

ГИЛЬБЕРТОВЫ ПРОСТРАНСТВА. ОБСУЖДЕНИЕ**§ 1. Необходимое условие «евклидовости»**

Как следует из материала лекции 11, необходимым (а также и достаточным — см. [?]) условием возможности задать норму с помощью скалярного произведения является выполнение для этой нормы равенства параллелограмма. Отсюда, в частности, следует, что пространства $L^\infty[0; 1]$, $C[0; 1]$ не являются гильбертовыми (являясь банаховыми).

Отметим также правило вынесения числового множителя из первого аргумента скалярного произведения:

$$(\lambda x, y) = \overline{(y, \lambda x)} = \overline{\lambda(y, x)} = \overline{\lambda} \overline{(y, x)} = \overline{\lambda}(x, y),$$

или $(\lambda x, y) = \overline{\lambda}(x, y)$.

§ 2. Поляризационное тождество

Пусть $B(x, y)$ — полуторалинейная форма в гильбертовом пространстве H . Будем называть функцию

$$B(x) \stackrel{\text{def}}{=} B(x, x)$$

квадратичной формой, соответствующей полуторалинейной форме $B(x, y)$. Возникает естественный вопрос: можно ли, зная квадратичную форму $B(x)$, восстановить полуторалинейную форму $B(x, y)$? Оказывается, да.

Пользуясь свойствами линейности по второму аргументу и полулинейности по первому, легко проверить следующее тождество (носящее название поляризационного)

$$B(x, y) = \frac{1}{4}[B(x + y) - B(x - y) + iB(x - iy) - iB(x + iy)]. \quad (2.1)$$

Совсем по-другому обстоит дело с билинейными формами (они отличаются от полуторалинейных тем, что линейны по обоим аргумен-

там). В этом нетрудно убедиться уже на простом примере в двумерном пространстве: если

$$B((x^1, x^2)^T, (y^1, y^2)^T) \equiv a_{11}x^1y^1 + a_{12}x^1y^2 + a_{21}x^2y^1 + a_{22}x^2y^2, \quad (2.2)$$

то

$$B((x^1, x^2)^T, (x^1, x^2)^T) \equiv a_{11}(x^1)^2 + (a_{12} + a_{21})x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2,$$

откуда следует, что любые билинейные формы вида (2.2) будут задавать одну и ту же квадратичную форму, если для этих билинейных форм $a_{11} = \text{const}$, $a_{22} = \text{const}$, $a_{12} + a_{21} = \text{const}$.

Можно сказать, что этот пример показывает характерное отличие вещественного гильбертова пространства от комплексного. В самом деле, в вещественном линейном пространстве всякая полуторалинейная форма фактически является билинейной. Следовательно, её уже нельзя восстановить по квадратичной. (Можно восстановить только симметричную билинейную форму.)

§ 3. Замкнутые и незамкнутые подпространства гильбертова пространства

(Сразу оговоримся, что возможная незамкнутость бесконечномерного подпространства характерна для любого банахова пространства, но мы рассмотрим эту проблему на примере гильбертова пространства.)

ПРИМЕР 1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве l^2 ограниченный линейный оператор

$$A : (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots).$$

Рассмотрим его область значений. В силу общих свойств линейного оператора она образует линейное подпространство (многообразие), которое мы обозначим $R(A)$. Будет ли оно замкнутым? Чтобы ответить на этот вопрос, будем рассуждать «в обход».

1) Нетрудно заметить, что $R(A)$ всюду плотно в пространстве l^2 . В самом деле, в пространстве l^2 плотны уже финитные последовательности, т. е. такие, у которых отлично от нуля лишь конечное число членов (почему?). А все финитные последовательности заведомо принадлежат $R(A)$. Итак, $\overline{R(A)} = l^2$.

2) С другой стороны, $R(A)$ не может совпадать со всем пространством l^2 . В самом деле, пусть $y = (y_1, \dots) \in R(A)$, $x = (x_1, \dots)$ — прообраз y . (Для нас сейчас не существенно, единственным ли образом можно восстановить этот прообраз, важно лишь его существование, которое имеет место по смыслу области значений оператора.) Тогда имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |y_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty.$$

3. Замкнутые и незамкнутые подпространства гильбертова пространства

С другой стороны, не для всякого элемента $z \in l^2$ выполнено $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 |z_n|^2 < +\infty$. Например, для $z = \{\frac{1}{n}\}$ данный ряд расходится. Таким образом, $R(A) \subsetneq l^2$.

Легко видеть, что из 1) и 2) следует незамкнутость $R(A)$.

ПРИМЕР 2. Оказывается, сумма замкнутых линейных подпространств может быть незамкнутым подпространством (линейным многообразием). Пусть

$$M = \{x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, \dots\}, \quad N = \{x_1, x_1, x_3, \frac{x_3}{3}, x_5, \frac{x_5}{5}, \dots\}.$$

Установим замкнутость этих подпространств.

1) Замкнутость M следует из того соображения, что оно изоморфно l^2 и поэтому полно как метрическое пространство.

2) Пусть $x^{(n)} \equiv (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)$ — фундаментальная последовательность элементов подпространства N . Тогда в силу полноты l^2 имеем

$$x^{(n)} \rightarrow x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2. \quad (3.1)$$

Остаётся доказать лишь, что $x \in N$. Заметим прежде всего, что из (3.1) следует, в частности: $x_j^{(n)} \rightarrow x_j$, $j \in \mathbb{N}$. В самом деле, ведь $|x_j^{(n)} - x_j| \leq \|x^{(n)} - x\|$. Но арифметические соотношения $x_{2k}^{(n)} = \frac{x_{2k-1}^{(n)}}{2k-1}$, определяющие подпространство N , сохраняются при переходе к пределу. Поэтому $x \in N$.

С другой стороны,

$$M + N \neq \overline{M + N} = l^2.$$

Действительно, все финитные последовательности лежат в $M + N$ (последовательно решаем систему уравнений.) Следовательно, $\overline{M + N} = l^2$. С другой стороны, для всех элементов из $M + N$ имеем $\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)^2 |x_{2k-1}|^2 < +\infty$, откуда аналогично предыдущему примеру получаем, что $M + N \neq l^2$. Итак,

$$\overline{M + N} = l^2 \neq M + N.$$

Замечание 1. Поскольку все сепарабельные гильбертовы пространства изоморфны пространству l^2 , то многие общие свойства первых могут быть изучены на примере последнего (чем мы будем пользоваться и в дальнейшем по ходу семинара). В то же время, случаи, где существенна связь той или иной дополнительной структуры на исходном пространстве (например, связь предела по мере или почти всюду с пределом по норме $L^2[0; 1]$), мы вынуждены рассматривать исходное пространство.

§ 4. Гильбертов сопряжённый оператор. Простейшие свойства и примеры

Непосредственно можно доказать следующие элементарные свойства сопряжённого оператора.

Свойство 1. $(AB)^* = B^*A^*$. (Обратим внимание на сходство этой формулы с формулой оператора, обратного к произведению. Следует только иметь в виду, что, в отличие от обратного, сопряжённый оператор имеется у каждого ограниченного линейного оператора.)

Свойство 2. $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A$.

Свойство 3. Совершенно произвольный ограниченный линейный оператор A в гильбертовом пространстве может быть представлен в виде $A = B + iC$, где $B = \frac{A+A^*}{2}$, $C = \frac{A-A^*}{2i}$ — самосопряжённые ограниченные операторы.

В следующих задачах требуется построить гильбертов сопряжённый оператор A^* к данному оператору A в данном гильбертовом пространстве l^2 (примеры 1)–5)), $L^2(\mathbb{R})$ (примеры 6), 7)), $L^2[0; 1]$ (примеры 8), 9)).

ПРИМЕР 3. $A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$, $A^*(y_1, y_2, y_3, \dots) = (y_2, y_3, y_4, \dots)$ (уже знакомые нам операторы правого и левого сдвига).

ПРИМЕР 4. $A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \dots)$, $A^*(y_1, y_2, y_3, \dots) = (\bar{\alpha}_1 y_1, \bar{\alpha}_2 y_2, \bar{\alpha}_3 y_3, \dots)$, причём $A = A^*$ тогда и только тогда, когда все числа α_i вещественны.

ПРИМЕР 5. $A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$, $A^* = A$.

ПРИМЕР 6. $A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, x_1, 0, 0, \dots)$,
 $A^*(y_1, y_2, y_3, \dots) = (y_n, 0, 0, \dots)$.

ПРИМЕР 7. $A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\alpha_n x_n, \alpha_{n+1} x_{n+1}, \alpha_{n+2} x_{n+2}, \dots)$,
 $A^*(y_1, y_2, y_3, \dots) = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n-1}, \bar{\alpha}_n y_n, \bar{\alpha}_{n+1} y_{n+1}, \dots)$.

ПРИМЕР 8. $(Ax)(t) = x(t+h)$, $(A^*y)(t) = y(t-h)$. (Здесь и в следующем примере доказательство использует замену переменной в интеграле, представляющем скалярное произведение.)

ПРИМЕР 9. $(Ax)(t) = x(-t)$, $(A^*y)(t) = y(-t)$.

ПРИМЕР 10. $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t)$, $\varphi(t) \in L^\infty[0; 1]$, $(A^*y)(t) = \overline{\varphi(t)}y(t)$.

ПРИМЕР 11. $(Ax)(t) = \int_0^t x(s) ds$ в $L^2[0; 1]$. В данном случае приведём решение подробно. Прежде всего следует показать, что данный оператор действительно является ограниченным оператором в $L^2[0; 1]$ (что заранее не очевидно). Имеем

$$|(Ax)(t)| = \left| \int_0^t 1 \cdot x(s) ds \right| \leq \sqrt{\int_0^t 1^2 ds} \sqrt{\int_0^t x^2(s) ds} \leq \|x(t)\|_{L^2[0;1]}$$

и далее

$$\|(Ax)(t)\|_{L^2[0;1]}^2 = \int_0^1 |(Ax)(t)|^2 dt \leq \|x(t)\|_{L^2[0;1]}^2,$$

откуда $\|A\| \leq 1$.

Теперь собственно вычислим сопряжённый оператор. Итак, пусть $x(t)$, $y(t)$ — произвольные функции из $L^2[0; 1]$. Нам требуется найти такую функцию $z(t)$ (зависящую от $y(t)$), что $(y, Ax) = (z, x)$ при всех $x(t) \in L^2[0; 1]$. Ясно, что придётся воспользоваться интегрированием по частям. Корректность интегрирования по частям, которое мы сейчас проведём, нуждается в дополнительном обосновании (поскольку мы имеем дело не с непрерывно дифференцируемыми функциями), которое мы отложим до более подробного изучения функциональных пространств. Для удобства интегрирования по частям введём функцию $v(t)$ по формуле

$$v(t) = - \int_t^1 \overline{y(s)} ds.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^t x(s) ds \right) \overline{y(t)} dt &= \\ &= \left(\int_0^t x(s) ds \right) v(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 x(t)v(t) dt = \int_0^1 x(t) \left(\int_t^1 \overline{y(s)} ds \right) dt, \end{aligned}$$

где верхняя подстановка обратилась в ноль в силу специального выбора первообразной для $y(t)$ в виде $v(t)$. Таким образом, име-

ем $\int_0^1 x(t) \left[\overline{z(t)} - \int_t^1 \overline{y(s)} ds \right] dt = 0$. Полагая $x(t) = z(t) - \int_t^1 y(s) ds$, получим, что $z(t) = \int_t^1 y(s) ds$ почти всюду, откуда

$$(A^*y)(t) = \int_t^1 y(s) ds.$$

§ 5. Ортогональная проекция на конечномерное подпространство. Ортопроекторы

ПРИМЕР 12. Чтобы ортогонально спроецировать вектор на конечномерное подпространство L , достаточно спроецировать его на векторы ортонормированного базиса $\{e_k\}_{k=1}^n$ в L и сложить результаты:

$$\text{Пр}_L x = \sum_{k=1}^n (x, e_k) e_k. \quad (5.1)$$

Ортогональность существенна, как показывает простой пример. Пусть мы проецируем вектор $(1; 1; 1)^T$ на плоскость Oxy . Очевидно, результат равен $(1; 1; 0)^T$. Однако если применить формулу (5.1), взяв неортогональный нормированный базис $(0; 1; 0)^T$, $(1; 1; 0)^T/\sqrt{2}$, мы получим $(1; 2; 0)^T$.

ПРИМЕР 13. Ортогональный проектор P в общем случае обладает двумя свойствами: $P^2 = P$, $P^* = P$. Докажем это.

Итак, ортогональный проектор P — это оператор, ставящий каждому элементу $x \in H$ вектор $y \in L$, где L — замкнутое подпространство и

$$x = y + z, \quad y \in L, \quad z \in L^\perp. \quad (5.2)$$

Такое разложение единственно, а соответствующий оператор действительно линейный и ограниченный, как легко проверить: в силу теоремы Пифагора имеем $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$, откуда $\|P\| \leq 1$. На самом деле $\|P\| = 1$, если только подпространство L нетривиально.

Докажем, что $P^2 = P$. Для этого заметим, что проекция элемента y из (5.2) на подпространство L равна самому y . Действительно, если $y \in L$, $y = u + v$, $u \in L$, $v \in L^\perp$, то $v = y - u \in L \cap L^\perp$, откуда $v = \varnothing$. Теперь докажем самосопряжённость ортопроектора. Пусть $w \in H$ — произвольный элемент. Запишем ортогональное разложение и для него:

$$w = w_L + w_\perp, \quad w_L \in L, \quad w_\perp \in L^\perp.$$

Тогда получим:

$$(w, Px) = (w, y) = (w_L + w_\perp, y) = (w_L, y) = (w_L, y + z) = (Pw, x). \quad (5.3)$$

Обратно, любой ограниченный линейный оператор, обладающий указанными двумя свойствами, является ортопроектором. В самом

деле, рассмотрим $L = PH \equiv R(P)$. Заметим прежде всего, что подпространство L — замкнутое.

□ Пусть $x_n \in L$, $x_n \rightarrow x \in H$. Поскольку $x_n \in L$, существуют такие $y_n \in H$, что $x_n = Py_n$. Имеем тогда

$$Px_n = P^2y_n = Py_n = x_n,$$

и далее, с учётом непрерывности оператора P ,

$$x_n \rightarrow x \Rightarrow Px_n \rightarrow Px \Rightarrow x_n = Px_n \rightarrow Px \Rightarrow x = Px \Rightarrow x \in L. \square$$

Далее,

$$\forall x, w \in H \quad (w - Pw, Px) = (Pw - P^2w, x) = (Pw - Pw, x) = 0.$$

Тем самым, оператор P действительно ставит в соответствие каждому элементу x его ортогональную проекцию на замкнутое подпространство $L = R(P)$.

Замечание 2. Конечно, не всякий проектор является ортогональным. Можно рассмотреть пример оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

§ 6. Некоторые замечания о слабой сходимости

Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H . Как следует из лекционного материала, в нём существует полная ортонормированная система, или ортонормированный базис $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Нетрудно видеть, что $e_n \rightarrow \vartheta$. В самом деле, слабая сходимость $x_n \rightarrow x$ в гильбертовом пространстве равносильна условию

$$\forall y \in H \quad (y, x_n) \rightarrow (y, x).$$

Но

$$\forall y \in H \quad (y, e_n) = y_n \rightarrow 0 = (y, \vartheta),$$

где y_n суть коэффициенты Фурье элемента $y \in H$, которые стремятся к нулю в силу равенства Парсеваля.

§ 7. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Показать, что скалярное произведение непрерывно по норме по совокупности переменных, т. е. если $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, то $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$.

Задача 2. (Продолжение.) Можно ли в условии предыдущей задачи заменить сильную сходимость на слабую:

- 1) для одной из последовательностей?
- 2) для обеих последовательностей?

Задача 3. Доказать, что если $x_n \rightharpoonup x$ и $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$, то $x_n \rightarrow x$. Показать, что отказаться от второго условия нельзя.

Задача 4. Доказать единственность слабого предела: если $x_n \rightharpoonup x$ и $x_n \rightharpoonup y$, то $x = y$.

Задача 5. 1) Доказать n -мерную теорему Пифагора: если в наборе $\{x_k\}_{k=1}^n$ все элементы попарно ортогональны, то $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$.

2) Доказать, что попарно ортогональные элементы (среди которых нет нулевого!) линейно независимы. В каком месте не пройдёт доказательство при наличии нулевого элемента?

Задача 6. Найти сопряжённые к следующим операторам в l^2 :

- 1) $A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots)$;
- 2) $A(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, 0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$;
... в $L^2(\mathbb{R})$;
- 3) $(Ax)(t) = \varphi(t)x(t+h)$, $\varphi(t) \in L^\infty(\mathbb{R})$;
- 4) $(Ax)(t) = \frac{1}{2}(x(t) + x(-t))$.

Те из операторов, которые не совпали со своими сопряжёнными, представить в виде $C + iD$, где C и D — самосопряжённые.

Задача 7. 1) Как выглядит матрица оператора A^* в конечномерном пространстве, если дана матрица оператора A ? Рассматриваются матрицы относительно фиксированного ортонормированного базиса.

2) Останется ли результат верным, если снять условие ортонормированности базиса?

3) Убедиться, что этот результат согласуется с результатами задач 6.1), 6.2) (предварительно рассмотрев эти задачи для конечномерного случая).

Задача 8. Пусть $A \in L(H)$ — обратимый оператор. Доказать, что существует $(A^*)^{-1}$ и он равен $(A^{-1})^*$. (Тем самым, оператор обратим тогда и только тогда, когда его сопряжённый обратим.)

Задача 9. Пусть M — произвольное множество в гильбертовом пространстве. Пусть $M^\perp \equiv \{x \in H \mid \forall y \in M (y, x) = 0\}$ (ортогональное дополнение множества). Доказать следующие факты:

- 1) M^\perp — (замкнутое!) подпространство;
- 2) $M^{\perp\perp} \supset M$, причём равенство имеет место тогда и только тогда, когда M — замкнутое подпространство;
- 3) если $M \subset N$, то $N^\perp \subset M^\perp$;
- 4) $M^\perp = M^{\perp\perp\perp}$;
- 5) если M — линейное многообразие, то $\overline{M} = M^{\perp\perp}$ тогда и только тогда, когда из $x \perp M$ следует, что $x = \vartheta$.

Задача 10. Доказать, что если M, N суть (замкнутые) подпространства и $M \perp N$, то $M + N$ — замкнутое подпространство.

Задача 11*. (Продолжение.) Пусть M, N суть (замкнутые) подпространства и при некотором $\varepsilon > 0$

$$\sup\{|(x, y)| \mid \|x\| = \|y\| = 1, x \in N, y \in M\} < 1 - \varepsilon.$$

Доказать, что $M + N$ — замкнутое подпространство.

Задача 12. С помощью ортогонализации Грама—Шмидта получить (с точностью до нормировочного коэффициента) первые 3 многочлена Лежандра.

Задача 13. Для функции $x(t) = e^t$ найти такие многочлены степеней 0, 1, 2, что норма $\|e^t - p_n(t)\|$ в $L^2[0; 1]$ минимальна.

Задача 14. (Продолжение.) Тот же вопрос для $x(t) = t^3$ в $L^2[-1; 1]$. Объяснить особенность полученного результата.

Задача 15. 1) В $L^2[-1; 1]$ построить проекцию любой функции на подпространства чётных/нечётных функций.

2*) Как проще всего доказать, что линейные многообразия чётных и нечётных функций действительно образуют (замкнутые) подпространства?

Задача 16. 1) Убедиться, что оператор Q , заданный матрицей Q (в самом конце основного текста) является проектором (т. е. $Q^2 = Q$) и что он не самосопряжён. Описать соответствующее проектирование геометрически.

2) Те же вопросы для оператора, заданного матрицей Q^T .

Задача 17. Доказать, что если $A \in L(H)$, $A = A^*$, то оператор $E + iA$ обратим.

Задача 18*. Будем говорить, что множество M в гильбертовом пространстве слабо замкнуто, если из $x_n \in M$, $x_n \rightharpoonup x$ следует $x_n \rightarrow x$. Слабым замыканием множества M будем называть множество, состоящее из слабых пределов всевозможных слабо сходящихся последовательностей $\{x_n\} \subset M$.

1) Доказать, что замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве слабо замкнуто.

2) Найти слабое замыкание единичной сферы в l^2 .

Задача 19*. Показать, что на бесконечномерном гильбертовом пространстве нельзя нетривиальным образом ввести меру. Именно, если потребовать от меры выполнения стандартных свойств (неотрицательность, счётная аддитивность), а также естественной для линейного пространства инвариантности относительно переносов и строгой положительности для любого непустого открытого множества, то окажется, что мера любого непустого открытого множества будет бесконечной.

Задача 20. Доказать следующее утверждение, также называемое теоремой Беппо Леви: если \mathbb{H}_1 — произвольное замкнутое выпуклое множество в гильбертовом пространстве \mathbb{H} , $x \in \mathbb{H}$ — произвольный элемент гильбертова пространства, то существует единственный элемент $x_1 \in \mathbb{H}_1$ такой, что

$$\|x - x_1\| = d(x, \mathbb{H}_1).$$