Лекция 15

МЕТОД ВЕРХНИХ И НИЖНИХ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ

В этой лекции мы рассмотрим один из самых мощных методов исследования нелинейных краевых и начально–краевых задач. Прежде всего для эллиптических и параболических уравнений для доказательства разрешимости в слабом смысле. Этот метод может быть применен и к другим уравнениям, для которых справедлив признак сравнения решений.

§ 1. Метод верхних и нижних решений. Слабые решения

В этом параграфе мы рассмотрим метод слабых нижних и верхних решений для нелинейного уравнения Пуассона

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega, \tag{1.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — это ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$f(x) \in \mathbb{C}^{(1)}(\mathbb{R}^1), \quad \left|f'(x)\right| \leqslant \mathrm{c} \quad (x \in \mathbb{R}^1), \tag{1.2}$$

где c — константа. Здесь мы будем использовать следующие обозначения

$$H_0^1(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} W_0^{1,2}(\Omega), \quad H^{-1}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} W^{-1,2}(\Omega).$$

Определение 1.

(i) *Функция* $\overline{u}(x) \in H^1(\Omega)$ *называется слабым* *<u>верхним решением</u>* *задачи* (1.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} (D_x\overline{u}, D_x v)\, dx \geqslant \int\limits_{\Omega} f(\overline{u}) v\, dx \tag{1.3}$$

для любой функции $v(x) \in H_0^1(\Omega)$, $v(x) \geqslant 0$ *почти всюду.*

(ii) *Функция* $\underline{u}(x) \in H^1(\Omega)$ *называется слабым* *<u>нижним решением</u>* *задачи* (1.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} (D_x\underline{u}, D_x v)\, dx \leqslant \int\limits_{\Omega} f(\underline{u}) v\, dx \tag{1.4}$$

для любой функции $v(x) \in H_0^1(\Omega)$, $v(x) \geqslant 0$ *почти всюду.*

(iii) *Функция* $u(x) \in H^1(\Omega)$ *называется* *слабым решением* *задачи* (1.1), *если*

$$\int\limits_{\Omega} (D_x u, D_x v)\, dx = \int\limits_{\Omega} f(u) v\, dx \tag{1.5}$$

для любой функции $v(x) \in H^1_0(\Omega)$.

Замечание 1. Если $\overline{u}, \underline{u} \in \mathbb{C}^2(\Omega)$, то из (1.3) и (1.4) получаем

$$-\Delta \overline{u} \geqslant f(\overline{u}), \quad -\Delta \underline{u} \leqslant f(\underline{u}) \quad \text{в} \quad \Omega,$$

что соответствует классическим определениям верхних и нижних решений.

Теорема 1. *Пусть существует верхнее* $\overline{u}$ *и нижнее* $\underline{u}$ *решения задачи* (1.1) *такие, что*

$$\underline{u} \leqslant 0, \quad \overline{u} \geqslant 0 \quad \textit{на} \quad \partial\Omega \quad \textit{в смысле следов,} \quad \underline{u} \leqslant \overline{u} \quad \textit{п.в.} \quad \textit{в} \quad \Omega. \tag{1.6}$$

Тогда существует слабое решение u *задачи* (1.1) *такое, что*

$$\underline{u} \leqslant u \leqslant \overline{u} \quad \textit{п.в.} \quad \textit{в} \quad \Omega.$$

Доказательство.

Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Фиксируем достаточно большое $\lambda > 0$ так, что отображение

$$z \to f(z) + \lambda z \tag{1.7}$$

неубывающее. Такой выбор возможен в силу условия (1.2).

Теперь запишем $u_0 = \underline{u}$ и при заданных u_k $(k = 0, 1, 2...)$ индуктивно определим $u_{k+1} \in H^1_0(\Omega)$ как единственное слабое решение линейной краевой задачи, в классической постановке имеющей следующий вид:

$$-\Delta u_{k+1} + \lambda u_{k+1} = f(u_k) + \lambda u_k \quad \text{в} \quad \Omega, \quad u_{k+1} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega. \tag{1.8}$$

Шаг 2. Покажем, что

$$\underline{u} = u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_k \leqslant \cdots \quad \text{п.в.} \quad \Omega. \tag{1.9}$$

1. Для этого сначала заметим, что в силу (1.8) при $k = 0$

$$\int\limits_{\Omega} ((D_x u_1, D_x v) + \lambda u_1 v)\, dx = \int\limits_{\Omega} (f(u_0) + \lambda u_0)\, v\, dx \tag{1.10}$$

для любой $v \in H^1_0(\Omega)$. Вычитая (1.10) из (1.4), получим следующее неравенство:

$$\int\limits_{\Omega} [(D_x u_0 - D_x u_1, D_x v) + \lambda(u_0 - u_1, v)]\, dx \leqslant 0, \quad u_0 = \underline{u},$$

и полагая

$$v = (u_0 - u_1)^+ \in H^1_0(\Omega), \quad v \geqslant 0 \quad \text{почти всюду},$$

находим

$$\int\limits_{\Omega} \left(D_x(u_0-u_1), D_x(u_0-u_1)^+ + \lambda(u_0-u_1)(u_0-u_1)^+\right)\, dx \leqslant 0. \qquad (1.11)$$

Однако,

$$D_x(u_0-u_1)^+ = \begin{cases} D_x(u_0-u_1) & \text{почти всюду на } \{u_0 \geqslant u_1\}, \\ 0 & \text{почти всюду на } \{u_1 \geqslant u_0\}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{u_0 \geqslant u_1} \left[|D_x(u_0-u_1)|^2 + \lambda(u_0-u_1)^2\right]\, dx \leqslant 0,$$

откуда вытекает, что

$$u_0(x) \leqslant u_1(x) \quad \text{почти всюду на} \quad \Omega.$$

2. Теперь по индукции предположим, что

$$u_{k-1} \leqslant u_k \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \qquad (1.12)$$

Из (1.8) находим

$$\int\limits_{\Omega} [(D_x u_{k+1}, D_x v) + \lambda u_{k+1} v]\, dx = \int\limits_{\Omega} (f(u_k) + \lambda u_k)\, v\, dx \qquad (1.13)$$

и

$$\int\limits_{\Omega} [(D_x u_k, D_x v) + \lambda u_k v]\, dx = \int\limits_{\Omega} (f(u_{k-1}) + \lambda u_{k-1})\, v\, dx \qquad (1.14)$$

для любых $v \in H_0^1(\Omega)$. Вычитая и полагая

$$v = (u_k - u_{k+1})^+,$$

находим

$$\int\limits_{u_k \geqslant u_{k+1}} \left[|D_x(u_k-u_{k+1})|^2 + \lambda\,(u_k-u_{k+1})^2\right]\, dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega} [(f(u_{k-1}) + \lambda u_{k-1}) - (f(u_k) + \lambda u_k)]\,(u_k - u_{k+1})^+\, dx \leqslant 0.$$

Последнее неравенство верно в силу (1.12) и (1.7). Поэтому $u_k \leqslant u_{k+1}$ почти всюду в Ω, как и утверждалось.

Шаг 3. Теперь покажем, что

$$u_k \leqslant \overline{u} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega \quad (k = 0, 1, 2...). \qquad (1.15)$$

При $k = 0$ (1.15) верно в силу (1.6). Пусть для некоторого k

$$u_k \leqslant \overline{u} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega. \qquad (1.16)$$

Вычитая (1.3) из (1.13) и полагая

$$v := (u_{k+1} - \overline{u})^+ ,$$

находим

$$\int\limits_{u_{k+1} \geqslant \overline{u}} \left[|D(u_{k+1} - \overline{u})|^2 + \lambda (u_{k+1} - \overline{u})^2 \right] dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega} \left[(f(u_k) + \lambda u_k) - (f(\overline{u}) + \lambda \overline{u}) \right] (u_{k+1} - \overline{u})^+ \, dx \leqslant 0$$

в силу (1.16) и (1.7). Таким образом, $u_{k+1} \leqslant \overline{u}$ почти всюду в Ω.

Шаг 4.

1. Ввиду (1.9) и (1.15)

$$\underline{u} \leqslant \cdots \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant \overline{u} \quad \text{почти всюду в} \quad \Omega. \tag{1.17}$$

Поэтому

$$u(x) := \lim_{k \to +\infty} u_k(x) \tag{1.18}$$

существует для почти всюду $x \in \Omega$. Кроме того,

$$u_k \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad k \to +\infty, \tag{1.19}$$

что гарантируется теоремой Лебега о мажорируемой сходимости и (1.17).

□ Действительно, имеем

$$|u_k(x) - u(x)| \leqslant 2 \max \{ |u_k(x)|, |u(x)| \} , \quad |u_k(x)| \leqslant V(x), \quad |u(x)| \leqslant V(x),$$
$$V(x) := \max \{ |\underline{u}(x)|, |\overline{u}(x)| \} \in L^2(\Omega),$$

поскольку $\underline{u}(x), \overline{u}(x) \in H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. В совокупности с (1.18) получаем утверждение. ⊠

2. Наконец, имеет место формула Лагранжа

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f'(\xi), \quad \xi \in [z, z_0].$$

В силу неравенства $|f'(x)| \leqslant c$ отсюда получаем неравенство

$$|f(z) - f(z_0)| \leqslant c |z - z_0|.$$

Из этого неравенства мы получаем два важных вывода. Во–первых, имеет место неравенство при $z = u_k$ и $z_0 = u$

$$\| f(u_k) - f(u) \|_{L^2(\Omega)} \leqslant c \| u_k - u \|_{L^2(\Omega)},$$

из которого в силу (1.19) вытекает, что

$$f(u_k) \to f(u) \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Во вторых, имеют место следующие неравенства:

$$
\begin{aligned}
|f(z)|^2 = (f(z_0) + (z - z_0)f^{'}(\xi))^2 \leqslant \\
\leqslant 2|f(z_0)|^2 + 2c^2|z - z_0|^2 \leqslant \\
\leqslant 2|f(z_0)|^2 + 4c^2|z_0|^2 + 4c^2|z|^2,
\end{aligned}
$$

в котором положим теперь $z = u_k$ и при фиксированном $z_0 \in \mathbb{R}^1$ проинтегрируем по ограниченной области Ω, тогда получим неравенство

$$
\|f(u_k)\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c_1 + c_2\|u_k\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{1.20}
$$

3. Из (1.8) скалярным в смысле скобок двойственности

$$
\langle \cdot, \cdot \rangle : H^{-1}(\Omega) \otimes H^1_0(\Omega) \to \mathbb{R}^1
$$

умножением на $u_{k+1} \in H^1_0(\Omega)$ получаем равенство

$$
\langle -\Delta u_{k+1} + \lambda u_{k+1}, u_{k+1} \rangle = \langle f(u_k) + \lambda u_k, u_{k+1} \rangle .
$$

После «интегрирования по частям» отсюда в силу (1.20) получим следующую цепочку выражений:

$$
\begin{aligned}
\|D_x u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} = \\
= \int\limits_\Omega f(u_k)u_{k+1}\, dx + \lambda \int\limits_\Omega u_k u_{k+1}\, dx \leqslant \\
\leqslant \lambda\frac{\varepsilon}{2}\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\lambda 2\varepsilon}\|f(u_k)\|^2_{L^2(\Omega)} + \\
+ \lambda\frac{\varepsilon}{2}\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2\varepsilon}\|u_k\|^2_{L^2(\Omega)} = \\
= \lambda\varepsilon\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + c_5(\varepsilon, \lambda)\left(1 + \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)}\right),
\end{aligned}
$$

из которого вытекает неравенство

$$
\|D_x u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda(1 - \varepsilon)\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c_5(\varepsilon, \lambda)\left(1 + \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
$$

В этом неравенстве положим

$$
\varepsilon = \frac{1}{2},
$$

тогда получим неравенство

$$
\|D_x u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c_6(\lambda)\left(1 + \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)}\right).
$$

Значит, имеем

$$
\|D_x u_{k+1}\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant c_6(\lambda)(1 + \|u_k\|^2_{L^2(\Omega)}),
$$

из которого в силу (1.19) приходим к оценке

$$
\sup_k \|u_k\|_{H^1_0(\Omega)} < +\infty.
$$

Поэтому существует подпоследовательность $\{u_{k_j}\}$ последовательности $\{u_k\}$, что имеет место предельное свойство

$$u_{k_j} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad H^1_0(\Omega) \quad \text{при} \quad k_j \to +\infty. \tag{1.21}$$

Шаг 5. Наконец, проверим, что u — это слабое решение задачи (1.1). Для этого фиксируем $v \in H^1_0(\Omega)$. Тогда из (1.8) находим

$$\int\limits_\Omega \left[\bigl(D_x u_{k_j}, D_x v\bigr) + \lambda u_{k_j} v\right] dx = \int\limits_\Omega \bigl(f(u_{k_j-1}) + \lambda u_{k_j-1}\bigr)\, v\, dx. \tag{1.22}$$

Устремляя $k_j \to +\infty$, имеем

$$f(u_{k_j-1}) \to f(u) \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega), \quad u_{k_j-1} \to u \quad \text{сильно в} \quad L^2(\Omega)$$

при $k_j \to +\infty$. Поэтому из (1.22) с учетом (1.21) получим, что имеет место предельное равенство

$$\int\limits_\Omega \left[(D_x u, D_x v) + \lambda u v\right] dx = \int\limits_\Omega (f(u) + \lambda u)\, v\, dx.$$

Сокращая член, содержащий λ, приходим к требуемому равенству

$$\int\limits_\Omega (D_x u, D_x v)\; dx = \int\limits_\Omega f(u) v\, dx.$$

Что и требовалось доказать.

Теорема доказана.

§ 2. Литературные указания

В данной лекции мы использовали материал, изложенный в работе [?].