Лекция 11

МЕТОД ГАЛЕРКИНА И МОНОТОННОСТИ. ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

В этой лекции мы рассмотрим применение метода Галеркина в сочетании с методом монотонных операторов, который успешно может быть применен к задачам с главным нелинейным монотонным оператором.

§ 1. Введение

Рассмотрим следующую краевую задачу

$$-\Delta u = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.1}$$

где $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — это ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$, понимаемую сначала в классическом смысле, т. е. поточечно.

Хорошо известно, что если функция $f(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\Omega)$ при $\alpha \in (0, 1]$, то существует единственное классическое решение этой задачи в Гельдеровском пространстве

$$u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\Omega).$$

Однако, довольно часто в физических задачах возникает ситуация, когда функция $f(x)$ теряет свойство быть даже непрерывной на каком-то множестве из области Ω. Поэтому возникает необходимость каким–то образом обобщить понятие решения задачи.

С этой целью заметим, что во–первых, многие краевые задачи появляются в физике как некоторое интегральное равенство, а не поточечное. Во–вторых, умножим обе части равенства (1.1) на функцию $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^{\infty}(\Omega)$ и проинтегрируем получившееся равенство по области Ω в смысле Лебега. После чего воспользовавшись формулой интегрирования по частям мы получим следующее равенство:

$$\int\limits_{\Omega} (D_x u(x), D_x \varphi(x)) \, dx = \int\limits_{\Omega} f(x)\varphi(x) \, dx \tag{1.2}$$

для всех $\varphi(x) \in \mathbb{C}_0^{\infty}(\Omega)$.

Заметим, что при такой постановки правая часть равенства (1.2) определена и для разрывных функциях, только бы она была локально интегрируемой. Именно, такого вида интегральное равенство, которое в классическом смысле эквивалентно (в силу основной леммы вариационного исчисления) краевой задаче (1.1), берут за основу при формулировке *слабого решения краевой задачи.*

В следующих параграфах мы рассмотрим различные краевые задачи для нелинейных эллиптических уравнений и рассмотрим некоторые методы их исследования. При этом мы делаем упор на слабую формулировку рассматриваемых задач и на метод *слабой сходимости.*

§ 2. Метод Галеркина и монотонности

Рассмотрим следующую краевую задачу для одного из самых известных нелинейных эллиптических операторов, в классической постановке имеющей вид:

$$-\operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u) = f(x), \quad u|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \tag{2.1}$$

Очевидно, что при $p = 2$ приходим к задаче (1.1). Поскольку курс лекций адресован в первую очередь физикам мы приведем для полноты изложения вывод краевой задачи (2.1).

Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ имеем гладкую поверхностно–односвязную границу $\partial\Omega \in \mathbb{C}^{2,\delta}$ при $\delta \in (0, 1]$. Рассмотрим приближение квазистационарного поля, а именно электрическую часть системы уравнений Максвелла в квазистационарном приближении (см., например, [**?**]):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi n(x), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{2.2}$$

где распределение плотности свободных зарядов, описываемое функцией $n = n(x)$ считается заданным. Теперь предположим, что зависимость $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E})$ является нелинейной, причем соответствует так называемой керровской нелинейности

$$\mathbf{D} = |\mathbf{E}|^{p-2}\mathbf{E} \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \tag{2.3}$$

Поскольку область Ω имеет поверхностно–односвязную границу, то можно ввести потенциал электрического поля согласно формуле

$$\mathbf{E} = -D_x \varphi. \tag{2.4}$$

Кроме того, предположим, что границы области Ω «заземлена», поэтому с учетом известного соглашения о том, что «земля» имеет нулевой потенциал, приходим к граничному условию

$$\varphi|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.5}$$

Следствием системы уравнений (2.2)–(2.5) является задача (2.1), в которой $f(x) = 4\pi n(x)$.

Теперь мы займемся исследованием свойств оператора

$$\operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u),$$

который носит название p–*лапласиана*. Прежде всего покажем, что он действует следующим образом:

$$\operatorname{div}(|D_x u|^{p-2}D_x u) : W_0^{1,p}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega), \quad p' = \frac{p}{p-1}. \qquad (2.6)$$

Напомним, $W^{-1,p'}(\Omega)$ является пространством линейных непрерывных функционалов над пространством С. Л. Соболева $W_0^{1,p}(\Omega)$. С этой целью заметим, что оператор p–лапласиана можно представить в виде композиции трех отображений следующим образом:

$$\operatorname{div}(|D_x u|^{p-2}D_x u) := \operatorname{div}(\xi), \quad \xi := |\eta|^{p-2}\eta, \quad \eta := D_x u. \qquad (2.7)$$

Пусть $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Тогда, во–первых, согласно определению пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$ имеем

$$\eta := D_x u : W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega). \qquad (2.8)$$

Во–вторых, имеет место следующее выражение для нелинейного оператора $\xi := |\eta|^{p-2}\eta$:

$$\xi := |\eta|^{p-2}\eta : L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega) \to \\ \to L^{p'}(\Omega) \otimes L^{p'}(\Omega) \otimes L^{p'}(\Omega). \qquad (2.9)$$

Действительно, представим покоординатно выражение для вектора ξ.

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3),$$
$$\xi_1 = |\eta|^{p-2}\eta_1, \quad \xi_2 = |\eta|^{p-2}\eta_2, \quad \xi_3 = |\eta|^{p-2}\eta_3.$$

Справедливо следующее неравенство:

$$|\xi_i|^{p'} = \left||\eta|^{p-2}\eta_i\right|^{p'} \leqslant \left||\eta|^{p-1}\right|^{p'} = |\eta|^p, \quad i = \overline{1,3}.$$

Отсюда вытекает, что если $\eta \in L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega) \otimes L^p(\Omega)$, то $\xi_i \in L^{p'}(\Omega)$. Формула (2.9) доказана. Третий оператор $\operatorname{div}(\xi)$ действует следующим образом:

$$\operatorname{div}(\xi) : L^{p'}(\Omega) \otimes L^{p'}(\Omega) \otimes L^{p'}(\Omega) \to W^{-1,p'}(\Omega), \qquad (2.10)$$

т. е. понимается в смысле дифференцирования обобщенных функций.

Итак, оператор (2.7) как композиция трех операторов (2.8)–(2.10) действует согласно формуле (2.6).

Пусть

$$\langle f, u\rangle : W^{-1,p'}(\Omega) \otimes W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}^1 \qquad (2.11)$$

— это скобки двойственности между сопряженными банаховыми пространствами $W_0^{1,p}(\Omega)$ и $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Докажем теперь очень важное свойство оператора p–*лапласиана*, а именно свойство *строгой монотонности*. Действительно, введем сначала более короткое обозначение

$$\Delta_p u \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{div}(|D_x u|^{p-2} D_x u) \tag{2.12}$$

и докажем следующее его свойство:

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_2 - u_2 \rangle \geqslant 0, \tag{2.13}$$

причем равенство в этом неравенстве имеет место, тогда и только тогда, когда $u_1 = u_2$. Заметим, что скобки двойственности (2.11) определены при

$$f = \Delta_p u \in W^{-1,p'}(\Omega).$$

Теперь заметим, что в силу построения оператора p–лапласиана имеет место формула «интегрирования по частям»:

$$\langle \Delta_p u, v \rangle = -\sum_{i=1}^{3} \Big\langle |D_x u|^{p-2} u_{x_i}, v_{x_i} \Big\rangle_p = \int\limits_{\Omega} |D_x u|^{p-2} \left(D_x u, D_x v\right) \, dx \tag{2.14}$$

для всех $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ — это скобки двойственности между банаховыми пространствами $L^p(\Omega)$ и $L^{p'}(\Omega)$ при $p \in [2, +\infty)$, которые имеют следующий явный вид

$$\langle f, u \rangle_p = \int\limits_{\Omega} f(x) u(x) \, dx \quad \text{для всех} \quad f(x) \in L^{p'}(\Omega), \quad u(x) \in L^p(\Omega),$$

чем мы и воспользовались в формуле (2.14).

Итак, теперь мы в состоянии доказать неравенство (2.13).

□ Действительно, пусть $u_1(x), u_2(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, тогда после «интегрирования по частям» получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} &\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_2 - u_2 \rangle = \\ &\quad = \int\limits_{\Omega} \Big(|D_x u_1|^{p-2} D_x u_1 - |D_x u_2|^{p-2} D_x u_2, D_x u_1 - D_x u_2 \Big) \, dx. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Справедлива следующая цепочка выражений для всех $\xi, \eta \in \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} \Big(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta \Big) &= |\xi|^p + |\eta|^p - |\xi|^{p-2}(\xi, \eta) - |\eta|^{p-2}(\xi, \eta) \geqslant \\ &\geqslant |\xi|^p + |\eta|^p - |\xi|^{p-1}|\eta| - |\eta|^{p-1}|\xi| = \\ &= [|\xi|^{p-1} - |\eta|^{p-1}][|\xi| - |\eta|] \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2.16}$$

поскольку функция $f(x) = x^{p-1}$ является монотонной при $x \geqslant 0$ и при $p > 1$. Заметим, что можно доказать более сильное неравенство следующего вида:

$$\Bigl(|\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta, \xi - \eta\Bigr) \geqslant 2^{2-p}|\xi - \eta| \quad \text{для всех} \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^N, \tag{2.17}$$

из которого в применении к неравенству (2.15) вытекает строгая монотонность p–лапласиана, определение которой мы сейчас дадим.

Определение 1. *Отображение*

$$\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$$

называется монотонным относительно скобок двойственности

$$\langle \cdot, \cdot \rangle$$

между сопряженными банаховыми пространствами $\mathbb{B}$ *и* $\mathbb{B}^*$, *если для всех* $u, v \in \mathbb{B}$ *имеет место следующее неравенство*:

$$\langle \mathbb{F}(u) - \mathbb{F}(v), u - v \rangle \geqslant 0, \tag{2.18}$$

и называется строго монотонным, если равенство в формуле (2.18) *имеет место, тогда и только тогда, когда* $u = v$.

Теперь как мы и обещали дадим определение слабого решения задачи (2.1).

Определение 2. *Слабым решением задачи* (2.1) *при условии, что* $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, *называется функция* $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *удовлетворяющая следующему равенству*:

$$\langle -\Delta_p u, v \rangle = \langle f, v \rangle \quad \textit{для всех} \quad v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{2.19}$$

Давайте обсудим как связаны слабое решение и решение задачи (2.1), понимаемой в классическом смысле. Действительно, пусть решение задачи (2.1) принадлежит к классу $u(x) \in \mathbb{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, конечно, при условии, что $f(x) \in \mathbb{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ при $\alpha \in (0, 1]$. Тогда такая функция $u(x)$ является решением задачи (2.19). Но, естественно, не всякое слабое решение является классическим.

Для дальнейшего нам нужно ввести новое понятие *коэрцитивности*. Дадим определение.

Определение 3. *Оператор* $\mathbb{F} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}^*$ *называется коэрцитивным, если имеет место следующее предельное равенство*:

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{\langle \mathbb{F}(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty. \tag{2.20}$$

Докажем, что оператор p–лапласиана является коэрцитивным. Действительно, «интегрированием по частям» доказывается следующая формула:

$$\langle -\Delta_p u, u\rangle = \int\limits_{\Omega} |D_x u|^p \, dx = \|D_x u\|_p^p \quad \text{при} \quad p \geqslant 2. \tag{2.21}$$

Отсюда и вытекает коэрцитивность.

Для дальнейшего нам потребуется следующая *лемма об остром угле*:

Лемма 1. *Пусть $\mathbb{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — непрерывное отображение, для некоторого $R > 0$ удовлетворяющее условию*

$$(\mathbb{T}a, a) \geqslant 0 \quad \textit{при} \quad |a| = R.$$

Тогда существует такое $a \in \mathbb{R}^n$, что $|a| \leqslant R$ и $\mathbb{T}a = 0$.

Доказательство.

Допустим, что

$$\mathbb{T}a \neq 0 \quad \text{для всех} \quad a \in \mathbb{K}_R = \{a | a \in \mathbb{R}^n, \ |a| \leqslant R\}.$$

Тогда отображение, определяемое по правилу

$$a \to -R\frac{\mathbb{T}a}{|\mathbb{T}a|},$$

является непрерывным отображением из K_R в K_R. В силу теоремы Брауэра о неподвижной точке существует $a \in K_R$, такое, что

$$a = -R\frac{\mathbb{T}a}{|\mathbb{T}a|}.$$

Очевидно, $|a| = R$ и $(\mathbb{T}a, a) = -R|\mathbb{T}a| < 0$, в противоречие с нашим предположением, что $(\mathbb{T}a, a) \geqslant 0$ для $|a| = R$.

Лемма доказана.

Дадим сейчас определение очень полезного в приложениях S^+ свойства оператора p–лапласиана Δ_p.

Определение 4. *Будем говорить, что оператор Δ_p удовлетворяет так называемому S^+ свойству, если из того, что*

$$u_m \rightharpoonup u \quad \textit{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \textit{при} \quad m \to +\infty$$

и условия, что

$$\limsup_{m \to +\infty} \langle -\Delta_p u_m, u_m - u\rangle \leqslant 0, \tag{2.22}$$

вытекает, что

$$u_m \to u \quad \textit{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \textit{при} \quad m \to +\infty.$$

Справедлива следующая вспомогательная лемма.

Лемма 2. *Оператор Δ_p удовлетворяет S^+ свойству.*

Доказательство.
Пусть

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Справедливы следующие выражения:

$$\langle \Delta_p u - \Delta_p u_m, u_m - u \rangle = \\ = \int\limits_\Omega \Bigl(|D_x u_m|^{p-2} D_x u_m - |D_x u|^{p-2} D_x u, D_x u_m - D_x u \Bigr) \geqslant \\ \geqslant 2^{p-2} \int\limits_\Omega |D_x u_m - D_x u|^p \, dx, \quad (2.23)$$

где в последнем неравенстве мы воспользовались неравенством (2.17). Теперь заметим, что в силу слабой сходимости последовательности $\{u_m\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ вытекает, что [1]

$$\langle \Delta_p u, u_m - u \rangle \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \quad (2.24)$$

поэтому переходя к пределу в неравенстве (2.23) в силу предельного свойства (2.22) получим, что

$$0 \geqslant \limsup_{m \to +\infty} \int\limits_\Omega |Du_m - Du|^p \, dx \geqslant 0.$$

Ясно, что

$$\liminf_{m \to +\infty} \int\limits_\Omega |Du_m - Du|^p \, dx \geqslant 0.$$

Значит,

$$u_m \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty.$$

Лемма доказана.

Теперь мы приступим к доказательству слабой обобщенной разрешимости задачи (2.1) в смысле определения 2. Действительно, воспользуемся теперь методом Галеркина.

Шаг 1. С этой целью заметим, что банахово пространство $W_0^{1,p}(\Omega)$ является сепарабельным, т. е. в нем существует счетное всюду плотное множество $\{w_j\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$. Рассмотрим следующее «галеркинское» приближение:

$$u_m(x) = \sum_{k=1}^{m} c_{mk} w_k(x), \quad c_{mk} \in \mathbb{R}^1, \quad (2.25)$$

---

[1] Заметим, что $\Delta_p u(x) \in W^{-1,p'}(\Omega)$.

причем функции $u_m(x)$ удовлетворяют следующему равенству:

$$\langle -\Delta_p u_m, w_j\rangle = \langle f, w_j\rangle \quad \text{для всех} \quad j=\overline{1,m}. \tag{2.26}$$

Шаг 2. Теперь наша задача доказать разрешимость этой системы алгебраических уравнений. С этой целью мы и воспользуемся сформулированной и доказанной ранее леммы 1 об остром угле. С этой целью рассмотрим следующий оператор

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,$$

где

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) := (\mathbb{T}_1(\mathbf{c}_m), ..., \mathbb{T}_m(\mathbf{c}_m)), \quad \mathbf{c}_m = (c_{m1}, ..., c_{mm}).$$
$$\mathbb{T}_j(\mathbf{c}_m) := -\langle \Delta_p u_m, w_j\rangle - \langle f, w_j\rangle \quad \text{при} \quad j=\overline{1,m}.$$

Теперь рассмотрим стандартное скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ в $\mathbb{R}^m$. Справедлива следующая цепочка выражений: [1)]

$$(\mathbb{T}(\mathbf{c}_m), \mathbf{c}_m) = -\langle \Delta_p u_m, u_m\rangle - \langle f, w_m\rangle = \|D_x u_m\|_p^p - \langle f, w_m\rangle \geqslant$$
$$\geqslant \|D_x u_m\|_p^p - \|f\|_* \|D_x u_m\|_p = \|D_x u_m\|_p \left(\|D_x u_m\|_p^{p-1} - \|f\|_*\right) \geqslant 0$$

при достаточно большом $r : \|D_x u_m\|_p = r > 0$, где символом $\|\cdot\|_*$ обозначена норма банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$, а символом $\|D_x u\|_p$ обозначена норма банахова пространства $W_0^{1,p}(\Omega)$:

$$\|D_x u\|_p := \left(\int\limits_\Omega |Du|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

и мы воспользовались следующим общим неравенством:

$$|\langle f, u\rangle| \leqslant \|f\|_* \|u\| \quad \text{для всех} \quad f \in \mathbb{B}^*, \quad u \in \mathbb{B}.$$

$\square$ Докажем его. Действительно, если $u=\vartheta$ — это нулевой элемент банахова пространства $\mathbb{B}$, то неравенство выполняется. Пусть $u \neq \vartheta$, тогда в силу определения нормы $\|\cdot\|_*$ имеет место следующее равенство

$$\|f\|_* := \sup_{\|w\|\leqslant 1} |\langle f, w\rangle|,$$

из которого сразу же вытекает неравенство

$$|\langle f, w\rangle| \leqslant \|f\|_* \quad \text{для всех} \quad \|w\| \leqslant 1.$$

Теперь возьмем в качестве w величину

$$w = \frac{u}{\|u\|}$$

[1)] Здесь мы воспользовались равенством $\langle -\Delta_p v, v\rangle = \|D_x v\|_p^p$ для всех $v(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

и подставим это выражение в предыдущее неравенство и получим искомое неравенство. ⊠

Шаг 3. Осталось заметить, что на конечномерном эвклидововм пространстве $\mathbb{R}^m$ все нормы эквивалентны, поэтому мы приходим к выводу, что найдется такое достаточно большое $R > 0$, что будет выполнено неравенство

$$(\mathbb{T}(\mathbf{c}_m), \mathbf{c}_m) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{c}_m| = R > 0.$$

Следовательно, в силу леммы об остром угле существует такое $\mathbf{c}_m \in \in \mathbb{R}^m$, что

$$\mathbb{T}(\mathbf{c}_m) = 0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{c}_m| \leqslant R,$$

т. е. алгебраическая система (2.26) имеет решение $u_m \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Тем самым, определена последовательность $\{u_m\}$ «галеркинских» приближений.

Шаг 4. Здесь заключается важный момент — нужно доказать, что при $m \to +\infty$ для некоторой подпоследовательности $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$ имеет место слабая сходимость

$$u_{m_m} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty,$$

причем $u(x)$ удовлетворяет равенству (2.19). Теперь приступим к реализации этой схемы доказательства.

Шаг 5. Прежде всего умножим равенство (2.26) на c_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$, тогда получим следующее равенство:

$$\langle -\Delta_p u_m, u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle, \tag{2.27}$$

в котором после «интегрирования по частям» мы получим следующую цепочку выражений:

$$\|D_x u_m\|_p^p = \langle f, u_m \rangle \leqslant \|f\|_* \|D_x u_m\|_p.$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\|D_x u_m\|_p \leqslant \|f\|_*^{1/(p-1)} \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N}. \tag{2.28}$$

Следовательно, последовательность $\{u_m\}$ равномерно ограничена в банаховом пространстве $W_0^{1,p}(\Omega)$, и поэтому существует такая ее подпоследовательность [1] $\{u_{m_m}\} \subset \{u_m\}$, для которой

$$u_{m_m} \rightharpoonup u \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{2.29}$$

Шаг 6. Теперь докажем, что выполнено свойство (2.22). Действительно, в силу (2.26) имеет место следующее равенство

$$\langle -\Delta_p u_m, u_m \rangle = \langle f, u_m \rangle\,. \tag{2.30}$$

[1] Смотри первый том первую часть курса лекций М. О. Корпусова и А. А. Панина «Линейный и нелинейный функциональный анализ».

Выберем последовательность вида

$$v_m = \sum_{j=1}^{m} k_{mj} w_j \tag{2.31}$$

такую, что

$$v_m \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{2.32}$$

Шаг 7. Умножим обе части равенства (2.26) на k_{mj} и просуммируем по $j = \overline{1, m}$ и в результате получим равенство

$$\langle -\Delta_p u_m, v_m \rangle = \langle f, v_m \rangle . \tag{2.33}$$

Тогда справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned}\langle -\Delta_p u_m, u_m - u \rangle &= \langle f, u_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u \rangle = \\ &= \langle f, u_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, v_m \rangle = \\ &= \langle f, u_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle - \langle f, v_m \rangle = \\ &= \langle f, u_m - v_m \rangle - \langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle =: \mathrm{I}_{1m} + \mathrm{I}_{2m}.\end{aligned}$$

Рассмотрим каждое слагаемое в правой части последнего равенства.

Имеет место предельное свойство

$$|\mathrm{I}_{1m}| \leqslant |\langle f, u_m - v_m \rangle| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{2.34}$$

поскольку

$$u_m - v_m = (u_m - u) - (v_m - u) \rightharpoonup 0 \quad \text{слабо в} \quad W_0^{1,p}(\Omega).$$

Оценим второе слагаемое I_{2m}. Действительно, имеет место следующая оценка:

$$|\mathrm{I}_{2m}| \leqslant |\langle -\Delta_p u_m, u - v_m \rangle| \leqslant \|\Delta_p u_m\|_* \|u - v_m\| \to 0 \quad \text{при} \quad m \to +\infty, \tag{2.35}$$

поскольку имеет место свойство (2.32) и, кроме того, так как имеет место следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned}\|\Delta_p u_m\|_* &= \sup_{\|D_x \varphi\|_p \leqslant 1} |\langle -\Delta_p u_m, \varphi \rangle| = \\ &= \sup_{\|D_x \varphi\|_p \leqslant 1} \left| \int_\Omega |D_x u_m|^{p-2} (D_x u_m, D_x \varphi)\, dx \right| \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\|D_x \varphi\|_p \leqslant 1} \int_\Omega |D_x u_m|^{p-1} |D_x \varphi|\, dx \leqslant \\ &\leqslant \sup_{\|D_x \varphi\|_p \leqslant 1} \left(\int_\Omega |D_x u_m|^p\, dx \right)^{1/p'} \left(\int_\Omega |D_x \varphi|^p\, dx \right)^{1/p} \leqslant\end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega |D_x u_m|^p\,dx\right)^{1/p'} \leqslant \|f\|_*^p.$$

Следовательно, имеет место свойство (2.22). Теперь осталось воспользоваться леммой 2 об S^+–свойстве p–лапласиана и получить следующий важный результат:

$$u_{m_m} \to u \quad \text{сильно в} \quad W_0^{1,p}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{2.36}$$

Шаг 8. Наша ближайшая задача доказать, что

$$\Delta_p u_{m_m} \to \Delta_p u \quad \text{сильно в} \quad W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \tag{2.37}$$

С этой целью нам нужно доказать так называемую *липшиц–непрерывность* оператора p–лапласиана. Рассмотрим следующее выражение:

$$\left||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right| \quad \text{для любых} \quad \xi,\eta \in \mathbb{R}^n$$

и получим для него две «грубые» оценки, из которых потом получим одну «тонкую» оценку.

$\square$ Действительно, имеет место первая оценка

$$\left||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right| = \left||\xi|^{p-2}[\xi-\eta] + \eta\left[|\xi|^{p-2} - |\eta|^{p-2}\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\xi|^{p-2}|\xi-\eta| + (p-2)|\eta|\max\left\{|\xi|^{p-3}, |\eta|^{p-3}\right\}|\xi-\eta|, \tag{2.38}$$

а теперь вторая

$$\left||\eta|^{p-2}\eta - |\xi|^{p-2}\xi\right| = \left||\eta|^{p-2}[\eta-\xi] + \xi\left[|\eta|^{p-2} - |\xi|^{p-2}\right]\right| \leqslant$$
$$\leqslant |\eta|^{p-2}|\eta-\xi| + (p-2)|\xi|\max\left\{|\eta|^{p-3}, |\xi|^{p-3}\right\}|\eta-\xi|, \tag{2.39}$$

из которых вытекает «тонкая» оценка и дальнейшие выражения

$$\left||\xi|^{p-2}\xi - |\eta|^{p-2}\eta\right| \leqslant \min\left\{|\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2}\right\}|\xi-\eta| +$$
$$+ (p-2)\min\{|\xi|,|\eta|\}\frac{\max\left\{|\xi|^{p-2},|\eta|^{p-2}\right\}}{\min\{|\xi|,|\eta|\}}|\xi-\eta| =$$
$$= (p-1)\max\left\{|\xi|^{p-2}, |\eta|^{p-2}\right\}|\xi-\eta| \tag{2.40}$$

для всех $\xi,\eta \in \mathbb{R}^n$ и $p \geqslant 2$. $\boxtimes$

Шаг 9. Теперь согласно определению нормы банахова пространства $W^{-1,p'}(\Omega)$ имеют место следующие выражения:

$$\|\Delta_p u - \Delta_p u_m\|_* = \sup_{\|D_x w\|_p \leqslant 1} |\langle \Delta_p u - \Delta_p u_m, w\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\|D_x w\|_p \leqslant 1} \left| \int\limits_{\Omega} \left| |D_x u|^{p-2} D_x u - |D_x u_m|^{p-2} D_x u_m \right| |D_x w| \, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant (p-1) \sup_{\|D_x w\|_p \leqslant 1} \int\limits_{\Omega} |D_x u_m - D_x u| \max\left\{ |D_x u|^{p-2}, |D_x u_m|^{p-2} \right\} |D_x w| \, dx =$$

$$=: (p-1) \sup_{\|D_x w\|_p \leqslant 1} \mathrm{I}, \quad (2.41)$$

где мы воспользовались неравенством (2.40).

Шаг 10. Воспользуемся обобщенным неравенством Гельдера для последнего интеграла в цепочке выражений (2.41). Действительно, в обобщенном неравенстве Гельдера положим соответственно

$$p_1 = p, \quad p_2 = \frac{p}{p-2}, \quad p_3 = p, \quad r = 1, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = 1, \quad p \geqslant 2.$$

И тогда получим следующее неравенство для выражения I :

$$\mathrm{I} \leqslant \left(\int\limits_{\Omega} |D_x u - D_x u_m|^p \, dx \right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega} \max\left\{ |D_x u|^p, |D_x u_m|^p \right\} dx \right)^{(p-2)/p} \left(\int\limits_{\Omega} |D_x w|^p \, dx \right)^{1/p}. \quad (2.42)$$

Таким образом, из неравенств (2.41) и (2.42) вытекает следующая оценка

$$\|\Delta_p u - \Delta_p u_m\|_* \leqslant \mu(R_m) \|D_x u - D_x u_m\|_p, \quad (2.43)$$

$$\mu(R_m) = c_1 R_m^{p-2}, \quad R_m = \max\left\{ \|D_x u\|_p, \|D_x u_m\|_p \right\}.$$

В силу свойства (2.28) приходим к выводу, что имеет место неравенство

$$\mu(R_m) \leqslant c_1 \max\left\{ \|D_x u\|_p, \|f\|_*^{1/(p-1)} \right\}.$$

Тем самым, мы в силу (2.36) и (2.43) приходим к выводу о том, что

$$\Delta_p u_m \to \Delta_p u \quad \text{сильно в} \quad W^{-1,p'}(\Omega) \quad \text{при} \quad m \to +\infty. \quad (2.44)$$

Шаг 11. Осталось перейти к пределу при $m \to +\infty$ в равенстве (2.26) и получить с учетом (2.44) следующий результат:

$$\langle -\Delta_p u, w_j \rangle = \langle f, w_j \rangle \quad \text{для всех} \quad j = \overline{1, +\infty}, \quad (2.45)$$

из которого в силу плотности счетного семейства $\{w_j\}$ в $W_0^{1,p}(\Omega)$ вытекает, что построенная функция $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ удовлетворяет равенству (2.19) определения 2 слабого решения.

Шаг 12. Осталось доказать единственность слабого решения. Для этого воспользуемся неравенством (2.17), из которого вытекает следующее неравенство:

$$\langle -\Delta_p u_1 + \Delta_p u_2, u_2 - u_1 \rangle = \\ = \int\limits_\Omega \Big(|D_x u_2|^{p-2} D_x u_2 - |D_x u_1|^{p-2} D_x u_1, D_x u_2 - D_x u_1 \Big)\, dx \geqslant \\ \geqslant 2^{2-p} \int\limits_\Omega |D_x u_1 - D_x u_2|^p \, dx. \quad (2.46)$$

Теперь возьмем в неравенстве (2.46) в качестве $u_1, u_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ какие то два слабых решения в смысле определения 2, но тогда из неравенства (2.46) вытекает, равенство

$$\int\limits_\Omega |D_x u_1 - D_x u_2|^p \, dx = 0.$$

Отсюда вытекает единственность решения задачи (2.1), понимаемого в слабом смысле определения 2. Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 1. *Для всякой* $f(x) \in W^{-1,p'}(\Omega)$ *существует единственное слабое решение* $u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *задачи* (2.1), *понимаемой в слабом смысле определения* 2.