Лекция 3

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Введение

С этой лекции мы начинаем рассмотрение различных вариационных методов исследования нелинейных операторных уравнений. В основном эти методы применяются при исследовании краевых задач для нелинейных уравнений эллиптического типа, хотя они применимы и при исследовании устойчивости стационарных решений различных эволюционных нелинейных уравнений, например, уравнения Кортевега-де-Фриза, Шредингера, а также нелинейного волнового уравнения.

§ 2. Потенциальные операторы

Прежде чем переходить к исследованию каких-то вариационных задач мы должны установить имеет ли заданная исходная нелинейная операторная задача вариационную постановку, т. е. задачу отыскания минимума или максимума некоторого функционала на некотором подмножестве банахова пространства.

Итак, пусть $\mathbb{B}$ — это некоторое банахово пространство относительно нормы $\|\cdot\|$ и скобками двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$ между $\mathbb{B}$ и его сопряженным $\mathbb{B}^*$. Пусть на этом банаховом пространстве $\mathbb{B}$ задан некоторый (нелинейный) функционал

$$\psi : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1.$$

Будем как и в предыдущей лекции обозначать символами $\psi'_g(u)$ и $\psi'_f(u)$ производные Гато и Фреше функционала ψ, соответственно.

Дадим определение *потенциального оператора*.

Определение 1. *Оператор*

$$F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

называется сильно потенциальным или потенциальным, если найдется такой дифференцируемый по Фреше функционал

$$\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1,$$

что

$$F(u) = \psi_f'(u). \tag{2.1}$$

Определение 2. *Оператор*

$$F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

называется слабо потенциальным, если найдется такой дифференцируемый по Гато функционал

$$\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1,$$

что

$$F(u) = \psi_g'(u). \tag{2.2}$$

Естественно, возникает вопрос о достаточных условиях потенциальности заданного оператора F :

$$F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*.$$

Для ответа на этот вопрос нам необходимо ввести понятие *локальной непрерывности* по Липшицу. Дадим определение.

Определение 3. *Оператор F, действующий из одного банахова пространства $\mathbb{B}_1$ в другое банахово пространство $\mathbb{B}_2$, называется локально липшиц–непрерывным* [1], *если для каждого $R > 0$ имеет место следующее неравенство*:

$$\|F(u_1) - F(u_2)\|_2 \leqslant c(R)\|u_1 - u_2\|_1 \quad \textit{для всех} \quad u_1, u_2 \in \mathbb{B}_1 \tag{2.3}$$

таких, что

$$\|u_k\|_1 \leqslant R \quad \textit{при} \quad k = 1, 2.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Оператор $F : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$, удовлетворяющий условию локальной непрерывности по Липшицу, потенциален тогда и только тогда, когда для всех $u, v \in \mathbb{B}$ имеет место равенство*

$$\int\limits_0^1 \langle F(tu), u\rangle \, dt - \int\limits_0^1 \langle F(tv), v\rangle \, dt = \\ = \int\limits_0^1 \langle F(tu + (1-t)v), u - v\rangle \, dt \quad \textit{при} \quad u, v \in \mathbb{B}. \tag{2.4}$$

[1] Также в литературе используется термин ограниченно липшиц–непрерывный оператор. Однако, это несколько другое свойство. Более детально смотри пятую лекцию.

При условии (2.4) *сильный потенциал* [1] $\psi(u)$ *оператора* F *имеет вид*:

$$\psi(u) = \psi(\vartheta) + \int\limits_0^1 \langle F(tu), u\rangle\, dt \quad \text{для всех} \quad u \in \mathbb{B}, \tag{2.5}$$

где $\vartheta \in \mathbb{B}$ — *нулевой элемент.*

Доказательство.

Шаг 1. Итак, пусть оператор F сильно потенциален, тогда найдется дифференцируемый по Фреше функционал

$$\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$$

такой, что

$$F(u) = \psi_f^{'}(u).$$

В этом случае справедлива следующая формула [2]:

$$\psi(u) - \psi(v) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\psi(tu + (1-t)v)\, dt = \int\limits_0^1 \left\langle \psi_f^{'}(tu + (1-t)v), u - v \right\rangle dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \langle F(tu + (1-t)v), u - v\rangle\, dt \tag{2.6}$$

Положим в равенстве (2.6) сначала $v = \vartheta \in \mathbb{B}$, тогда получим следующее равенство:

$$\psi(u) = \psi(\vartheta) + \int\limits_0^1 \langle F(tu), u\rangle\, dt. \tag{2.7}$$

Теперь положим в равенстве (2.6) $u = \vartheta$ и получим тогда следующее равенство:

$$\psi(v) = \psi(\vartheta) + \int\limits_0^1 \langle F(tv), v\rangle\, dt. \tag{2.8}$$

С учетом равенств (2.7) и (2.8) получим следующее выражение:

$$\psi(u) - \psi(v) = \int\limits_0^1 \langle F(tu), u\rangle\, dt - \int\limits_0^1 \langle F(tv), v\rangle\, dt.$$

Отсюда и из (2.6) приходим к (2.4).

---

[1] В дальнейшем будем называть просто потенциал.

[2] Здесь мы воспользовались формулой для производной Фреше композиции отображений.

Шаг 2. Пусть теперь для оператора F выполнено равенство (2.4). Определим функционал $\psi(u)$ равенством

$$\psi(u) := \psi(\vartheta) + \int\limits_0^1 \langle F(tu), u\rangle \, dt. \tag{2.9}$$

Докажем, что функционал $\psi(u)$ дифференцируем по Фреше и его производная Фреше равна $F(u)$. Действительно, в силу (2.4) имеет место цепочка следующих равенств:

$$\psi(u+h) - \psi(u) = \int\limits_0^1 \langle F(t(u+h)), u+h\rangle \, dt - \int\limits_0^1 \langle F(tu), u\rangle \, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \langle F(t(u+h) + (1-t)u), h\rangle \, dt. \tag{2.10}$$

Введем следующее обозначение:

$$\omega(u,h) \stackrel{\text{def}}{=} \psi(u+h) - \psi(u) - \langle F(u), h\rangle .$$

Но тогда для $\omega(u,h)$ справедливо неравенство:

$$|\omega(u,h)| \leqslant \int\limits_0^1 |\langle F(t(u+h) + (1-t)u) - F(u), h\rangle| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 \|F(t(u+h) + (1-t)u) - F(u)\|_* \, \|h\| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant c(R) \int\limits_0^1 \|t(u+h) + (1-t)u - u\| \|h\| \, dt = c(R)\|h\|^2 \frac{1}{2}$$

для всех $u, h \in \mathbb{B}$, для которых

$$\|u\| \leqslant R \quad \text{и} \quad \|h\| \leqslant R.$$

Следовательно, приходим к выводу, что

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega(u,h)|}{\|h\|} = 0.$$

Тем самым, функционал $\psi(u)$ дифференцируем по Фреше на каждом шаре $\|u\| \leqslant R$ и его производная Фреше равна

$$\psi'_f(u) = F(u).$$

Т е о р е м а д о к а з а н а.

§ 3. Формула Тейлора

Давайте зададимся вопросом о нахождении решений следующего операторного уравнения:

$$F(u) = \vartheta \in \mathbb{B}^*, \quad u \in \mathbb{B}. \tag{3.1}$$

Предположим, что оператор F потенциален и его потенциал — это функционал $\psi(u)$. Дадим определение.

О п р е д е л е н и е 3. *Пусть $M \subset \mathbb{B}$ — некоторое непустое и замкнутое подмножество. Точка $\widehat{u} \in M$ называется точкой экстремума функционала $\psi(u)$ на M, если*

$$\inf_{u \in M} \psi(u) = \psi(\widehat{u}) \quad \textit{либо} \quad \sup_{u \in M} \psi(u) = \psi(\widehat{u}).$$

Рассмотрим следующую функцию

$$\varphi(t) = \psi(\widehat{u} + th) \quad \text{при} \quad t \in (-1, 1),$$

где $\widehat{u}$ — это точка экстремума функционала $\psi(\cdot)$ на множестве $M = \mathbb{B}$. Тогда функция $\varphi(t)$ достигает экстремума в точке $t = 0$. В силу дифференцируемости функционала $\psi(u)$ по Фреше в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ приходим к выводу, что $\varphi(t)$ дифференцируема в точке $t = 0$. Но тогда необходимым условием экстремума является следующее

$$\varphi^{'}(t) = \left\langle \psi^{'}_{(}\widehat{u} + th), h \right\rangle, \ \varphi^{'}(0) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left\langle \psi^{'}_{f}(\widehat{u}), h \right\rangle = 0 \ \forall \ h \in \mathbb{B} \Rightarrow \psi^{'}_{f}(\widehat{u}) = \vartheta \in \mathbb{B}^* \Rightarrow F(\widehat{u}) = \vartheta.$$

Следовательно, с одной стороны, с необходимостью множество всех точек экстремума дифференцируемого по Фреше функционала $\psi(u)$ — есть решения операторного уравнения (3.1). С другой стороны, понятно, что не всякое решение операторного уравнения (3.1) является экстремалью функционала $\psi(u)$, поскольку равенство (3.1) лишь необходимое условие.

Попробуем найти достаточные условия существования экстремали у функционала $\psi(u)$. С этой целью нам необходимо получить формулу, аналогичную формуле Тейлора, для функционалов, дважды дифференцируемых по Фреше.

Итак, пусть M — это замкнутое, непустое подмножество банахова пространства $\mathbb{B}$, на котором рассматривается функционал ψ, дважды дифференцируемый по Фреше на M. Справедлива следующая лемма.

Л е м м а 1. *Пусть* $\psi \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$. *Для каждого* $u \in M$ *и для каждого* $h \in \mathbb{B}$ *такого, что* $u + th \in M$ *для всех* $t \in [0,1]$ *имеет место следующее выражение*:

$$\psi(u+h) = \psi(u) + \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle + \omega_2(u,h), \tag{3.2}$$

где для $\omega_2(u,h)$ *выполнено следующее предельное равенство*:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} = 0. \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Итак, пусть

$$\psi''_{ff}(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{B};\mathbb{B}^*)$$

существует и равномерно непрерывна на $M \subset \mathbb{B}$. Заметим, что для $\psi'_f(u)$ в силу дифференцируемости по Фреше справедливо следующее равенство:

$$\psi'_f(u+h) = \psi'_f(u) + \psi''_{ff}(u)h + \omega_1(u,h),$$

где

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\omega_1(u,h)\|_*}{\|h\|} = 0$$

при $u \in M$ и любом $h \in \mathbb{B}$ таком, что $u + h \in M$ при достаточно малых по норме h. Поэтому справедлива следующая цепочка равенств:

$$\psi(u+h) - \psi(u) = \int\limits_0^1 \frac{d}{dt}\psi(u+th) = \int\limits_0^1 \left\langle \psi'_f(u+th), h \right\rangle dt =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\langle \psi'_f(u) + t\psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle dt + \omega_2(u,h),$$

где

$$\omega_2(u,h) = \int\limits_0^1 \langle \omega_1(u,th), h \rangle \, dt.$$

Значит, отсюда приходим к следующему равенству:

$$\psi(u+h) - \psi(u) = \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle \int\limits_0^1 t\,dt + \omega_2(u,h) =$$

$$= \left\langle \psi'_f(u), h \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(u)h, h \right\rangle + \omega_2(u,h),$$

где для $\omega_2(u,h)$ справедливо следующее представление:

$$\omega_2(u,h) = \int\limits_0^1 \langle \omega_1(u,th), h\rangle \, dt.$$

Стало быть, приходим к неравенству

$$|\omega_2(u,h)| \leqslant \int\limits_0^1 \|\omega_1(u,th)\|_* \, \|h\| \, dt.$$

Поэтому справедливо следующее предельное неравенство:

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} \leqslant \lim_{\|h\|\to 0} \int\limits_0^1 \frac{\|\omega_1(u,th)\|_*}{\|h\|} \, dt = 0.$$

Тем самым, формулы (3.2) и (3.3) доказаны.

Лемма доказана.

§ 4. Условия экстремума функционала

Теперь мы в состоянии доказать один результат о необходимом условии экстремума функционала. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(2)}(\mathbb{B};\mathbb{R}^1)$. *Тогда необходимыми условиями минимума* (*максимума*) *в этой точке* $\widehat{u}$ *являются следующие*

$$\psi'_f(\widehat{u}) = 0 \quad \text{и} \quad \left\langle \psi''_f(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant 0 \;\; (\leqslant 0) \quad \forall\, h \in \mathbb{B}. \tag{4.1}$$

Доказательство.

Рассмотрим разложение функционала $\psi(u)$ в окрестности точки экстремума $\widehat{u} \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\widehat{u}+h) = \psi(\widehat{u}) + \left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle + \omega_2(\widehat{u},h).$$

Но как мы доказали ранее в точке $\widehat{u}$ имеет место равенство

$$\psi'_f(\widehat{u}) = 0,$$

поэтому приходим к следующему равенству:

$$\psi(\widehat{u}+h) - \psi(\widehat{u}) = \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle + \omega_2(\widehat{u},h). \tag{4.2}$$

Предположим, что $\widehat{u}$ — это точка локального минимума (максимума), но для некоторого $h_1 \in \mathbb{B}$ имеет место следующее неравенство:

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h_1, h_1 \right\rangle < 0 \; (> 0).$$

Тогда для $h = \varepsilon h_1$ при $\varepsilon > 0$ имеет место следующее выражение:

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle = \varepsilon^2 \left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h_1, h_1 \right\rangle < 0 \ (> 0).$$

Теперь, выбирая $\varepsilon > 0$ сколь угодно малым, получим, что в любой окрестности точки $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ найдется точка $\varepsilon h_1 \in \mathbb{B}$, что

$$\psi(\widehat{u} + \varepsilon h_1) - \psi(\widehat{u}) < 0 \ (> 0),$$

т. е. в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ нет минимума (максимума). Следовательно, необходимым условием минимума (максимума) в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ есть условие

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathbb{B}.$$

Лемма доказана.

Заметим, что в отличие от конечномерного анализа условие

$$\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h \right\rangle \geqslant 0 \ (\leqslant 0) \quad \text{для всех} \quad h \in \mathbb{B}.$$

не является достаточным условием минимума (максимума). Действительно, имеет место следующий пример.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим следующий функционал на банаховом пространстве $\mathbb{C}[0, 1]$ относительно стандартной supremum–нормы:

$$\psi(u) = \int_0^1 u^2(x)(x - u(x))\, dx.$$

Справедлива следующая цепочка равенств:

$$\psi(u + h) = \int_0^1 (u + h)^2(x - u - h)\, dx = \int_0^1 u^2(x - u)\, dx +$$

$$+ \int_0^1 \left(2ux - 3u^2\right) h\, dx + \int_0^1 (x - 3u)h^2\, dx - \int_0^1 h^3\, dx.$$

Из этого равенства приходим к выводу, что

$$\psi'_f(u) = 0$$

на следующих двух функциях из $\mathbb{C}[0, 1]$:

$$u(x) = 0 \quad \text{и} \quad u(x) = \frac{2}{3}x.$$

Заметим теперь, что

$$\left\langle \psi''_{ff}(0)h, h \right\rangle = 2\int_0^1 h^2(x)x\, dx \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad h(x) \in \mathbb{C}[0, 1],$$

причем,

$$\psi(0) = 0,$$

т. е. на функции $u(x) = 0$ выполнены все необходимые условия локального минимума, но, тем не менее, на функции $u(x) = 0$ функционал не достигает локального минимума. Действительно, рассмотрим следующее однопараметрическое семейство функций:

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon - x, & \text{при} \quad x \in [0, \varepsilon]; \\ 0, & \text{при} \quad x \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Очевидно, что функция $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ для всех $\varepsilon \in (0,1)$. Теперь вычислим норму этой функции

$$\sup_{x\in[0,1]} |u_\varepsilon(x)| = \varepsilon \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

т. е. в любой окрестности функции $u(x) = 0 \in \mathbb{C}[0,1]$ содержится функция $u_\varepsilon(x) \in \mathbb{C}[0,1]$ при некотором $\varepsilon > 0$. Теперь вычислим значение функционала $\psi(\cdot)$ на функции $u_\varepsilon(x)$. Действительно, имеем

$$\psi(u_\varepsilon(x)) = \int\limits_0^1 u_\varepsilon^2(x)\,(x - u_\varepsilon(x)) = -\frac{\varepsilon^4}{6} < 0 = \psi(0).$$

Тем самым, минимум у функционала $\psi(u)$ на функции $u(x) = 0$ не достигается. И это связано с тем, что, вообще говоря, при условиях (4.1) нельзя не учитывать остаточные слагаемые, входящие в $\omega_2(u,h)$.

Тем не менее, можно сформулировать теорему о достаточных условиях экстремума.

Теорема 2. *Пусть* $\psi(u) \in \mathbb{C}^{(2)}\left(\mathbb{B};\mathbb{R}^1\right)$. *Тогда при условиях*

(I) $\psi'_f(\widehat{u}) = 0$;

(II) $\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h\right\rangle \geqslant c\|h\|^2$ *(*$\leqslant -c\|h\|^2$*) для всех* $h \in \mathbb{B}$ *и* $c = c(\widehat{u}) > 0$

в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ *у функционала* $\psi(\widehat{u})$ *достигается минимум (максимум).*

Доказательство.

Докажем достаточность условий для минимума функционала $\psi(u)$ в точке $\widehat{u}$, поскольку достаточность условий для максимума проверяется аналогичным образом.

Действительно, в силу условий теоремы имеет место представление в окрестности точки $\widehat{u} \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\widehat{u} + h) - \psi(\widehat{u}) = \left\langle \psi'_f(\widehat{u}), h\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h\right\rangle + \omega_2(u,h). \tag{4.3}$$

Кроме того, поскольку имеет место предельное равенство

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega_2(u,h)|}{\|h\|^2} = 0,$$

то при достаточно малом $\|h\|$ для заданного $c > 0$ будет иметь место неравенство

$$|\omega_2(u,h)| < \frac{c}{4}\|h\|^2.$$

Тогда из (4.3) получим неравенство для таких $h \in \mathbb{B}$:

$$\psi(\widehat{u}+h) - \psi(\widehat{u}) \geqslant \frac{1}{2}\left\langle \psi''_{ff}(\widehat{u})h, h\right\rangle - \frac{c}{4}\|h\|^2 \geqslant \frac{c}{2}\|h\|^2 - \frac{c}{4}\|h\|^2 = \frac{c}{4}\|h\|^2,$$

т. е. в точке $\widehat{u} \in \mathbb{B}$ достигается минимум у функционала ψ.

Теорема доказана.

Замечание 1. При условиях теоремы 2 каждая экстремаль функционала $\psi(u) : \mathbb{B} \to \mathbb{R}^1$ является решением операторного уравнения $\psi'_f(u) = 0$.