

Вопросы к коллоквиуму по курсу “Методы математической физики” (2012-второй поток).

В билете будет 5 вопросов.

1. Сформулируйте лемму о поведении решений уравнения  $(k(x)u'(x))' - q(x)u = 0$ ,  $x \in (a, b)$ , где  $k(x) = (x - a)\varphi(x)$ ,  $\varphi(a) \neq 0$ , в особых точках.
2. Напишите уравнение Бесселя, его фундаментальные системы решений - вещественную и комплексную. Дайте определение функций, входящих в эти системы решений, для вещественной системы приведите графики функций.
3. Дайте определение функции Бесселя с помощью обобщенного степенного ряда. Напишите формулы для функций Бесселя порядков  $1/2$  и  $-1/2$ . Всегда ли функции Бесселя полуцелого порядка можно выразить через элементарные функции?
4. Дайте определение функций Ханкеля и Неймана. Напишите интегральное представление для функции Бесселя и функций Ханкеля первого и второго рода. Как связаны между собой эти функции? Приведите график функции Неймана.
5. Напишите асимптотические формулы при больших и малых значениях аргумента для функций Бесселя, Неймана и Ханкеля. Каким образом получают эти формулы?
6. Поставьте задачу на собственные значения для оператора Бесселя. Сформулируйте теорему Стеклова о разложимости функций по собственным функциям этой задачи. Напишите общую формулу для квадрата нормы собственной функции.
7. Напишите уравнение для цилиндрических функций чисто мнимого аргумента. Приведите фундаментальную систему решений этого уравнения. Дайте определение функции Инфельда и Макдональда, приведите их графики. Укажите поведение этих функций при больших и малых значениях аргумента.
8. Дайте определение классических ортогональных полиномов. Напишите уравнение которому удовлетворяют эти функции. Сформулируйте теорему о нулях классических ортогональных полиномов.
9. Поставьте задачу на собственные значения для классических ортогональных полиномов на отрезке с условиями в особых точках. Напишите формулу для собственных значений этой задачи. Как получают эту формулу?
10. Напишите общую формулу для классических ортогональных полиномов (формулу Родрига). Как она выводится? Приведите формулу

Родрига для полиномов Лежандра. С ее помощью постройте  $P_0$  и  $P_1$ .

11. Дайте определение полиномов Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для полиномов Лежандра. Напишите выражение для собственных значений этой задачи и выражение квадрата нормы для полиномов Лежандра. Как получают эти выражения?
12. Дайте определение полиномов Лагерра и полиномов Эрмита. Сформулируйте задачи, решениями которой они являются.
13. Дайте определение производящей функции классических ортогональных полиномов. Напишите выражение производящей функции полиномов Лежандра. Как получают это выражение?
14. Является ли система полиномов Лежандра замкнутой и полной? Обоснуйте соответствующие утверждения. Сформулируйте теорему Стеклова для полиномов Лежандра.
15. Дайте определение присоединенных функций Лежандра. Поставьте задачу на собственные значения для присоединенных функций Лежандра. Напишите собственные значения для присоединенных функций Лежандра и выражение для квадрата нормы.
16. Является ли система присоединенных функций Лежандра замкнутой и полной? Сформулируйте соответствующие утверждения. Сформулируйте теорему Стеклова для присоединенных функций Лежандра.
17. Дайте определение сферических функций. Поставьте задачу на собственные значения для этих функций. Напишите условие ортогональности для сферических функций. Приведите выражение квадрата нормы. Сформулируйте теорему Стеклова о разложимости в ряд по сферическим функциям.
18. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа в круге в случае граничных условий 1-ого и 2-ого рода. Приведите характеристические уравнения для определения собственных значений задач Штурма-Лиувилля в этих случаях и напишите собственные функции.
19. Поставьте задачу Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа с граничными условиями Дирихле и перечислите основные свойства собственных функций и собственных значений этой задачи.
20. Напишите первую, вторую и третью формулы Грина. Каковы условия их применимости? В чем различие третьей формулы Грина для двумерного и трехмерного случая.
21. Сформулируйте теорему Гаусса и теорему о среднем для гармонических функций. Сформулируйте принцип максимума и принцип сравнения для этих функций.
22. Имеет ли место единственность решения внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа в случае граничных условий первого, второго и третьего рода? Сформулируйте утверждения и объясните, каким методом они доказываются.
23. Что такое характеристики уравнения в частных производных второго порядка в случае двух переменных? Приведите уравнения характеристик и объясните, откуда они следуют для случая гиперболического уравнения.

24. Дайте определения уравнений эллиптического, гиперболического и параболического типов в случае двух переменных и в случае многих переменных. Напишите для них канонические формы.