Лекция 12

МЕТОД МОНОТОННЫХ ОПЕРАТОРОВ. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

§ 1. Основные понятия теории монотонных операторов

Пусть $\mathbb{B}$ — это банахово пространство с сильным сопряженным $\mathbb{B}^*$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — это скобки двойственности между этими банаховыми пространствами. Через $\|\cdot\|$ обозначим норму банахова пространства $\mathbb{B}$, а через $\|\cdot\|_*$ — норму банахова пространства $\mathbb{B}^*$. Дадим некоторые определения.

Определение 1. *Оператор $\mathbb{A}:\mathbb{B}\to\mathbb{B}^*$ называется*

(i) *радиально непрерывным, если при любых фиксированных $u,v\in\mathbb{B}$ вещественная функция $s\to\langle\mathbb{A}(u+sv),v\rangle$ непрерывна на отрезке $[0,1]$;*

(ii) *деминепрерывным, если из $u_n\to u$ сильно в $\mathbb{B}$ следует, что*

$$\mathbb{A}u_n\rightharpoonup\mathbb{A}u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B}^*;$$

(iii) *липшиц-непрерывным, если существует такая постоянная M, что*

$$\|\mathbb{A}u-\mathbb{A}v\|\leqslant M\|u-v\|$$

для любых $u,v\in\mathbb{B}$;

(iv) *ограниченно липшиц-непрерывным, если существует неубывающая и ограниченная на компактах функция μ на $[0,+\infty)$, такая, что для любых $u,v\in\mathbb{B}$*

$$\|\mathbb{A}u-\mathbb{A}v\|\leqslant\mu(R)\|u-v\|,$$

где $R=\max\{\|u\|,\|v\|\}$.

Теперь дадим определения различных вариантов свойства монотонности операторов.

Определение 2. *Пусть u,v — произвольные элементы из $\mathbb{B}$. Оператор $\mathbb{A}:\mathbb{B}\to\mathbb{B}^*$ называется:*

(i) *монотонным, если*

$$\langle\mathbb{A}u-\mathbb{A}v,u-v\rangle\geqslant0;$$

(ii) *строго монотонным, если*

$$\langle \mathbb{A}u - \mathbb{A}v, u - v\rangle > 0 \quad \text{для} \quad u \neq v;$$

(iii) *сильно монотонным* (*с постоянной монотонности* m), *если*

$$\langle \mathbb{A}u - \mathbb{A}v, u - v\rangle \geqslant m\|u - v\|^2, \quad m > 0;$$

(iv) *локально ограниченным, если для любого фиксированного* $u \in \mathbb{X}$ *существуют постоянные* $\varepsilon > 0$ *и* M, *такие, что* $\|\mathbb{A}v\|_* \leqslant M$ *при* $\|u - v\| \leqslant \varepsilon$.

Наконец, напомним определение важного свойства операторов — *коэрцитивности* операторов.

Определение 3. *Оператор* $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *называется коэрцитивным, если существует определенная на* $[0, +\infty)$ *вещественная функция* $\gamma(s)$, *удовлетворяющая предельному свойству с*

$$\lim_{s\to+\infty} \gamma(s) = +\infty,$$

такая, что

$$\langle \mathbb{A}u, u\rangle \geqslant \gamma(\|u\|)\|u\|.$$

Для дальнейшего нам необходимы следующие вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Каждый монотонный оператор* $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *локально ограничен.*

Доказательство.

Шаг 1. Допустим, что $\mathbb{A}$ не является локально ограниченным. Тогда существует последовательность $\{u_n\}$, такая, что $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{B}$ и $\|\mathbb{A}u_n\|_* \to +\infty$. Без ограничения общности можно считать, что

$$\|\mathbb{A}u_n\|_* > 1 \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Шаг 2. Для $n = 1, 2...$ положим

$$\alpha_n = 1 + \|\mathbb{A}u_n\|_*\|u_n - u\|.$$

В силу монотонности $\mathbb{A}$, для любого $v \in \mathbb{B}$ имеем

$$\langle \mathbb{A}u_n - \mathbb{A}(u + v), u_n - u - v\rangle \geqslant 0$$

и поэтому имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha_n}\langle \mathbb{A}u_n, v\rangle &\leqslant \frac{1}{\alpha_n}\left(\langle \mathbb{A}u_n, v\rangle + \langle \mathbb{A}u_n - \mathbb{A}(u+v), u_n - u - v\rangle\right) \leqslant \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha_n}\left(\langle \mathbb{A}u_n, u_n - u\rangle + \langle \mathbb{A}(u+v), v + u - u_n\rangle\right) \leqslant \\
&\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha_n}\|\mathbb{A}(u+v)\|_*\left(\|v\| + \|u - u_n\|\right) \leqslant
\end{aligned}$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha_n}\|\mathbb{A}(u+v)\|_* \left(\|v\| + \|\mathbb{A}u_n\|_*\|u-u_n\|\right) \leqslant M_1, \quad (1.1)$$

где постоянная M_1 зависит от u, v, но не зависит от n.

Шаг 3. Соответствующая оценка справедлива и для $-v$. Таким образом,

$$\limsup_{n\to+\infty}\left|\frac{1}{\alpha_n}\langle \mathbb{A}u_n, v\rangle\right| < +\infty \quad \forall\, v \in \mathbb{B},$$

откуда вытекает следующая цепочка неравенств:

$$\frac{1}{\alpha_n}\|Au_n\|_* = \frac{1}{\alpha_n}\sup_{\|v\|\leqslant 1}|\langle \mathbb{A}u_n, v\rangle| \leqslant M_1$$

т. е.

$$\|\mathbb{A}u_n\|_* \leqslant M_1\alpha_n = M_1\left(1 + \|\mathbb{A}u_n\|_*\|u-u_n\|\right).$$

Пусть $n_0 \in \mathbb{N}$ выбрано так, чтобы для $n \geqslant n_0$ выполнялось условие

$$M_1\|u-u_n\| \leqslant 1/2.$$

Тогда из последнего неравенства следует, что при $n \geqslant n_0$

$$\|\mathbb{A}u_n\|_* \leqslant 2M_1.$$

Но это противоречит тому факту, что $\|\mathbb{A}u_n\|_* \to +\infty$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая лемма:

Лемма 2. *Каждый линейный монотонный оператор $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ сильно непрерывен.*

Доказательство.

Пусть $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{B}$. Положим

$$v_n = \begin{cases} (u_n - u)\Big/\|u_n-u\|^{1/2}, & \text{при} \quad u_n \neq u; \\ 0, & \text{при} \quad u_n = u. \end{cases}$$

Тогда $v_n \to 0$ сильно в $\mathbb{B}$ и по лемме 1

$$\|\mathbb{A}v_n\|_* \leqslant M = const.$$

Отсюда получаем

$$\|\mathbb{A}u_n - \mathbb{A}u\|_* = \|u_n-u\|^{1/2}\|\mathbb{A}v_n\|_* \leqslant M\|u_n-u\|^{1/2} \to +0.$$

Лемма доказана.

Справедлива следующая важная лемма.

Лемма 3. *Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ — монотонный оператор. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1. *оператор $\mathbb{A}$ радиально непрерывен*;
2. *из $\langle f - \mathbb{A}v, u - v\rangle \geqslant 0\ \forall\, v \in \mathbb{B}$ следует $\mathbb{A}u = f$*;
3. *из соотношений*

$$u_n \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

$$\mathbb{A}u_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad *-\textit{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \textit{при} \quad n \to +\infty,$$

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle \leqslant \langle f, u\rangle$$

следует, что $\mathbb{A}u = f$;

4. *оператор* $\mathbb{A}$ *деминепрерывен*;
5. *если* K *— плотное подмножество в* $\mathbb{B}$, *то из* $\langle f - \mathbb{A}v, u - v\rangle \geqslant 0$ $\forall\, v \in K$ *следует* $\mathbb{A}u = f$.

Доказательство.

Шаг 1. 1. $\Rightarrow$ 2. Пусть v — произвольный элемент из $\mathbb{B}$ и $v_t = u - tv$, $t > 0$. Имеем

$$0 \leqslant \langle f - \mathbb{A}v_t, u - v_t\rangle = \langle f - \mathbb{A}v_t, tv\rangle = t\langle f - \mathbb{A}v_t, v\rangle$$

или, после деления на t, $0 \leqslant \langle f - \mathbb{A}v_t, v\rangle$. Отсюда при $t \to 0$ получаем в силу радиальной непрерывности оператора $\mathbb{A}$ неравенство

$$0 \leqslant \langle f - \mathbb{A}u, v\rangle.$$

Ввиду произвольности $v \in \mathbb{B}$ из этого неравенства следует, что $\mathbb{A}u = f$.

$\square$ Действительно, пусть, например,

$$\langle f - \mathbb{A}u, v\rangle > 0 \quad \text{при некотором} \quad v \in \mathbb{B},$$

но тогда при $-v$ мы получим неравенство

$$0 \leqslant \langle f - \mathbb{A}u, -v\rangle \Rightarrow 0 < \langle f - \mathbb{A}u, v\rangle \leqslant 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$\langle f - \mathbb{A}u, v\rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbb{B} \Rightarrow f - \mathbb{A}u = \vartheta^* \in \mathbb{B}^*. \quad \boxtimes$$

Шаг 2. 2. $\Rightarrow$ 3. Пусть $u_n \rightharpoonup u$ слабо в $\mathbb{B}$, $\mathbb{A}u_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ $*$–слабо в $\mathbb{B}^*$ при $n \to +\infty$ и

$$\limsup_{n\to+\infty} \langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle \leqslant \langle f, u\rangle.$$

Тогда для произвольного $v \in \mathbb{B}$ имеем

$$\begin{aligned}\langle f - \mathbb{A}v, u - v\rangle = \langle f, u\rangle - \langle f, v\rangle - \langle \mathbb{A}v, u - v\rangle \geqslant \\ \geqslant \limsup_{n\to+\infty} \left(\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle - \langle f, v\rangle - \langle \mathbb{A}v, u - v\rangle\right) = \\ = \limsup_{n\to+\infty} \left(\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle - \langle \mathbb{A}u_n, v\rangle - \langle \mathbb{A}v, u_n - v\rangle\right) = \\ = \limsup_{n\to+\infty} \langle \mathbb{A}u_n - \mathbb{A}v, u_n - v\rangle \geqslant 0.\end{aligned}$$

Отсюда на основании свойства 2. вытекает, что $\mathbb{A}u = f$.

Шаг 3. 3. $\Rightarrow$ 4.

1. Пусть $u_n \to u$ сильно в $\mathbb{B}$ при $n \to +\infty$.

2. Вследствие локальной ограниченности оператора $\mathbb{A}$ последовательность $\{\|\mathbb{A}u_n\|_*\}$ ограничена. Тогда найдется такая подпоследовательность $\{v_n\}$ последовательности $\{u_n\}$, такая, что

$$\mathbb{A}v_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Ясно, что при этом имеем

$$v_n \to u \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тогда имеет место следующее равенство:

$$\langle \mathbb{A}v_n, v_n \rangle = \langle \mathbb{A}v_n, v_n - u \rangle + \langle \mathbb{A}v_n, u \rangle,$$

причем

$$|\langle \mathbb{A}v_n, v_n - u \rangle| \leqslant \|\mathbb{A}v_n\|_* \|v_n - u\| \leqslant M_1 \|v_n - u\| \to +0,$$
$$\langle \mathbb{A}v_n, u \rangle \to \langle f, u \rangle$$

при $n \to +\infty$. Тогда имеем

$$\lim_{n \to +\infty} \langle \mathbb{A}v_n, v_n \rangle = \langle f, u \rangle,$$

откуда, в силу свойства 3., $\mathbb{A}u = f$ и

$$\mathbb{A}v_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbb{A}u \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

3. Теперь предположим, что найдется такая подпоследовательность $\{w_n\} \subset \{u_n\}$, что последовательность $\{\mathbb{A}w_n\}$ не сходится $*$–слабо в $\mathbb{A}u$. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$ и такой элемент $z \in \mathbb{B}$, что для некоторой подпоследовательности $\{w_n\} \subset \{u_n\}$ выполнено неравенство

$$|\langle \mathbb{A}w_n, z \rangle - \langle \mathbb{A}u, z \rangle| > \varepsilon \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

Отметим, что

$$\|\mathbb{A}w_n\|_* \leqslant M_1 \quad \text{и} \quad w_n \to u \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Тогда повторяя рассуждения, мы получим, что найдется такая ее подпоследовательность $\{w_{n_n}\}$, что

$$\mathbb{A}w_{n_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbb{A}u \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

При этом для $\{w_{n_n}\}$ должно быть выполнено неравенство (1.2). Полученное противоречие доказывает, что

$$\mathbb{A}u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \mathbb{A}u \quad * -\text{слабо в} \quad \mathbb{B}^* \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Шаг 4. 4. $\Rightarrow$ 5. Очевидно, что $\mathbb{A}$ как деминепрерывный оператор является радиально непрерывным. Поскольку 1. $\Rightarrow$ 2., то достаточно показать, что из

$$\langle f - \mathbb{A}v, u - v \rangle \geqslant 0 \; \forall\, v \in K \Rightarrow \langle f - \mathbb{A}v, u - v \rangle \geqslant 0 \; \forall\, v \in \mathbb{B}$$

Так как K плотно в $\mathbb{B}$, то для каждого $v \in \mathbb{B}$ существует последовательность $\{v_n\}$, такая, что

$$v_n \in K, \quad v_n \to v \quad \text{сильно в} \quad \mathbb{B} \quad n \to +\infty.$$

Используя деминепрерывность, получаем

$$\langle f - \mathbb{A}v, u - v\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle f - \mathbb{A}v_n, u - v_n\rangle.$$

Шаг 5. 5. $\Rightarrow$ 1. В частном случае $\mathbb{K} = \mathbb{X}$ утверждение 5. совпадает с 2. Но из 2., как уже было доказано, следует деминепрерывность, а значит, и радиальная непрерывность оператора $\mathbb{A}$.

Лемма доказана.

Справедлива следующая вспомогательная лемма:

Лемма 4. *Пусть $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ — радиально непрерывный монотонный оператор. Тогда при любом $f \in \mathbb{B}^*$ множество $K(f)$ решений уравнения $\mathbb{A}u = f$ выпукло и слабо замкнуто.*

Доказательство.

Шаг 1. Пусть $u_1, u_2 \in K(f)$ и $u_t = tu_1 + (1-t)u_2$, $t \in [0,1]$. Тогда для любого $v \in \mathbb{B}$

$$\begin{aligned}&\langle f - \mathbb{A}v, u_t - v\rangle = \\ &\qquad = \langle f - \mathbb{A}v, tu_1 - tv\rangle + \langle f - \mathbb{A}v, (1-t)u_2 - (1-t)v\rangle = \\ &\qquad\qquad = t\langle \mathbb{A}u_1 - \mathbb{A}v, u_1 - v\rangle + (1-t)\langle \mathbb{A}u_2 - \mathbb{A}v, u_2 - v\rangle \geqslant 0\end{aligned}$$

откуда в силу леммы 3 свойства 2 вытекает

$$\mathbb{A}u_t = f,$$

т. е. $K(f)$ выпукло.

Шаг 2. Пусть $\{u_n\}$ — последовательность элементов $u_n \in K$, такая, что $u_n \rightharpoonup u$ в $\mathbb{B}$. Для любого $v \in \mathbb{B}$ имеем

$$\langle f - \mathbb{A}v, u - v\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle f - \mathbb{A}v, u_n - v\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle \mathbb{A}u_n - \mathbb{A}v, u_n - v\rangle \geqslant 0,$$

поскольку $\mathbb{A}u_n = f$. Таким образом, в силу леммы 3 свойства 2 вытекает

$$\mathbb{A}u = f,$$

т. е. $K(f)$ слабо замкнуто.

Лемма доказана.

§ 2. Теорема существования Браудера–Минти

В этом параграфе мы изложим важную теорию Браудера–Минти монотонных, коэрцитивных операторов, нашедшую важное приложение в теории эллиптических краевых задач.

Справедлива следующая основная теорема.

Теорема Браудера–Минти. *Пусть* $\mathbb{A}:\mathbb{B}\to\mathbb{B}^*$ — *радиально непрерывный монотонный коэрцитивный оператор. Тогда множество решений уравнения*

$$\mathbb{A}u = f \tag{2.1}$$

при любом $f\in\mathbb{B}^*$ *непусто, слабо замкнуто и выпукло.*

Доказательство.

Шаг 1. Ввиду леммы 4 нам надо лишь показать, что (2.1) имеет по крайней мере одно решение. Пусть $\{h_n\}\subset\mathbb{B}$ — какая-нибудь полная система линейно независимых элементов в $\mathbb{B}$, и пусть $\mathbb{B}_n$ — замкнутая линейная оболочка векторов $\{h_1,...,h_n\}$. Тогда соответствие

$$C:\mathbb{R}^n\ni\{a_1,...,a_n\}\to\sum_{i=1}^n a_ih_i=u_n$$

определяет взаимно однозначное непрерывное отображение $\mathbb{C}$ пространства $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{B}_n$. Очевидно,

$$|a|_1=\|Ca\| \quad \forall\, a\in\mathbb{R}^n$$

является нормой на $\mathbb{R}^n$. В силу эквивалентности всех норм на конечномерном пространстве имеем

$$|a|\leqslant c|a|_1=c\|Ca\|.$$

Шаг 2. Определим оператор $\mathbb{T}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ по правилу

$$\mathbb{T}a=\{b_1,...,b_n\},\quad b_i=\langle\mathbb{A}Ca-f,h_i\rangle.$$

Поскольку $\mathbb{A}$ как радиально непрерывный монотонный оператор деминепрерывен (лемма 3), оператор $\mathbb{T}$ непрерывен. Из коэрцитивности $\mathbb{A}$ следует, что для достаточно больших $R_1>0$

$$\left(\frac{\langle\mathbb{A}u_n,u_n\rangle}{\|u_n\|}-\|f\|_*\right)\|u_n\|\geqslant 0 \quad \text{при} \quad \|u_n\|\geqslant R_1.$$

Поэтому для $|a|=R=R_1c$

$$(\mathbb{T}a,a)=\sum_{i=1}^n b_ia_i=\langle\mathbb{A}u_n,u_n\rangle-\langle f,u_n\rangle\geqslant$$
$$\geqslant\left(\frac{\langle\mathbb{A}u_n,u_n\rangle}{\|u_n\|}-\|f\|_*\right)\|u_n\|\geqslant 0.$$

Следовательно, согласно лемме об остром угле, существует такое $a\in\mathbb{R}^n$, что $\mathbb{T}a=0$. Значит, для $u_n=Ca$

$$\langle\mathbb{A}u_n,h_i\rangle=\langle f,h_i\rangle,\quad i=1,...,n. \tag{2.2}$$

Таким образом, существует решение задачи (2.2).

Шаг 3. Из оценки
$$\frac{\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle}{\|u_n\|} \leqslant \|f\|_*$$
и коэрцитивности $\mathbb{A}$ вытекает, что $\|u_n\| \leqslant M_1$.

☐ Действительно, в противном случае мы бы имели
$$\lim_{\|u_n\|\to+\infty} \frac{\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle}{\|u_n\|} = +\infty. \quad \boxtimes$$
Поэтому
$$\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle \leqslant M_2 \quad \text{для} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Шаг 4. Докажем теперь, что из условий $\|u_n\| \leqslant M_1$ и $\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle \leqslant M_2$ вытекает, что
$$\|\mathbb{A}u_n\|_* \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

☐ Действительно, в силу монотонности оператора $\mathbb{A}$ он является локально ограниченным в нуле. Поэтому существуют такие постоянные $\varepsilon > 0$ и $M_3 > 0$, что имеет место следующие неравенства:
$$\|\mathbb{A}v\|_* \leqslant M \quad \text{для всех} \quad \|v\| \leqslant \varepsilon.$$
Справедливо неравенство в силу монотонности оператора $\mathbb{A}$.
$$\langle \mathbb{A}u_n - \mathbb{A}v, u_n - v\rangle \geqslant 0 \Rightarrow \langle \mathbb{A}u_n, v\rangle \leqslant \langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle + \langle \mathbb{A}v, v\rangle - \langle \mathbb{A}v, u_n\rangle.$$
Поэтому
$$\begin{aligned}\|\mathbb{A}u_n\|_* = \sup_{\|v\|\leqslant\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} |\langle \mathbb{A}u_n, v\rangle| \leqslant \\ \leqslant \sup_{\|v\|\leqslant\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} |\langle \mathbb{A}u_n, u_n\rangle + \langle \mathbb{A}v, v\rangle - \langle \mathbb{A}v, u_n\rangle| \leqslant \\ \leqslant \sup_{\|v\|\leqslant\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} [M_2 + \|\mathbb{A}v\|_*\|v\| + \|\mathbb{A}v\|_*\|u_n\|] \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\varepsilon} (M_2 + M_3\varepsilon + M_3M_1) = M. \quad \boxtimes\end{aligned}$$

Шаг 5. Далее, в силу (2.2)
$$\lim_{n\to+\infty} \langle \mathbb{A}u_n, h\rangle = \langle f, h\rangle \quad \forall\, h \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{B}_n.$$
Отсюда следует, что $\mathbb{A}u_n \rightharpoonup f$ слабо в $\mathbb{B}^*$. Пусть $\{u_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{u_n\}$, такая, что
$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad \mathbb{B} \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Покажем, что u является решением уравнения (2.1). Из (2.2) получаем

$$\lim_{k\to+\infty}\langle \mathbb{A}u_{n_k}, u_{n_k}\rangle = \lim_{k\to+\infty}\langle f, u_{n_k}\rangle = \langle f, u\rangle.$$

Но тогда согласно лемме 3 пункта 3 $\mathbb{A}u = f$.

Теорема доказана.

Справедливо следующая важная теорема:

Теорема 2. *Пусть оператор* $\mathbb{A} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *радиально непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Тогда существует обратный оператор* $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$, *и этот обратный оператор строго монотонен, ограничен и деминепрерывен.*

Доказательство. Доказательство проведем в четыре шага.

Шаг 1. Оператор $\mathbb{A}^{-1} : \mathbb{B}^* \to \mathbb{B}$ существует. Очевидно, достаточно показать, что уравнение $\mathbb{A}u = f$ при любом $f \in \mathbb{B}^*$ имеет точно одно решение. Теорема 1 гарантирует существование хотя бы одного решения u. Пусть v — другое решение. Тогда

$$\langle \mathbb{A}u - \mathbb{A}v, u - v\rangle = 0.$$

Вследствие строгой монотонности $\mathbb{A}$ отсюда следует, что $u = v$.

Шаг 2. Оператор $\mathbb{A}^{-1}$ строго монотонен. Пусть $f, g \in \mathbb{B}^*$, $f \neq g$. Полагая $u = \mathbb{A}^{-1}f$, $v = \mathbb{A}^{-1}g$, в силу монотонности $\mathbb{A}$ имеем

$$\langle f - g, \mathbb{A}^{-1}f - \mathbb{A}^{-1}g\rangle = \langle \mathbb{A}u - \mathbb{A}v, u - v\rangle > 0.$$

Шаг 3. Оператор $\mathbb{A}^{-1}$ ограничен. Пусть $\mathbb{A}u = f$ и $\|f\|_* \leqslant M$. Тогда $\langle \mathbb{A}u, u\rangle \geqslant \gamma(\|u\|)\|u\|$ и, следовательно, $\gamma(\|u\|) \leqslant \|f\|_*$. Так как $\gamma(s) \to +\infty$ при $s \to +\infty$, то отсюда вытекает, что

$$\|u\| = \|\mathbb{A}^{-1}f\| \leqslant K$$

с постоянной K, зависящей только от M.

Шаг 4. Оператор $\mathbb{A}^{-1}$ деминепрерывен. В силу леммы 5 достаточно показать, что из соотношения

$$\langle f - g, u - \mathbb{A}^{-1}g\rangle \geqslant 0 \quad \forall\, g \in \mathbb{B}^* \tag{2.3}$$

следует равенство $u = \mathbb{A}^{-1}f$. Пусть (2.3) выполнено. Тогда для любого $v \in \mathbb{B}$ и для $g = \mathbb{A}v$ имеем

$$\langle f - \mathbb{A}v, u - v\rangle = \langle f - g, u - \mathbb{A}^{-1}g\rangle \geqslant 0.$$

Ввиду радиальной непрерывности $\mathbb{A}$ отсюда следует по лемме 5, что $f = \mathbb{A}u$, т. е. $u = \mathbb{A}^{-1}f$.

Теорема доказана.