

Условие 1. Уравнение $f(u, v, 0) = 0$ имеет ровно три изолированных корня $u = \varphi^i(v)$, $i = 1, 2, 3$ такие, что $\varphi^1(v) < \varphi^2(v) < \varphi^3(v)$ всюду в области $v \in I_v$, причем $f_u(\varphi^{1,3}(v), v, \varepsilon) > 0$, $f_u(\varphi^2(v), v, \varepsilon) < 0$.

Условие 2. Каждое из уравнений $h^i(v) := g(\varphi^i(v), v, 0) = 0$, $i = 1, 2, 3$ имеет единственное решение $v = v^i \in I_v$, причем выполнены неравенства $v^1 < v^3$; $h_v^i(v^i) > 0$, $i = 1, 3$.

Условие 3. $f_v(u, v, 0) > 0$, $g_u(u, v, 0) < 0$ всюду в области $(u, v) \in I_u \times I_v$.

Условие 4. Пусть существует единственное решение $v = v_0$ уравнения

$$\int_{\varphi^1(v)}^{\varphi^3(v)} f(u, v, 0) du = 0, \quad \text{такое что } v^1 < v_0 < v^3.$$

Системы, подобные (1), в приложениях носят название «реакция-диффузия» и применяются при математическом моделировании процессов в биофизике, экологии, химической кинетике. Примером могут служить системы типа ФитцХью-Нагумо [2]. Такие системы в различных модификациях используются в биофизике для моделирования активных сред (сред с распределенными источниками энергии) (см. [3]).

В настоящей работе, помимо общей задачи (1), (2), рассматривается система уравнений типа ФитцХью-Нагумо:

$$\varepsilon^4 \left(D_u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = u(u - \alpha)(u - 1) + uv, \quad \varepsilon^2 \left(D_v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \gamma v - \beta u \quad (3)$$

Система (3) с условиями (2) может быть использована для моделирования городской экосистемы [4]. Здесь u – функция интенсивности антропогенных процессов, v – функция интенсивности природных процессов, $0 < \alpha < 1$ – параметр активации системы (определяется численностью населения), $\beta > 0, \gamma > 0$ – кинетические параметры, D_u, D_v – коэффициенты диффузии компонент системы, ε – малый параметр. Система (3) в зависимости от выбора параметров $\alpha, \beta, \gamma, D_u, D_v$ может иметь различные типы решений, в том числе решение в виде движущегося фронта.

В данной работе при выполнении условий 1-4 и некоторых дополнительных требований построено асимптотическое решение типа движущегося фронта для общей задачи (1), (2) и в частности для системы (3) при малых ε . Получено уравнение для определения скорости движения фронта с применением методик из [5]. Также получены численные решения задачи (3), (2) при различных наборах параметров системы (см. Рис.1).

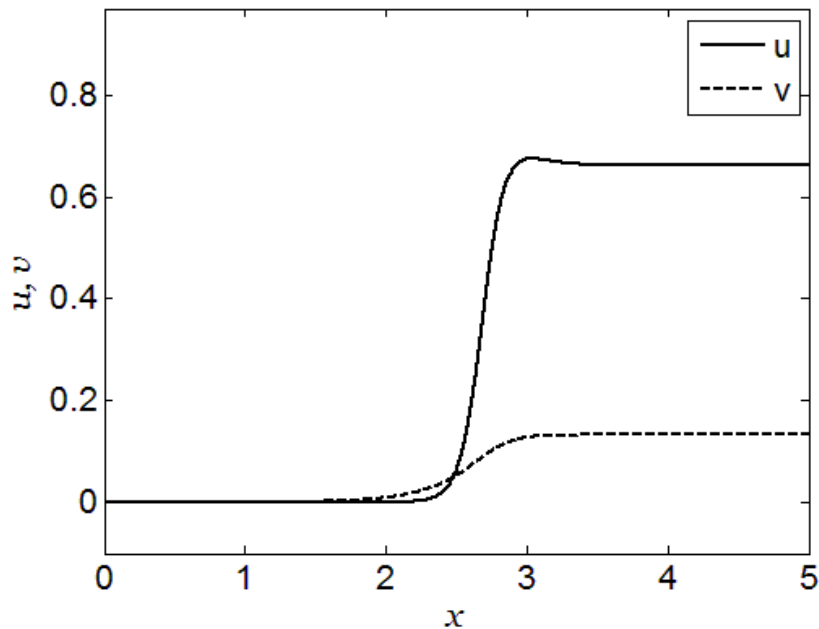


Рис.1. Решение в виде фронта для системы (3) : $t = 0.9, \varepsilon = 0.2$ при значениях параметров ($\alpha = 0.27, \beta = 0.2, \gamma = 1, D_u = 5, D_v = 1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Ф. Бутузов, Н.Т. Левашова, А.А. Мельникова. //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т.52. N11. С. 1983-2003.
2. FitzHugh R. //Bull. Math. Biophysics. 1955. N 17. P. 257-278.
3. Атауллаханов и др. //УФН. 2002. Т. 172. N 6. С. 671-690.
4. Сидорова А.Э., Мухартова Ю.В. //Вестник Моск. Университета. Серия Астрономия и Физика. 2013. №5. С. 65-70.
5. Божевольнов Ю.В., Нефедов Н.Н. //Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50. N 2. С. 276-285.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 12-01-00387 и 13-01-00200).

Существование и асимптотическая устойчивость периодических решений уравнения реакция-диффузия в двумерном случае

Н.Н. Нефедов, Е.И. Никулин
Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
nefedov@phys.msu.ru

Постановка задачи. Рассмотрим нелинейное параболическое уравнение типа реакция-диффузия

$$\varepsilon^2 \Delta u - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, x, y, t, \varepsilon) \quad (1)$$

$$u(x, y, t+T, \varepsilon) = u(x, y, t, \varepsilon), \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_r}(x, y, t, \varepsilon) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \in R, \quad (3)$$

где производная берется по внешней нормали к границе.

Уравнения и системы уравнений такого вида описывают различные физические, биологические и химические объекты и используются в качестве математических моделей процессов фазового разделения, в задачах массо- и теплопереноса, в задачах химической кинетики и других. Функция $f(u, x, y, t, \varepsilon)$ далее предполагается достаточно гладкой.

Если в уравнении (1) положить $\varepsilon = 0$, то получим вырожденное уравнение

$$f(u, x, y, t, 0) = 0, \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R \quad (4)$$

Пусть выполнены следующие условия.

Условие А1. Уравнение (4) имеет три T -периодических по t корня относительно u : $\varphi_i(x, y, t)$, $i = 0, 1, 2$ для $(x, y) \in \bar{D}$, $t \in R$, причем $\varphi_2(x, y, t) < \varphi_0(x, y, t) < \varphi_1(x, y, t)$,

$$f_u(\varphi_i(x, y, t), x, y, t, 0) > 0 \quad i = 1, 2; \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R$$

Для того, чтобы сформулировать следующее условие, введем функцию

$$I(x, y, t) = \int_{\varphi_1(x, y, t)}^{\varphi_2(x, y, t)} f(u, x, y, t, 0) du, \quad (x, y) \in \bar{D}, \quad t \in R$$

Условие А2. Уравнение $I(x, y, t) = 0$ имеет единственное решение в виде T -периодической по t замкнутой гладкой кривой без самопересечений $C_0(t) \subset D$, причем

$$(\nabla I \times \vec{n}) < 0, \quad (x, y) \in C_0(t), \quad t \in R, \quad (5)$$

где производная берется по внутренней нормали к кривой.

Известно, что при сформулированных выше условиях задача (1)-(3) может иметь периодические решения, близкие к φ_1 и φ_2 внутри и снаружи кривой $C_0(t)$ соответственно, а вблизи кривой $C_0(t)$ и границы Γ имеющие соответственно внутренний и пограничный резкие переходные слои.

Построение асимптотики. Определим кривую пересечения решения $u(x, y, t, \varepsilon)$ и корня $\varphi_0(x, y, t)$ вырожденного уравнения следующим образом:

$$C(t, \varepsilon) = \{(x, y) : u(x, y, t, \varepsilon) = \varphi_0(x, y, t)\} \equiv \{(x^*(t, \varepsilon), y^*(t, \varepsilon))\}$$

Пусть кривая $C(t, \varepsilon)$ разделяет область D на соответственно внутреннюю D_1 и внешнюю D_2 подобласти. Далее для удобства используем полярную систему координат: $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, тогда кривая $C(t, \varepsilon)$ задается функцией $R^*(\varphi, t, \varepsilon)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ (без ограничения общности мы полагаем, что $(0, 0) \in D_1$). Мы будем искать ее в виде ряда по степеням ε : $R^*(\varphi, t, \varepsilon) = R_0(\varphi, t) + \varepsilon R_1(\varphi, t) + \dots$

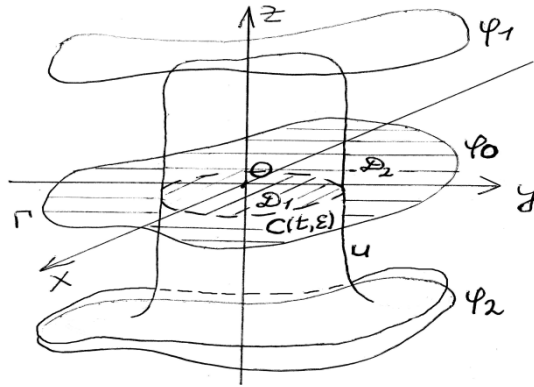


Рис. 1. Иллюстрация к построению асимптотики.

Для исследования решения в области внутреннего переходного слоя введем локальную систему (r, φ) координат так, что r — координата вдоль нормали к границе внутрь области D_1 , а φ — координата той точки на кривой $C(t, \varepsilon)$, из которой эта нормаль выпущена [1]. В области пограничного слоя аналогично вводится локальная система координат $(r_\Gamma, \varphi_\Gamma)$

Асимптотика решения ищется в следующем виде [2]
 $U(x, y, t, \varepsilon) = \bar{u}(x, y, t, \varepsilon) + Q(\rho, \varphi, t, \varepsilon) + P(\tau, \varphi_\Gamma, t, \varepsilon),$

где $\bar{u}(x, y, t, \varepsilon) = \bar{u}_0(x, y, t) + \varepsilon \bar{u}_1(x, y, t) + \dots$ — регулярная часть,

$Q(\rho, \varphi, t, \varepsilon) = Q_0(\rho, \varphi, t) + \varepsilon Q_1(\rho, \varphi, t) + \dots$ — часть, отвечающая за внутренний переходный слой с растянутой переменной $\rho = \frac{r}{\varepsilon}$,

$P(\tau, \varphi_r, t, \varepsilon) = P_0(\tau, \varphi_r, t) + \varepsilon P_1(\tau, \varphi_r, t) + \dots$ — часть, отвечающая за пограничный переходный слой с растянутой переменной $t = \frac{r_r}{\varepsilon}$.

Построение асимптотики регулярной части проходит стандартным образом.

Будем считать кривую $C(t, \varepsilon)$, а значит, и функцию $R^*(\varphi, t, \varepsilon)$ известной и не раскладывать ее по степеням ε . В переменных (ρ, φ) параболический оператор $L \equiv \varepsilon^2 \Delta - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial t}$ примет вид $L = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \varepsilon \left(k - \frac{\partial r}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \rho} + \varepsilon^2 L_2$, где $k = k(\rho, \varphi, t)$, L_2 — известные функция и оператор. Оператор L порождает асимптотику $Q(\rho, \varphi, t, \varepsilon)$. Процесс построения пограничных функций аналогичен, его мы здесь рассматривать не будем.

Теперь сошьем внутреннюю и внешнюю производные асимптотики по нормали на кривой $C(t, \varepsilon)$. Введем функцию

$$H(R^*(\varphi, t, \varepsilon), \varphi, t, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial U}{\partial r}(x^*, y^*, t, \varepsilon) \Big|_{r \rightarrow +0} - \varepsilon \frac{\partial U}{\partial r}(x^*, y^*, t, \varepsilon) \Big|_{r \rightarrow -0}$$

Условие сшивания первых производных выражается равенством: $H(R^*(\varphi, t, \varepsilon), \varphi, t, \varepsilon) = 0$, $\varphi = const, \varphi \in [0, 2\pi)$, откуда получим задачи для коэффициентов в разложении для $R^*(\varphi, t, \varepsilon)$. Задача для $R_0(\varphi, t)$ разрешима в силу **Условия А2**, а $R_j(\varphi, t)$, $j = 1, 2, 3, \dots$ выражается из уравнения $R_j \frac{\partial}{\partial R^*} H(R^*(\varphi, t, 0), \varphi, t, 0) + h_j = 0$ ($h_j = h_j(\varphi, t)$ — известные функции), которое разрешимо в силу (5).

Обоснование асимптотики.

Пусть $U_n(x, y, t, \varepsilon)$ - частичная сумма порядка n искомого асимптотического ряда, а $R^* = R_0 + \varepsilon R_1 + \dots + \varepsilon^{n+2} R_{n+2}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1: Пусть выполнены условия **A1, A2**, тогда существует решение задачи (1) $u(x, y, t, \varepsilon)$, для которого выполняется оценка:

$$|u(x, y, t, \varepsilon) - U_n(x, y, t, \varepsilon)| \leq c \varepsilon^{n+1}, \quad (x, y) \times t \in \bar{D} \times R$$

Доказательство этой теоремы проводится с помощью асимптотического метода дифференциальных неравенств [3], достаточно построить верхнее и нижнее решение для (1)-(3). Возьмем в качестве верхнего решения модифицированную формальную асимптотику:

$$\beta_n(x, y, t, \varepsilon) = \bar{u}_0(x, y, t) + \varepsilon \bar{u}_1(x, y, t) + \dots + \varepsilon^{n+2} \bar{u}_{n+2}(x, y, t) + Q_0(\rho_\beta, \varphi, t) + \varepsilon Q_1(\rho_\beta, \varphi, t) + \dots + \varepsilon^{n+2} Q_{n+2}(\rho_\beta, \varphi, t) + P_\beta(\tau, \varphi, t) + \varepsilon^{n+2}(\gamma + q_\beta(\rho_\beta, \varphi, t)) + \varepsilon^{n+3} Q_{(n+3), \beta}(\rho_\beta, \varphi, t)$$

Здесь где $\gamma > 0$ - константа, необходимая для выполнения дифференциальных неравенств; $\rho_\beta = \rho + \delta \varepsilon^{n+1}$, где функция $q_\beta(\rho_\beta, \varphi, t)$ в $n+2$ -ом порядке необходима для компенсации изменений, порожденных γ , $P_\beta(\tau, \varphi, t)$ - модификация пограничного слоя, $Q_{(n+3),\beta}(\rho_\beta, \varphi, t)$ нужна для непрерывности. Нижнее решение строится аналогично.

Исследование устойчивости.

Теорема 2. Пусть выполнены условия A1-A2, а $u(x, y, t, \varepsilon)$ — решение задачи (1)-(3). Тогда решение $v(x, y, t, \varepsilon) = u$ соответствующей начально-краевой задачи асимптотически устойчиво с локальной областью влияния не менее $[\alpha_4, \beta_4]$ и, следовательно, решение задачи (1)-(3) единственно в этой области.

Доказательство основано на асимптотическом методе дифференциальных неравенств [4]. Будем искать верхнее решение соответствующей начально-краевой задачи в виде $\beta(x, y, t, \varepsilon) = u(x, y, t, \varepsilon) + (\beta_n(x, y, t, \varepsilon) - u(x, y, t, \varepsilon))e^{-\lambda(\varepsilon)t}$, нижнее — аналогично.

Прямая проверка таким образом построенных решений для теоремы метода дифференциальных неравенств сразу же доказывает утверждение **Теоремы 2**.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков В. Т. //Журнал вычислительной математики и математической физики, 2007, том 47, № 8, с. 1356-1364
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высш. школа, 1990.
3. Нефедов Н.Н. //Дифференц. уравнения. 1995. Т.31. N7. С. 1142–1149.
4. Волков В. Т., Нефедов Н.Н. //Журнал вычислительной математики и математической физики, 2006, том 46, №4, с. 614-622.

Асимптотика движения фронта в задаче реакция-адвекция-диффузия с малой адвекцией.

Т.А.Саранцева, Н.Н.Нефедов.

Московский Государственный Университет им. Ломоносова

Физический факультет Кафедра математики.

tsarantseva@mail.ru

Математические вопросы, связанные с уравнениями типа реакция-адвекция-диффузия, интенсивно исследуются в настоящее время в связи с большим количеством практических приложений.

Рассмотрим нестационарное уравнение типа реакция-адвекция-диффузия.

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon^2 a(u, x) \frac{\partial u}{\partial x} - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t} = f(u, x), x \in \bar{D} = [0, 1], t \in [0, T] \\ u(x, 0, \varepsilon) = g(x, \varepsilon) \\ u(0, t, \varepsilon) = u^0 \\ u(1, t, \varepsilon) = u^1 \end{cases} \quad (1)$$

Пусть выполнены следующие условия:

(A1). $f(u, x) = 0$ достаточно гладкая функция в рассматриваемой области \bar{D} и имеет три решения $\varphi^0(x), \varphi^\pm(x)$, причем

$$\varphi^-(x) < \varphi^0(x) < \varphi^+(x), x \in \bar{D}.$$

$$(A2). \begin{cases} F_u(\varphi^\pm(x), x, 0) > 0 \\ F_u(\varphi^0(x), x, 0) < 0, x \in \bar{D}. \end{cases}$$

В этом случае возникают решения, которые при $\varepsilon \rightarrow 0$ на части $(0, x^\circ)$ интервала $(0, 1)$ стремятся к одному из корней вырожденного уравнения $\varphi^-(x)$, а на другой части интервала $(x^\circ, 1)$ к другому корню $\varphi^+(x)$. В окрестности точки x^* возникает область быстрого изменения решения-эта область называется внутренним переходным слоем. Решения имеющие внутренний переходный слой называются контрастными структурами, а точка x^* - точка перехода, она заранее неизвестна.

(A3). Пусть величина x^* определяет положение внутреннего слоя при фиксированном t

$$u(x^*, t, \varepsilon) = \varphi^0(x^*).$$

Введем функцию

$$I(x) = \int_{\varphi^-(x)}^{\varphi^+(x)} f(u, x, 0) du.$$

Будем рассматривать случай несбалансированной нелинейности.

Будем искать $x^*(t, \varepsilon)$ в виде

$$x^*(t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i x_i \quad (2)$$

В окрестности $x^*(t, \varepsilon)$ введем растянутую переменную

$$\tau(x, t, \varepsilon) = \frac{x - x^*(t, \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{r(x, t, \varepsilon)}{\varepsilon},$$

$$v(t) = \frac{\partial r(x, t)}{\partial t} \text{ - скорость дрейфа, ее также ищем в виде ряда по } \varepsilon: v(t, \varepsilon) = \sum_i \varepsilon^i v_i$$

Асимптотическое разложение слева и справа от точки перехода ищем в следующем виде

$$\begin{aligned} u^{(\pm)}(x, t, \varepsilon) &= \bar{u}^{(\pm)}(x, t, \varepsilon) + Q^{(\pm)}(\tau, \varepsilon) + R(\tau^{\pm}, \varepsilon) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \left[\bar{u}_i^{(\pm)}(x, t) + Q_i^{(\pm)}(\tau) + R_i(\tau^{\pm}) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{где } \tau^+ = \frac{1-x}{\varepsilon}, \tau^- = \frac{x}{\varepsilon}.$$

Для определения коэффициентов разложения (3) будем использовать метод пограничных функций. В качестве дополнительного условия, позволяющего определить коэффициенты разложения точки перехода, будем использовать условие С1 сшивания производных в точке перехода.

$$G(x^*, t, \varepsilon) \equiv \varepsilon \frac{\partial U^{(+)}}{\partial x}(x^*, t, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial U^{(-)}}{\partial x}(x^*, t, \varepsilon) = 0 \quad (4)$$

$$G(x^*, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i G_i(x^*, t)$$

Члены регулярной части и части с пограничным слоем определяются стандартным образом. Для определения функций переходного слоя нулевого порядка получим задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Q_0^{(\pm)}}{\partial \tau^2} + v \frac{\partial Q_0^{(\pm)}}{\partial \tau} = f(\varphi^{\pm}(x_0) + Q_0^{(\pm)}(\tau, x_0), x_0, 0), & x \in \bar{D}^{(\pm)}, \\ Q_0^{(\pm)}(+\infty, x_0) = 0, Q_0^{(\pm)}(0, x_0) = \varphi^0(x_0) - \varphi^{\pm}(x_0) \end{cases} \quad (5)$$

Известно, что решения задач (5) существуют, единственны, имеют экспоненциальную оценку. Задача для члена разложения точки перехода в нулевом порядке имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{dx_0}{dt} = v_0(x_0) \\ x_0(0) = x_{00} \end{cases} \quad (6)$$

$$v_0(x_0) = \int_{\varphi^-}^{\varphi^+} F(u, x_0, 0) du \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial Q_0^{\pm}}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right)^{-1}$$

Окончательно получим

$$x_0(t) = x_{00}, t \in [0, T].$$

(С учетом того, что $\int_{\varphi^-}^{\varphi^+} F(u, x_0, 0) du = 0$).

Для членов переходного слоя в первом порядке получаем задач

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Q_1^\pm}{\partial \tau^2} + v_0 \frac{\partial Q_1^\pm}{\partial \tau} - F_u(\tilde{u}^\pm, x_0, 0) Q_1^\pm = q^\pm(t, \tau) \\ q^\pm(t, \tau) = F_u(\tilde{u}^\pm, x_0, 0) \bar{u}'^{\pm 0}(x_0)(x_1 + \tau) + \\ + F_x(\tilde{u}^\pm, x_0, 0)(x_1 + \tau) - F_u(\bar{u}^{\pm 0}, x_0, 0) \bar{u}'^{\pm 0}(x_0)(x_1 + \tau) - F_x(\bar{u}^{\pm 0}, x_0, 0)(x_1 + \tau) - \\ - (x_1' \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial t} + a(\tilde{u}^\pm, x_0) \frac{\partial}{\partial \tau}) Q_0^\pm, v_0 = \frac{dx_0}{dt} \\ Q_1^\pm(0, t) = -x_1 \varphi'^{\pm}(x_0) + x_1 \varphi'^0(x_0) \\ Q_1^\pm(\pm\infty, t) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

где введены обозначения

$$\tilde{u}(\tau) = \begin{cases} \varphi^-(x_0) + Q_0^-(t, \tau), \tau \leq 0 \\ \varphi^+(x_0) + Q_0^+(t, \tau), \tau \geq 0 \end{cases}$$

Решение задачи (7) можно выписать в явном виде:

$$Q_1(\tau, t) = z(\tau) [Q_1(0, t) - \int_0^\tau \frac{e^{-v_0 \eta}}{z^2(\eta)} (\int_\eta^\infty z(\theta) e^{v_0 \theta} q_1(\theta, t) d\theta) d\eta], z(\tau) = \frac{\tilde{u}'(\tau)}{\tilde{u}'(0)}. \quad (8)$$

Задача для x_1 имеет вид:

$$\begin{cases} x_1' - x_1 A(x_0) = B(x_0) \\ x_1(0) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$A(x_0) = \frac{[G_{0x}(x_0, 0) - z'(0)(\varphi^+(x_0) - \varphi^-(x_0))]}{\int_{-\infty}^{+\infty} z(\xi) e^{v_0 \xi} u'(\xi) d\xi},$$

$$B(x_0) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} z(\xi) e^{v_0 \xi} \tilde{q}_1(\xi, t) d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} z(\xi) e^{v_0 \xi} u'(\xi) d\xi} \quad - \text{известные функции.}$$

Доказательство существования решения основано на методе дифференциальных неравенств. Дадим определение верхнего решения $\beta(x, t, \varepsilon)$ (определение нижнего решения $\alpha(x, t, \varepsilon)$ формулируется аналогично):

Функция $\beta(x, t, \varepsilon) \in C[0, 1] \setminus \{x^*\}$ по переменной x и $\beta(x, t, \varepsilon) \in C[0, T] \cap C^1(0, T)$ по переменной t , где $x^*(t)$ - гладкая функция по переменной t называется верхним решением задачи (1), если выполнены следующие условия:

- 1) $L(\beta) \leq 0, x \in (0,1) \setminus \{x^*\}, t \in [0, T],$
- 2) $\beta(0, t, \varepsilon) > u^0(t, \varepsilon) = u(0, t, \varepsilon); \beta(1, t, \varepsilon) > u^1(t, \varepsilon) = u(1, t, \varepsilon), t \in (0, T);$
- 3) $\beta(x, 0, \varepsilon) \geq u^0(x, \varepsilon), x \in [0, 1];$
- 4) $\beta(x, t, \varepsilon) \geq \alpha(x, t, \varepsilon), x \in [0, 1], t \in [0, T].$

Пусть $U_n(x, t, \varepsilon)$ - частичная сумма порядка n искомой асимптотики, где

$$x^* = \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon^k x_k \quad \text{Теорема :}$$

Пусть выполнены условия 1)-3). Тогда задача (1) имеет единственное классическое решение $u(x, t, \varepsilon)$ такое, что

$$|U_n(x, t, \varepsilon) - u(x, t, \varepsilon)| \leq C\varepsilon^{n+1}, x \in [0, 1], t \in (0, T]$$

Доказательство проводится путем непосредственной проверки пунктов 1)-3) определения для верхнего(нижнего) решений на модифицированной по схеме метода формальной асимптотике.

Литература:

1. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. "Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений". М. : Высш. школа, 1990.