

Вопросы к зачету по спецкурсу «Введение в алгебру и дифференциальную геометрию» 2013 г.

1. Дать определение внешней формы на линейном пространстве и внешнего произведения внешних форм. Перечислить свойства внешнего произведения. Найти размерность линейного пространства внешних форм фиксированной степени.
2. Сформулировать и доказать теорему о каноническом виде внешней 2-формы.
3. Дать определение формы объема в (псевдо)евклидовом пространстве и проверить его независимость от системы координат.
4. Дать определение гладкого многообразия различных классов гладкости, гладких отображений гладких многообразий. Привести примеры гладких многообразий.
5. Дать классификацию компактных двумерных топологических многообразий. Что называется родом и эйлеровой характеристикой таких многообразий?
6. Дать определение векторного локально-тривиального расслоения, морфизмов и сечений таких расслоений. Привести примеры.
7. Сформулировать теорему «о еже». Построить векторное поле на нечетномерных сферах, отличное от нуля во всех точках.
8. Дать определение коммутатора векторных полей. Каковы его свойства?
9. Дать определение внешнего дифференциала дифференциальной формы. Проверить корректность данного определения для 1-форм. Перечислить свойства внешнего дифференциала.
10. Дать определение коцепного комплекса де-Рама и чисел Бетти.
11. Дать определение производной Ли. Перечислить ее свойства. Доказать формулу $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.
12. Дать определение интеграла дифференциальной формы по сингулярной цепи. Записать формулу Стокса.
13. Дать определение группы Ли и топологической группы. Привести примеры.
14. Построить атлас гладкой структуры на ортогональной группе.
15. Дать определение алгебры Ли. Привести примеры алгебр Ли.
16. Дать определение алгебры Ли группы Ли. Доказать, что алгеброй Ли группы Ли $GL(n, \mathbb{K})$ является алгебра Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
17. Вывести формулу Маурера-Картана.
18. Дать определение экспоненциального отображения $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$, перечислить и доказать его свойства.
19. Вывести формулу

$$\exp \mu X \exp \nu Y = \exp \left(\mu X + \nu Y + \frac{1}{2} \mu \nu [X, Y] + O(\mu^2 \nu + \mu \nu^2) \right),$$
$$\mu, \nu \rightarrow 0, \mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

для элементов X, Y произвольной алгебры Ли.

20. Дать определение подгруппы и классов смежности группы по ее подгруппе. Доказать, что всякая окрестность единицы произвольной связной топологической группы G порождает G .
21. Дать определение нормальной подгруппы. Описать конструкцию факторгруппы произвольной группы по ее нормальной подгруппе. Доказать, что связная компонента единицы произвольной топологической группы G является нормальной подгруппой группы G .
22. Построить эпиморфизм (сюръективный гомоморфизм) групп Ли $SU(2) \mapsto SO(3)$.
23. Дать определение связности в векторных расслоениях, форм связности и коэффициентов связности.
24. Дать определение горизонтального поднятия гладкой кривой на базе векторного расслоения со связностью. Выписать уравнение такого поднятия в локальных координатах.
25. Дать определение ковариантной производной на векторном расслоении со связностью. Получить формулу для ковариантной производной в локальных координатах.
26. Перечислить свойства ковариантной производной. Дать определение ковариантной производной на сопряженном векторном расслоении. Вывести соответствующую формулу.
27. Дать геометрическое определение кривизны связности в векторном расслоении. Какая связность называется плоской, а какая связностью с абсолютным параллелизмом?
28. Получить выражение для 2-формы кривизны через формы связности и дифференциальное тождество Бианки.
29. Получить выражение для 2-формы кривизны через ковариантную производную.
30. Дать определение метрической связности в векторных расслоениях и получить тождество $g(R(X, Y)Z, S) = -g(R(X, Y)S, Z)$.
31. Дать определение геодезической на касательном расслоении со связностью и кручения связности на касательном расслоении. Проверить, что кручение является тензором.
32. Дать определение симметрической связности на касательном расслоении. Получить первое и второе тождество Бианки для кривизны такой связности.
33. Доказать существование связности Леви-Чивиты на (псевдо)римановом пространстве.
34. Перечислить симметрии тензора кривизны связности Леви-Чивиты и получить в этом случае тождество $g(R(X, Y)Z, S) = g(R(Z, S)X, Y)$.