МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

**А.Н. Боголюбов, Н.Т. Левашова,
И.Е. Могилевский, Ю.В. Мухартова,
Н.Е. Шапкина**

Функция Грина оператора Лапласа

Москва 2012

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

**А.Н. Боголюбов, Н.Т. Левашова,
И.Е. Могилевский, Ю.В. Мухартова,
Н.Е. Шапкина**

Функция Грина оператора Лапласа

Москва 2012

Б о л ю б о в А. Н., Л е в а ш о в а Н. Т.,
М о г и л е в с к и й И. Е., М у х а р т о в а Ю. В.,
Ш а п к и н а Н. Е.
Функция Грина оператора Лапласа / Учебное пособие.
М.: Физический факультет МГУ, 2012. 130 с.

Настоящее методическое пособие составлено на основе многолетнего опыта чтения лекций и проведения семинарских занятий по курсу «Методы математической физики» на физическом факультете МГУ. В пособии приведены подробные теоретические сведения, необходимые для решения задач Дирихле для оператора Лапласа с помощью функции Грина. Также рассмотрены различные методы построения функции Грина. В тексте содержится большое количество разобранных примеров решения задач математической физики с помощью функции Грина, и задачи для самостоятельного решения.

Рассмотренный материал входит в учебный план кафедры математики физического факультета МГУ и может представлять интерес для более широкого круга читателей, в том числе аспирантов и преподавателей, специализирующихся в области математической физики и ее приложений. Авторский коллектив выражает глубокую признательность А.А. Панину за внесенные ценные замечания.

Рецензенты: д.ф.-м. н., профессор *Ю.А. Пирогов,*
д.ф.-м. н., профессор *А.И. Чуличков*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

§ 1. Уравнение Пуассона и потенциал электростатического поля

Многие стационарные физические процессы, например, стационарное распределение температуры, распределение потенциала электростатического поля, стационарное течение жидкости описываются с помощью уравнения Пуассона. Рассмотрим математическую постановку краевой задачи для этого уравнения:

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \quad M \in D \subset \mathbb{R}^3, \\ \alpha \dfrac{\partial u}{\partial n} + \beta u \Big|_S = f(P), \quad P \in S, \quad |\alpha| + |\beta| > 0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

где S — граница области D.

Введем понятие функции Грина на примере задачи электростатики. Потенциал $\varphi(M)$ электростатического поля удовлетворяет уравнению Пуассона [1, 7]:

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho(M), \quad M \in \mathbb{R}^3, \tag{1.1.2}$$

где $\rho(M)$ — объемная плотность заряда (здесь и далее используется система единиц СГС).

С другой стороны, из курса общей физики [13] известно, что потенциал системы точечных зарядов q_k в силу принципа суперпозиции представим в виде:

$$\varphi(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{q_k}{r_{M_k M}}.$$

Здесь $r_{MM_k} = \sqrt{(x-x_k)^2 + (y-y_k)^2 + (z-z_k)^2}$ — расстояние между точкой наблюдения $M(x,y,z)$ и точкой $M_k(x_k, y_k, z_k)$, в которой расположен заряд q_k (точкой источника).

Если же заряд распределен в некотором объеме V_0 с непрерывной плотностью $\rho(M)$, то суммирование заменяется интегрированием по данному объему:

$$\varphi(M) = \int\limits_{V_0} \frac{\rho(M')}{r_{_{M'M}}} dV_{M'}. \tag{1.1.3}$$

Здесь индекс M' у элемента объема означает, что интегрирование ведется по координатам точки M'.

Получив выражение (1.1.3) из физических соображений, мы должны ответить на вопрос: в каком смысле его можно считать решением уравнения (1.1.2), ведь оно удовлетворяет (1.1.2) не для любых функций $\rho(M)$, которые могут быть недостаточно гладкими.

Утверждение 1.1.1 [1] *Если плотность $\rho(M)$ непрерывна вместе со своими первыми производными, то функция (1.1.3) дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (1.1.2).*

Далее такие решения будем называть классическими. Дадим определение классического решения.

Определение 1.1.1 *Будем говорить, что функция u удовлетворяет уравнению*

$$\Delta u = -F(M) \tag{1.1.4}$$

в классическом смысле, если она дважды непрерывно дифференцируема и при подстановке в уравнение (1.1.4) обращает его в верное равенство.

Если же, например, функция $\rho(M)$ ограничена и интегрируема, но не является непрерывно дифференцируемой, то функция (1.1.3) только один раз непрерывно дифференцируема [1]. В этом случае уже недостаточно понятия классического решения дифференциального уравнения, и его нужно некоторым образом расширить. Для этого служит аппарат обобщенных функций и обобщенных решений, о котором речь пойдет несколько позже.

Естественно, описанный выше способ получения решения задачи в виде суперпозиции вкладов от элементарных источников применим не только в электростатике. Его можно обобщить на все задачи типа (1.1.1), если функции F и f удовлетворяют определенным условиям, которые будут сформулированы ниже. Для этого используется аппарат функций Грина, которые описывают поле точечного источника в области D с соответствующими граничными условиями. Поэтому прежде всего мы рассмотрим точечный источник в неограниченном пространстве, а затем уже будем учитывать граничные условия для каждого конкретного типа задач.

§ 2. Плотность точечного источника

Возникает естественный вопрос: каким образом можно математически описать плотность точечного заряда в электростатике. Для того, чтобы выяснить, что происходит в точке M_0, в которую помещен единичный заряд, поступим следующим образом. В изложении будем следовать [9]. Предположим, что весь заряд равномерно распределен по шару $K(M_0, \varepsilon)$ с центром в M_0 и радиусом ε, и попробуем перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. Введем функцию

$$f_\varepsilon(M, M_0) = \begin{cases} \dfrac{3}{4\pi\varepsilon^3}, & M \in K(M_0, \varepsilon), \\ 0, & M \notin K(M_0, \varepsilon). \end{cases} \tag{1.2.1}$$

Очевидно, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(M, M_0)\, dV_M = 1.$$

Если мы будем рассматривать в каждой паре точек M, M_0 предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(M, M_0)$, то получим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(M, M_0) = \begin{cases} \infty, & M = M_0, \\ 0, & M \neq M_0. \end{cases}$$

При этом интеграл от функции $f_\varepsilon(M, M_0)$ при каждом фиксированном ε остается равным единице:

$$1 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(M, M_0)\, dV_M.$$

Более того, для любой непрерывной в точке M_0 функции $\psi(M)$ предел при $\varepsilon \to 0$ от интеграла $\int\limits_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(M, M_0)\psi(M) dV_M$ будет конечен и равен $\psi(M_0)$. В самом деле, из непрерывности функции $\psi(M)$ следует, что $\forall\sigma > 0\ \exists\varepsilon > 0$, такое, что для любых точек

M, M_0 из области определения функции $\psi(M)$ при выполнении условия

$$0 < r_{MM_0} \leqslant \varepsilon$$

будет справедливо неравенство

$$|\psi(M) - \psi(M_0)| \leqslant \sigma.$$

Заметим, что если взять точку M внутри шара $K(M_0, \varepsilon)$ радиуса ε с центром в M_0, то расстояние r_{MM_0} между M и M_0 не превосходит ε. Тогда

$$\begin{aligned}
&\left| \int\limits_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(M, M_0)\, \psi(M)\, dV_M - \psi(M_0) \right| = \\
&\quad = \left| \int\limits_{K(M_0,\varepsilon)} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \psi(M)\, dV_M - \psi(M_0) \underbrace{\int\limits_{K(M_0,\varepsilon)} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} dV_M}_{=1} \right| = \\
&\quad = \left| \int\limits_{K(M_0,\varepsilon)} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left(\psi(M) - \psi(M_0)\right) dV_M \right| \leqslant \\
&\quad \leqslant \int\limits_{K(M_0,\varepsilon)} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \left|\psi(M) - \psi(M_0)\right| dV_M \leqslant \\
&\quad \leqslant \sigma \int\limits_{K(M_0,\varepsilon)} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} dV_M = \sigma,
\end{aligned}$$

что означает

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(M, M_0)\, \psi(M)\, dV_M = \psi(M_0). \tag{1.2.2}$$

Мы можем рассматривать интеграл в (1.2.2) как результат действия функционала, за которым сохраним обозначение f_ε, на непрерывную функцию $\psi(M)$:

$$\langle f_\varepsilon, \psi \rangle \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^3} f_\varepsilon(M, M_0)\, \psi(M)\, dV_M.$$

Тогда равенство (1.2.2) означает, что

$$\psi\left(M_0\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \langle f_\varepsilon, \psi \rangle. \tag{1.2.3}$$

Выражение в правой части (1.2.3) представляет собой результат действия некоторого функционала, который обозначим как $\delta(M, M_0)$, на функцию ψ.

Определение 1.2.1 *Функционал $\delta(M, M_0)$, действующий на любую непрерывную в точке M_0 функцию $\psi(M)$ по правилу*

$$\langle \delta(M, M_0), \psi(M) \rangle = \psi\left(M_0\right), \tag{1.2.4}$$

называют δ-функцией Дирака.

Таким образом, плотность единичного точечного заряда, расположенного в точке M_0, можно определить как $\delta(M, M_0)$. Тогда плотность точечного заряда величины q представляет собой функционал

$$\rho(M, M_0) = q \cdot \delta(M, M_0).$$

Заметим, что для вычисления полного заряда нужно подействовать этим функционалом на функцию $\psi(x) \equiv 1$:

$$\langle \rho(M, M_0), 1 \rangle = q.$$

Если в области D распределен заряд с объемной плотностью $\rho(M)$. Тогда полный заряд этой области можно получить по формуле:

$$Q = \int\limits_D \rho(M) dV = \langle \rho(M), 1 \rangle.$$

Замечание 1.2.1 *В декартовых координатах функционалы*

$$\delta(M, M_0) \quad \text{и} \quad \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$$

действуют на любую непрерывную в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ функцию $\psi(M)$ одинаково, поэтому их можно считать равными.

В сферических координатах имеет место равенство

$$\delta(M, M_0) = \frac{1}{r_0^2 \sin\theta_0} \delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\varphi - \varphi_0).$$

В полярных координатах

$$\delta(M, M_0) = \frac{1}{r_0} \delta(r - r_0)\delta(\varphi - \varphi_0).$$

§ 3. Понятие обобщенной функции

Функционал $\delta(M, M_0)$, действующий на множестве непрерывных в точке M_0 функций, является примером так называемых обобщенных функций. Вообще говоря, любая обобщенная функция представляет собой функционал. Для того, чтобы ввести строгое определение пространства обобщенных функций, необходимо сперва определить пространство *основных функций* $\psi(M)$, на котором действуют эти функционалы. Сначала дадим определение финитной функции в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Определение 1.3.1 *Ограниченная на $\mathbb{R}^n$ функция $\psi(M)$ называется финитной, если существует шар*

$$\left\{M(x_1, x_2, ..., x_n) \,\middle|\, \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \leqslant R\right\},$$

вне которого функция $\psi(M)$ всюду равна 0. Замыкание множества $\{M \,|\, \psi(M) \neq 0\}$ называется носителем функции $\psi(M)$ и обозначается $\operatorname{supp}\psi$.

Отметим, что $\psi(M) \equiv 0$ вне $\operatorname{supp}\psi$. Множество $\operatorname{supp}\psi$ состоит из всех точек M, где $\psi(M) \neq 0$, и точек M, в любой окрестности которых найдется точка M', где $\psi(M') \neq 0$.

Определение 1.3.2 *Назовем совокупность всех финитных бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^n$ функций множеством основных функций $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$.*

Определим сходимость в $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ следующим образом:

Определение 1.3.3 *Функциональная последовательность $\{\psi_k(M)\}$ из $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ называется сходящейся к функции $\psi(M)$ из $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$, если существует такой шар $U \subset \mathbb{R}^n$, что $\operatorname{supp}\psi_k \subset U$ $(k = 1, 2, ...)$, и для любой производной функции $\psi_k(M)$ выполнено*

$$D^\alpha\psi_k(M) \rightrightarrows D^\alpha\psi(M) \quad \textit{при } k \to \infty,$$

где $D^\alpha = \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, $\alpha_i = 0, 1, 2, \ldots$, *включая случай $\alpha = 0$, что означает равномерное стремление самих функций $\psi_k(M)$ к функции $\psi(M)$ при $k \to \infty$.*

Определение 1.3.4 *Линейное пространство $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ с введенной таким образом сходимостью называется пространством основных функций.*

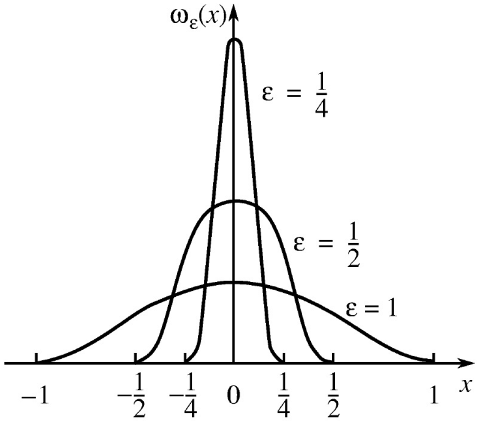

Рис. 1.3.1.

Замечание 1.3.1 *Пространство основных функций не пусто. Например, ему принадлежит функция «шапочка» (рис. 1.3.1), которая часто используется на практике:*

$$\omega_\varepsilon\left(M,M_0\right)=\begin{cases} C_\varepsilon \exp\left\{-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-R^2_{MM_0}}\right\}, & M\in K\left(M_0,\varepsilon\right), \\ 0, & M\notin K\left(M_0,\varepsilon\right), \end{cases} \tag{1.3.1}$$

где $K\left(M_0,\varepsilon\right)$ — шар радиуса ε с центром в точке M_0, а постоянная C_ε выбирается таким образом, чтобы

$$\int\limits_{K(M_0,\varepsilon)} \omega_\varepsilon\left(M,M_0\right)dV_M=1.$$

Утверждение 1.3.1 *Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Для любой достаточно гладкой функции $f(M)$, определенной в $\mathbb{R}^n$, можно построить основную функцию $\psi(M)$, совпадающую с $f(M)$ в области D.*

Действительно, это можно сделать, умножая функцию $f(M)$ на так называемую срезающую функцию $\eta\left(M\right)$. Срезающая функция обладает следующими свойствами: она является бесконечно гладкой, принимает значение 1 всюду в области D и достаточно быстро убывает до нуля вне области D. Функцию $\eta\left(M\right)$ можно построить, например, следующим образом. Окружим границу ∂D области D эквидистантной поверхностью ∂D_ε, находящейся на расстоянии $d=\varepsilon$ от ∂D (см.

рис. 1.3.2). Область внутри поверхности ∂D_ε назовем D_ε. Аналогично определим поверхность $\partial D_{2\varepsilon}$ и область $D_{2\varepsilon}$. Введем характеристическую функцию области D_ε:

$$\chi_\varepsilon(M) = \begin{cases} 0, & M \notin D_\varepsilon, \\ 1, & M \in D_\varepsilon. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\eta(M) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} \chi_\varepsilon(M')\,\omega_\varepsilon(M', M)\,dV_{M'}, \tag{1.3.2}$$

где $\omega_\varepsilon(M', M)$ определена формулой (1.3.1).

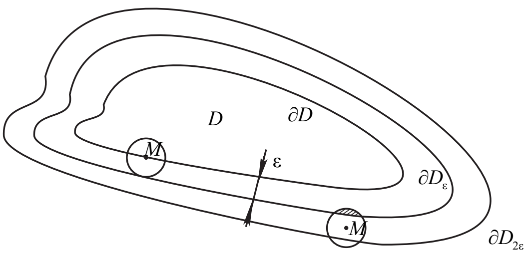

Рис. 1.3.2.

Функция $\omega_\varepsilon(M', M)$ отлична от нуля только в шаре $K(M, \varepsilon)$ с центром в точке M и радиусом ε. Если $M \in \overline{D}$, то $K(M, \varepsilon) \subset D_\varepsilon$, и интеграл (1.3.2) равен 1 в силу нормировки функции $\omega_\varepsilon(M', M)$. Если $M \in D_{2\varepsilon} \backslash \overline{D}$, то только часть шара $K(M, \varepsilon)$ попадает внутрь области D_ε (см. рис. 1.3.2), и поэтому $0 < \eta(M) < 1$. Если $M \notin D_{2\varepsilon}$, то шар $K(M, \varepsilon)$ и область D_ε не пересекаются, и $\eta(M) = 0$. Интеграл (1.3.2) зависит от координат точки M как от параметров и представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию этих координат в силу бесконечной дифференцируемости подынтегральной функции [19]. Итак, функция

$$\psi(M) = \eta(M) \cdot f(M)$$

совпадает с функцией $f(M)$ в области D и принадлежит пространству основных функций.

Теперь, когда пространство основных функций задано, можно ввести понятие обобщенной функции.

Определение 1.3.5 *Обобщенной функцией называется всякий линейный непрерывный функционал f, действующий на пространстве основных функций $\mathfrak{D}$, то есть:*

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *и* $\forall \psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{D}$

$$\langle f, \alpha\psi_1 + \beta\psi_2 \rangle = \alpha \langle f, \psi_1 \rangle + \beta \langle f, \psi_2 \rangle;$$

2) $\forall \{\psi_k\} \subset \mathfrak{D}$, $\psi_k \to \psi \in \mathfrak{D}$ *(в смысле введенной выше сходимости в* $\mathfrak{D}$*) при* $k \to \infty$

$$\langle f, \psi_k \rangle \to \langle f, \psi \rangle, \ k \to \infty.$$

Аргументы функций опущены для сокращения записи.

Введем операции сложения обобщенных функций и умножения обобщенной функции на число *над полем комплексных чисел*:

$$\langle f+g, \psi\rangle = \langle f, \psi\rangle + \langle g, \psi\rangle\,,\ \forall\psi\in\mathfrak{D},$$

$$\langle \lambda\cdot f, \psi\rangle = \overline{\lambda}\,\langle f, \psi\rangle\,,\ \forall\psi\in\mathfrak{D}.$$

Как обычно, черта над λ означает комплексное сопряжение.

Множество всех обобщенных функций, определенных на $\mathfrak{D}$, с заданными на нем операциями сложения и умножения на число образует линейное пространство $\mathfrak{D}'$.

Под сходимостью в пространстве обобщенных функций понимают слабую сходимость.

Определение 1.3.6 *Говорят, что последовательность обобщенных функций $f_n\in\mathfrak{D}'$ сходится к обобщенной функции $f\in\mathfrak{D}'$, если*

$$\langle f_n, \psi\rangle \to \langle f, \psi\rangle\ \ \textit{при}\ n\to\infty$$

для любой функции $\psi\in\mathfrak{D}$.

Обобщенные функции делятся на регулярные и сингулярные.

Определение 1.3.7 *Обобщенная функция f называется регулярной, если существует функция $F(M)$, интегрируемая на любом замкнутом ограниченном множестве, такая что*

$$\langle f, \psi\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\overline{F(M)}\psi(M)dV_M,\quad \forall\psi\in\mathfrak{D}. \tag{1.3.3}$$

Поскольку функция $\psi(M)$ финитна, то интегрирование в формуле (1.3.3) ведется по ограниченной области $\operatorname{supp}\psi$.

Все прочие обобщенные функции называют сингулярными. Например, δ-функция — это сингулярная обобщенная функция [3, 4].

Введем понятие производной обобщенной функции. Пусть $F(M)\in C^{(1)}(\mathbb{R}^n)$ и $\psi(M)\in\mathfrak{D}$. В основе понятия обобщенной производной лежит формула, вытекающая из формулы интегрирования по частям:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\psi dV = -\int\limits_{\mathbb{R}^n}F\frac{\partial\psi}{\partial x_i}dV. \tag{1.3.4}$$

Интегрирование по пространству $\mathbb{R}^n$ ведется при $-\infty<x_i<+\infty$, $i=\overline{1,n}$, а все подстановки на бесконечности обращаются в 0 за счет финитности функции ψ. Поскольку интегралы можно понимать как результат действия линейного непрерывного функционала на гладкую финитную функцию ψ в смысле определения (1.3.7), то равенство (1.3.4) можно переписать в виде:

$$\left\langle\frac{\partial f}{\partial x_i}, \psi\right\rangle = -\left\langle f, \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right\rangle, \tag{1.3.5}$$

где f — обобщенная функция, порождаемая функцией $F(M)$. Равенство (1.3.5) примем за определение производной обобщенной функции, как регулярной, так и сингулярной.

Определение 1.3.8 *Функционал, действующий на любую функцию $\psi \in D$ по правилу (1.3.5), называется производной $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ обобщенной функции f.*

Аналогично можно определить производные любого порядка от обобщенных функций.

Определение 1.3.9 *Производной*

$$D^\alpha f = \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}} f,$$

где $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, $\alpha_i = 0, 1, 2, \ldots$, обобщенной функции f называется функционал, действующий на любую функцию $\psi \in \mathfrak{D}$ по правилу:

$$\langle D^\alpha f, \psi \rangle = (-1)^\alpha \langle f, D^\alpha \psi \rangle .$$

§ 4. Потенциал поля точечного источника. Фундаментальное решение оператора Лапласа в трехмерном случае.

Пусть точечный заряд величины q помещен в точку M_0 неограниченного однородного пространства $\mathbb{R}^3$. Как было показано раньше, плотность точечного заряда дается формулой:

$$\rho(M, M_0) = q \cdot \delta(M, M_0).$$

Уравнение (1.1.2) для потенциала поля этого заряда, записанное в виде

$$\Delta \varphi = -4\pi q \delta(M, M_0), \tag{1.4.1}$$

означает, что для любой функции $\psi(M) \in \mathfrak{D}$ справедливо равенство:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(M, M_0) \Delta \psi dV_M = -4\pi q \psi(M_0) \tag{1.4.2}$$

Покажем, что хорошо известный из электростатики потенциал поля точечного заряда

$$\varphi(M, M_0) = \frac{q}{r_{MM_0}} \tag{1.4.3}$$

удовлетворяет уравнению (1.4.2) во всем пространстве $\mathbb{R}^3$. Для любой функции $\psi(M) \in \mathfrak{D}$, где $\mathfrak{D}$ — пространство основных функций, найдется число $R > 0$, такое что $\operatorname{supp}\psi \subset K(M_0, R)$, где $K(M_0, R)$ — шар радиуса R с центром в точке M_0. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \varphi(M, M_0)\Delta\psi(M)dV_M = q \int\limits_{K(M_0,R)} \frac{\Delta\psi(M)}{r_{MM_0}} dV_M. \tag{1.4.4}$$

Используя третью формулу Грина (A.1.6) (см. Приложение 1), получим:

$$\int\limits_{K(M_0,R)} \frac{\Delta\psi(M)}{r_{MM_0}} dV_M =$$
$$= \int\limits_{\Sigma(M_0,R)} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial\psi(P)}{\partial n_P} - \psi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \frac{1}{r_{PM_0}} \right) d\sigma_P - 4\pi\psi(M_0),$$

где $\Sigma(M_0, R)$ — сфера радиуса R с центром в точке M_0, $\vec{n}_P$ — вектор внешней нормали к сфере в точке P. Так как $\operatorname{supp}\psi \subset K(M_0, R)$, то финитная функция ψ вместе со всеми своими производными тождественно равна 0 на сфере $\Sigma(M_0, R)$, и поверхностный интеграл в последнем выражении обращается в ноль. Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{q}{r_{MM_0}} \Delta\psi(M)dV_M = -4\pi q\psi(M_0),$$

что и требовалось доказать.

Определение 1.4.1 *Фундаментальным решением оператора Лапласа называется всякая обобщенная функция, являющаяся решением уравнения*

$$\Delta\varphi = -\delta(M, M_0). \tag{1.4.5}$$

Очевидно, что фундаментальное решение определяется с точностью до произвольного решения однородного уравнения

$$\Delta\varphi = 0.$$

Положив величину q точечного заряда в формуле (1.4.3) равной $\dfrac{1}{4\pi}$, получим частное решение уравнения (1.4.5):

$$\varphi(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{MM_0}}.$$

Следовательно, функция

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v, \tag{1.4.6}$$

где v — произвольная гармоническая функция, есть фундаментальное решение оператора Лапласа в трехмерном пространстве.

Замечание 1.4.1 *Фундаментальное решение оператора Лапласа можно получить следующим образом. Поскольку фундаментальное решение удовлетворяет уравнению (1.4.5) в смысле обобщенных функций, то в классическом смысле функция* φ *удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме точки* M_0. *Функция* φ *имеет вид:*

$$\varphi(M, M_0) = g(M, M_0) + v(M),$$

где $g(M, M_0)$ *— частное решение уравнения уравнения (1.4.5), зависящее только от расстояния* $r_{_{MM_0}}$ *между точками* M *и* M_0 *и имеющее особенность при* $r_{_{MM_0}} \to 0$, *а* $v(M)$ *— гармоническая функция. Для того, чтобы найти* $g(M, M_0)$, *поместим начало координат в точку* M_0. *В этой системе координат решение* $g(M, M_0) = g(r_{_{MM_0}}) = g(r)$ *обладает радиальной симметрией. Решая уравнение*

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dg}{dr}\right) = 0, \quad r > 0,$$

получим $g(r) = \dfrac{A}{r} + B$, *где* A *и* B *— произвольные постоянные. Выбираем решение, имеющее особенность в начале координат:*

$$g(r) = \frac{A}{r}.$$

Возвращаясь к исходным координатам, получаем:

$$g(M, M_0) = \frac{A}{r_{_{MM_0}}}.$$

Остается найти нормировочный множитель A, *так чтобы* $g(M, M_0)$ *удовлетворяла уравнению (1.4.5). Это означает, что должно выполняться равенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} g(M, M_0)\Delta\psi(M)dV_M = -\psi(M_0),$$

или же

$$A\int\limits_{\mathbb{R}^3} \frac{\Delta\psi(M)}{r_{_{MM_0}}}dV_M = -\psi(M_0). \tag{1.4.7}$$

Сравнивая (1.4.7) с третьей формулой Грина (A.1.6), получаем $A = \dfrac{1}{4\pi}$.

Рассмотренный потенциал поля точечного заряда является примером обобщенного решения дифференциального уравнения. По аналогии с (1.4.2) можно ввести понятие обобщенного решения уравнения

$$\Delta u = -F(M). \tag{1.4.8}$$

Определение 1.4.2 *Будем называть функцию $u(M)$ обобщенным решением уравнения (1.4.8), если она удовлетворяет равенству*

$$\int_{\mathbb{R}^3} u(M)\cdot\Delta\psi(M)dV = -\int_{\mathbb{R}^3} F(M)\cdot\psi(M)dV \tag{1.4.9}$$

для любой функции $\psi(M)\in\mathfrak{D}$.

Понятие обобщенного решения уравнения шире понятия классического решения, так как функция $u(M)$ может быть недифференцируемой. Если же u удовлетворяет уравнению (1.4.8) в классическом смысле, то она удовлетворяет ему и в обобщенном.

§ 5. Потенциал заряженной нити. Фундаментальное решение оператора Лапласа в двумерном случае.

Найдем электростатический потенциал бесконечной тонкой заряженной нити, линейная плотность зарядов которой постоянна и равна e. Выберем систему координат таким образом, чтобы ось Oz была параллельна нити. Пусть нить проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Потенциал поля, создаваемого нитью в точке наблюдения $M(x, y, z)$, можно рассматривать как сумму потенциалов полей элементарных зарядов величины $ed\zeta$, имеющих координату $z = \zeta$, непрерывно распределенных вдоль нити. Непосредственное вычисление потенциала поля бесконечной нити приводит к расходящемуся интегралу. Поэтому найдем сначала напряженность электростатического поля нити. Величина напряженности поля, создаваемого участком нити длины $d\zeta$, равна

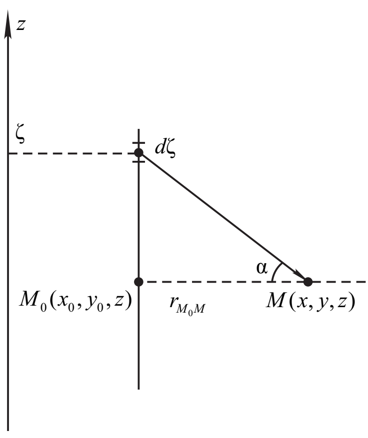

Рис. 1.5.3.

$$dE = \frac{ed\zeta}{(z-\zeta)^2 + r_{M_0M}^2},$$

где $r_{M_0M} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ — расстояние от точки M до нити (см. рис 1.5.3). Радиальная составляющая напряженности поля в точке $M(x, y, z)$ имеет вид:

$$dE_r = \frac{ed\zeta}{(z-\zeta)^2 + r_{M_0M}^2}\cdot\cos\alpha = \frac{er_{M_0M}d\zeta}{\left((z-\zeta)^2 + r_{M_0M}^2\right)^{3/2}}, \tag{1.5.1}$$

так как $\cos\alpha = \dfrac{r_{M_0M}}{\sqrt{(z-\zeta)^2 + r^2_{M_0M}}}$, а составляющая вдоль оси Oz равна

$$dE_z = \frac{ed\zeta}{(z-\zeta)^2 + r^2_{M_0M}} \cdot \sin\alpha = \frac{e(\zeta - z)d\zeta}{\left((z-\zeta)^2 + r^2_{M_0M}\right)^{3/2}}. \tag{1.5.2}$$

Бесконечная нить создает в точке $M(x, y, z)$ поле, напряженность которого не зависит от z и имеет вид:

$$\vec{E}(r_{M_0M}) = E(r_{M_0M}) \cdot \frac{\vec{r}_{M_0M}}{r_{M_0M}}.$$

В том, что z-компонента напряженности поля в любой точке M равна нулю, можно убедиться, непосредственно интегрируя выражение (1.5.2) вдоль прямой $-\infty < \zeta < +\infty$.

Согласно принципу суперпозиции, величину $E(r_{M_0M})$ можно вычислить по формуле:

$$E(r_{M_0M}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e\, r_{M_0M}\, d\zeta}{\left(r^2_{M_0M} + (z-\zeta)^2\right)^{3/2}}.$$

Последний интеграл вычисляется при помощи подстановки

$$\frac{\zeta - z}{r_{M_0M}} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Тогда

$$\frac{d\zeta}{r_{M_0M}} = \frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

В результате получаем

$$E(r_{M_0M}) = \frac{e}{r_{M_0M}} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\alpha d\alpha = \frac{2e}{r_{M_0M}}.$$

Для вычисления потенциала нити воспользуемся тем, что $\vec{E}\left(r_{M_0M}\right) = -\nabla\varphi\left(r_{M_0M}\right)$, то есть $E\left(r_{M_0M}\right) = -\dfrac{d\varphi}{dr_{M_0M}}$, откуда

$$\varphi(M, M_0) = 2e\ln\frac{1}{r_{MM_0}} + const. \tag{1.5.3}$$

Замечание 1.5.1 *Потенциал φ, создаваемый равномерно заряженной бесконечной нитью, не зависит от координаты z. Поэтому задачу можно рассматривать как двумерную в любой плоскости,* *перпендикулярной нити. Сечение нити этой плоскостью может рассматриваться как точечный «заряд» в двумерном пространстве, потенциал которого дается формулой (1.5.3).*

Используя третью формулу Грина в двумерном случае (A.3.3) аналогично тому, как это сделано в трехмерном случае, можно показать, что потенциал (1.5.3) удовлетворяет уравнению

$$\Delta_{M}\varphi = -4\pi e\delta(M, M_0), \tag{1.5.4}$$

где $M_0 = M_0(x_0, y_0)$ и $M = M(x, y)$.

Функция

$$\varphi(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}}$$

является частным решением уравнения

$$\Delta_{M}\varphi = -\delta(M, M_0). \tag{1.5.5}$$

Фундаментальным решением оператора Лапласа в двумерном случае является функция

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} + v(M), \tag{1.5.6}$$

где $v(M)$ — любая гармоническая на плоскости функция.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1.5.1. *Докажите, что $\mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ является линейным пространством.*

Задача 1.5.2. *Докажите, что множество $\mathfrak{D}'$ всех обобщенных функций, определенных на $\mathfrak{D}$, с заданными на нем операциями сложения и умножения на число образует линейное пространство.*

Задача 1.5.3. *Докажите, что классическое решение уравнения $\Delta u = -F$ удовлетворяет ему и в обобщенном смысле.*

Глава 2

ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ

§ 1. Внутренние трехмерные задачи

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в области $D \subset \mathbb{R}^3$, ограниченной замкнутой поверхностью Ляпунова [1)] S:

$$\Delta u = -F(M), \quad M \in D, \tag{2.1.1}$$

$$u|_S = f(P), \quad P \in S \tag{2.1.2}$$

Определение 2.1.1 *Будем называть классическим решением задачи (2.1.1-2.1.2) функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D, непрерывную в области $\overline{D}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (2.1.1) в области D и граничному условию (2.1.2).*

Утверждение 2.1.1 *Если выполнены условия $F \in L_2(D) \cap C^{(1)}(D)$ и $f \in C(S)$, то задача (2.1.1-2.1.2) имеет единственное решение* [1]. Для того, чтобы найти это решение, воспользуемся второй формулой

[1)] Поверхность S называется поверхностью Ляпунова, если выполнены условия:
— в каждой точке поверхности S существует нормаль (или касательная плоскость);
— существует такое число d, что прямые, параллельные нормали в точке P поверхности S, пересекают не более одного раза часть поверхности S, лежащую внутри шара радиуса d с центром в точке P;
— угол γ между нормалями в двух разных точках, находящихся внутри одной окрестности Ляпунова, удовлетворяет следующему условию: $\gamma \leqslant Ar^\delta$, где r — расстояние между этими точками, A — некоторая конечная постоянная и $0 < \delta \leqslant 1$.

Свойства поверхности Ляпунова:
— если S — поверхность Ляпунова, тогда справедливо $S \in C^1$, обратное, вообще говоря, не верно.
— если $S \in C^2$, тогда S является поверхностью Ляпунова с $\delta = 1$.

Грина [3]:

$$\int\limits_D \big(G(Q,M)\Delta_{_Q} u(Q) - u(Q)\Delta_{_Q} G(Q,M)\big)\, dV_Q = \\ = \int\limits_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right) dS_P, \tag{2.1.3}$$

где $G(Q,M) = \dfrac{1}{4\pi r_{_{QM}}} + v$ — фундаментальное решение оператора Лапласа, определенное в (1.4.6).

Поскольку

$$\Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M),$$

из (2.1.3) получаем:

$$u(M) = \int\limits_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right) dS_P - \\ - \int\limits_D G(Q,M)\Delta u(Q) dV_Q. \tag{2.1.4}$$

На границе области $u|_S = f(P)$, а внутри области $\Delta u = -F(Q)$, поэтому

$$u(M) = \int\limits_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right) dS_P + \\ + \int\limits_D F(Q)G(Q,M) dV_Q. \tag{2.1.5}$$

В правой части равенства (2.1.5) остается одно неизвестное слагаемое

$$\int\limits_S G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} dS_P,$$

содержащее производную искомого решения по нормали к границе, которое не выражается через входные данные задачи. Однако фундаментальное решение $G(Q,M)$ оператора Лапласа определяется с точностью до произвольной гармонической функции v, поэтому можно выбрать ее такой, чтобы $G(P,M) = 0$ в любой точке $P \in S$. Для этого функция $v = v(Q,M)$ должна быть решением задачи Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta_{_Q} v = 0, \quad Q \in D, \\ v|_S = -\dfrac{1}{4\pi r_{_{PM}}}, \quad P \in S, \end{cases} \tag{2.1.6}$$

где производные берутся по координатам точки Q, а координаты точки M играют роль параметров. Тогда в любой внутренней точке M области D имеет место равенство:

$$u(M) = -\int\limits_S f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dS_P + \int\limits_D G(Q,M)F(Q)dV_Q. \qquad (2.1.7)$$

Это выражение является классическим решением задачи (2.1.1)-(2.1.2), если $F \in C^{(1)}(D)$ и $f \in C(S)$ [1].

Определение 2.1.2 *Функцией Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в трехмерной области D с замкнутой границей S ($\overline{D}$ — область D вместе с границей) будем называть функцию*

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q,M), \quad Q \in \overline{D}, \quad M \in D,$$

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q,M)$ — гармоническая функция координат точки $Q \in D$, непрерывная на $\overline{D}$ для каждой точки $M \in D$;
2) $G(P,M)|_{P\in S} = 0$ для каждой точки $M \in D$.

Итак, из определения функции Грина $G(Q,M)$ следует, что она является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), & Q,\ M \in D, \\ G(P,M)|_S = 0, & P \in S. \end{cases} \qquad (2.1.8)$$

Утверждение 2.1.2 *Если граница S области D является поверхностью Ляпунова, то функция Грина задачи Дирихле существует и единственна* [1].

Из постановки задачи (2.1.8) следует, что функция Грина оператора Лапласа $G(Q,M)$ определяется только областью D. С помощью функции Грина можно получить решения задач вида (2.1.1)-(2.1.2) в квадратурах, используя интегральную формулу (2.1.7).

Поясним физический смысл функции Грина на примере электростатики. Пусть в точку M области D, ограниченной идеально проводящей заземленной поверхностью S, помещен точечный заряд $+q$. В соответствии с принципом суперпозиции потенциал φ электростатического поля внутри D складывается из потенциала поля точечного заряда

$$\varphi_0(Q,M) = \frac{q}{r_{QM}}$$

и потенциала

$$v(Q,M) = \int\limits_S \frac{\sigma(P,M)}{r_{PQ}}dS_P \qquad (2.1.9)$$

поля индуцированных на внутренней стороне поверхности S зарядов плотности $\sigma(P, M)$, где

$$\int\limits_S \sigma(P, M) dS_P = -q.$$

Поверхностная плотность распределения заряда $\sigma(P, M)$ зависит от координат точки M расположения точечного заряда, однако интеграл по поверхности от этой функции представляет собой полный индуцированный заряд и от координат точки M уже не зависит. Итак, внутри области D

$$\varphi(Q, M) = \frac{q}{r_{QM}} + v(Q, M), \quad Q, M \in D,$$

причем

$$\Delta_Q v(Q, M) = 0, \quad Q, M \in D,$$

поскольку $v(Q, M)$ — потенциал поля, порождаемого зарядами, распределенными по поверхности. На поверхности S суммарный потенциал равен 0, так как она заземлена. Таким образом, функция Грина $G(Q, M)$ представляет собой потенциал поля, порождаемого в точке Q точечным зарядом величины $\dfrac{1}{4\pi}$, помещенным в точку M, если поверхность S заземлена.

Утверждение 2.1.3 *Функция Грина симметрична относительно перестановки точек Q и M* [1]*:*

$$G(Q, M) = G(M, Q).$$

Симметричность функции Грина является отражением физического принципа взаимности: заряд, помещенный в точку M, создает в точке наблюдения Q поле с таким же потенциалом, который создал бы в точке M этот же заряд, если бы он был помещен в точку Q.

Следовательно, в формуле (2.1.7) поле $u(M)$ есть результат суперпозиции полей зарядов, распределенных в точках Q области D и в точках P на ее границе S. Выражение (2.1.7) состоит из двух слагаемых, первое из которых представляет собой поверхностный потенциал (см. [1]), а второе — объемный потенциал поля зарядов, распределенных в области D с объемной плотностью $F(Q)$.

Замечание 2.1.1 *Потенциал (2.1.9) называется поверхностным потенциалом простого слоя. Подробнее о поверхностных потенциалах см.* [1].

§ 2. Внешние трехмерные задачи

Пусть область D_e — внешняя область по отношению к ограниченной области D с замкнутой границей S, являющейся поверхностью

Ляпунова. Для того, чтобы решение краевой задачи для уравнения Пуассона или Лапласа во внешней области D_e было единственным, в постановке задачи помимо краевого условия следует добавить условие на бесконечности. Таким условием является требование регулярности решения на бесконечности.

Определение 2.2.1 *В трехмерном случае функция $u(M)$ называется регулярной на бесконечности, если при достаточно большом $r \geqslant r_0$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, выполнены неравенства*

$$|u| \leqslant \frac{A}{r}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \leqslant \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \leqslant \frac{A}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \leqslant \frac{A}{r^2},$$

где $A > 0$ — некоторая постоянная.

Замечание 2.2.1 *Гармоническая в области D_e трехмерного пространства функция, равномерно стремящаяся к нулю на бесконечности, является регулярной на бесконечности* [1].

Для регулярных на бесконечности функций в трехмерном случае во внешних областях остаются справедливы формулы Грина. Воспользуемся этим для построения решения краевой задачи Дирихле:

$$\Delta u = -F(M), \quad M \in D_e, \tag{2.2.1}$$

$$u|_S = f(P), \quad P \in S, \tag{2.2.2}$$

$$u \text{ регулярна на бесконечности.} \tag{2.2.3}$$

Определение 2.2.2 *Будем называть классическим решением задачи (2.2.1-2.2.3) регулярную на бесконечности функцию, дважды непрерывно дифференцируемую в области D_e, непрерывную в области $\overline{D}_e$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (2.2.1) в области D_e и граничному условию (2.2.2).*

Утверждение 2.2.1 *Если функция $F(M)$ финитна и непрерывно дифференцируема в D_e, а функция $f(P)$ непрерывна на поверхности S, то существует единственное классическое решение задачи (2.2.1-2.2.3)* [1] .

Аналогично случаю внутренней задачи, решение задачи (2.2.1-2.2.3) можно получить с помощью функции Грина.

Определение 2.2.3 *Функцией Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в трехмерной области D_e, внешней по отношению к ограниченной области D с замкнутой границей S ($\overline{D_e}$ — область D_e вместе с границей S) будем называть функцию*

$$G(Q, M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q, M), \quad Q \in \overline{D_e}, \quad M \in D_e,$$

удовлетворяющую условиям:

1) $v(Q, M)$ — гармоническая функция координат точки $Q \in D_e$, непрерывная на $\overline{D_e}$ для каждой точки $M \in D_e$;

2) $G(P,M)|_{P\in S} = 0$ для каждой точки $M \in D_e$;
3) $G(Q,M)$ как функция аргумента $Q \in D_e$ регулярна на бесконечности для каждой точки $M \in D_e$.

Решение задачи (2.2.1) - (2.2.3) может быть найдено по формуле:

$$u(M) = -\int\limits_S f(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dS_P + \int\limits_{D_e} G(Q,M)F(Q)dV_Q. \qquad (2.2.4)$$

В выражении (2.2.4) нормаль n_p является внешней по отношению к области D_e.

Функция Грина $G(Q,M)$ является решением краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q,\ M \in D_e, \\ G(P,M)|_S = 0, \quad P \in S, \\ G(Q,M) \rightrightarrows 0 \text{ на бесконечности.} \end{cases} \qquad (2.2.5)$$

Для того, чтобы построить функцию $G(Q,M)$, достаточно решить задачу для гармонического слагаемого $v(Q,M)$:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad Q, M \in D_e \\ v|_S = -\dfrac{1}{4\pi r_{PM}}, \quad P \in S, \\ v \rightrightarrows 0 \text{ на бесконечности.} \end{cases} \qquad (2.2.6)$$

§ 3. Методы построения функции Грина задачи Дирихле

3.1. Метод электростатических изображений.

Для задач (2.1.6) и (2.2.6) выполнена теорема существования и единственности классического решения. Поэтому, если удастся получить каким-либо способом гармоническую функцию v, удовлетворяющую поставленным граничным условиям, то функция $G(M,M_0) = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{r_{MM_0}} + v$ представляет собой единственное решение задачи (2.1.8) во внутренней области или задачи (2.2.5) во внешней области.

Для ряда областей весьма эффективным способом построения функции Грина задачи Дирихле является использование метода электростатических изображений. Если рассматривать задачу в рамках электростатики, то однородные условия Дирихле означают, что область ограничена заземленной идеально проводящей поверхностью S. Пусть в точке $M_0 \in D$ помещен точечный заряд величины $q = \dfrac{1}{4\pi}$. Расположим вне области D фиктивные электрические заряды таким образом, чтобы потенциал поля на границе S обращался в ноль. Эти фиктивные заряды называются электростатическими изображениями заряда, помещенного в точку M_0. Потенциал поля, порожденного зарядами, находящимися вне области, представляет собой гармоническую внутри области D функцию v, удовлетворяющую граничному условию

$$v|_S = -\frac{1}{4\pi R_{PM_0}}, \quad P \in S. \tag{2.3.1}$$

Замечание 2.3.1 *Предложенный способ построения функции Грина является универсальным для любых задач Дирихле для оператора Лапласа и применим не только для задач электростатики.*

Пример 2.3.1. *Найдите потенциал поля, создаваемого точечным зарядом q, помещенным в точку $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 > 0$, в вакууме в верхнем полупространстве над плоскостью $z = 0$, если эта плоскость представляет собой идеальный заземленный проводник.*

Решение. Потенциал $\varphi(M, M_0)$ в точке $M = (x, y, z)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_M \varphi = -4\pi q\delta(M, M_0), \ \ x, y \in (-\infty, +\infty), \ \ z \in (0, +\infty), \\ \varphi|_{z=0} = 0, \quad x, y \in (-\infty, +\infty), \\ \varphi \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases} \tag{2.3.2}$$

Задачу (2.3.2) можно решить методом электростатических изображений: потенциал в точке M складывается из потенциала точечного заряда q, расположенного в точке M_0, и потенциала фиктивного точечного заряда $-q$, помещенного в точку M_1, симметричную M_0 относительно плоскости $z = 0$ (рис. 2.3.1):

$$M_1 = (x_0, y_0, -z_0)$$

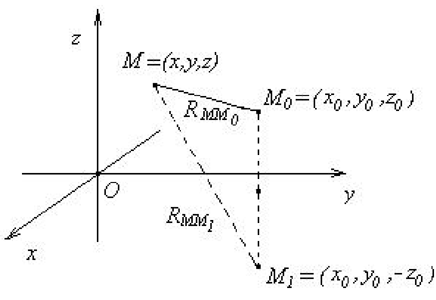

Рис. 2.3.1.

В самом деле, функция

$$\varphi(M, M_0) = q \cdot \left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{r_{MM_1}} \right) =$$
$$= q \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \right. \tag{2.3.3}$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} \right)$$

удовлетворяет уравнению (2.3.2).
Функция

$$v = -\frac{q}{r_{MM_1}}$$

является гармонической в верхнем полупространстве и удовлетворяет граничному условию

$$v|_{z=0} = -\frac{1}{4\pi R_{PM_0}}, \quad P = P(x, y, 0),$$

так как $r_{PM_0} = r_{PM_1}$ для любой точки $P(x, y, 0)$, принадлежащей плоскости $z = 0$, и равномерно стремится к нулю на бесконечности.

Замечание 2.3.2 *В случае* $q = \dfrac{1}{4\pi}$ *найденный потенциал представляет собой функцию Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле в верхнем полупространстве:*

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}}\right). \tag{2.3.4}$$

Пример 2.3.2. *Найдите плотность поверхностных зарядов $\sigma(x, y)$, индуцированных на идеально проводящей заземленной плоскости $z = 0$ зарядом $+q$, помещенным в точку M_0 верхнего полупространства.*

Решение. Известно [13], что на границе S двух сред скачок

$$[D_n]|_S = (D_{2n} - D_{1n})|_S$$

нормальной по отношению к этой границе составляющей вектора $\mathbf{D}$ равен $4\pi\sigma$. При этом нормаль $\mathbf{n}$ направлена из первой среды во вторую. Если первая среда является идеально проводящей, то поле в ней равно 0, и поэтому

$$D_{2n}|_S = -\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S = 4\pi\sigma.$$

Таким образом, если область D с границей S заполнена идеальным проводником, то плотность индуцированного на границе S поверхностного заряда равна

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_S,$$

где $\vec{n}$ — внешняя по отношению к области D нормаль к поверхности S.

Для плоской границы $z = 0$ получаем

$$\sigma(x, y) = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0}. \tag{2.3.5}$$

Подставляя в формулу (2.3.5) выражение (2.3.3) для потенциала $\varphi(M, M_0)$, находим

$$\sigma(x, y) = -\frac{q}{2\pi} \frac{z_0}{\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2\right)^{3/2}}.$$

Пример 2.3.3. *Найдите потенциал поля, создаваемого в верхнем полупространстве $z > 0$ непроводящей плоскостью, на которой распределен заданный потенциал, определяемый функцией $f(x, y)$, такой что $f(x, y) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ при $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$.*

Решение. Необходимо решить задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x, y \in (-\infty, +\infty), \quad z \in (0, +\infty), \\ u|_{z=0} = f(x, y), \quad x, y \in (-\infty, +\infty), \\ u \rightrightarrows 0 \text{ при } r \to +\infty, \end{cases} \tag{2.3.6}$$

где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Непосредственное применение формулы (2.2.4) в данной задаче неправомерно, поскольку плоскость $z = 0$ не является ограниченной поверхностью. Используем формулу (2.1.4) в области, ограниченной плоскостью $z = 0$ и полусферой $\Sigma_R^{1/2}$ с центром в начале координат и радиусом R:

$$\begin{aligned} u(M) = &-\int\limits_{U_R} f(P)\frac{\partial G(P, M)}{\partial n_P} dS_P + \\ &+ \int\limits_{\Sigma_R^{1/2}} \left(G(P, M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P, M)}{\partial n_P}\right) dS_P. \end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Здесь U_R — круг с центром в начале координат и радиусом R, лежащий в плоскости $z = 0$. Рассмотрим предел выражения (2.3.7) при $R \to +\infty$. Так как функции u и G регулярны на бесконечности, то

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Sigma_R^{1/2}} \left(G(P, M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P, M)}{\partial n_P}\right) dS_P = 0,$$

и

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{U_R} f(P)\frac{\partial G(P, M)}{\partial n_P} dS_P = \int\limits_{\mathbb{R}^2} f(P)\frac{\partial G(P, M)}{\partial n_P} dS_P.$$

Последний интеграл сходится в силу регулярности на бесконечности функций f и G. В данном случае внешняя нормаль $\vec{n}_P$ направлена против оси Oz, поэтому решение задачи можно записать в интегральном виде при помощи функции Грина (2.3.4) следующим образом:

$$u(x,y,z) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial G(P,M)}{\partial z'}\Big|_{z'=0} f(x',y')dx'dy', \tag{2.3.8}$$

где $M = M(x,y,z)$ и $P = P(x',y',0)$.

Вычислим производную функции Грина по переменной z':

$$\frac{\partial G}{\partial z'}\Big|_{z'=0} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{z'-z}{\left((x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2\right)^{3/2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{z'+z}{\left((x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'+z)^2\right)^{3/2}}\right)\Bigg|_{z'=0} =$$

$$= \frac{z}{2\pi\left((x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Подставляя это выражение в формулу (2.3.8), получим решение задачи (2.3.6):

$$u(x,y,z) = \frac{z}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x',y')dx'dy'}{\left((x'-x)^2+(y'-y)^2+z^2\right)^{3/2}}, \quad z>0. \tag{2.3.9}$$

Последний интеграл не является равномерно сходящимся по z, поэтому из формулы (2.3.9) не следует, что $u|_{z=0} = 0$.

Замечание 2.3.3 *Задачу можно решить и в случае $f(x,y) \equiv V = const$. Функция $u(M) \equiv V$ удовлетворяет уравнению и граничному условию, однако не является регулярной на бесконечности. Таким образом, полученное решение не является классическим.*

Пример 2.3.4. *Найдите потенциал поля, создаваемого отрезком длины L бесконечно тонкой равномерно заряженной нити с линейной плотностью заряда e, помещенным над идеально проводящей заземленной плоскостью. Отрезок составляет с плоскостью угол α. Расстояние от плоскости до ближайшей к ней точки отрезка равно h.*

Решение. Выберем удобную систему координат. Пусть проводящая плоскость совпадает с координатной плоскостью $z = 0$, а отрезок целиком расположен в плоскости Oyz, причем ось Oz проходит через точку M_1 отрезка, расположенную ближе всего к плоскости $z = 0$ (см. рис 2.3.2). Пусть M_0 — любая точка отрезка. Обозначим через ξ длину отрезка M_1M_0.

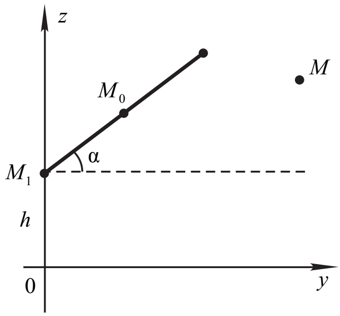

Рис. 2.3.2.

Координаты точки M_0 выражаются через величину ξ по формулам:

$$x_0 = 0, \quad y_0 = \xi\cos\alpha, \quad z_0 = h + \xi\sin\alpha.$$

Потенциал поля $\varphi(x, y, z)$, создаваемого отрезком в присутствии заземленной плоскости в точке наблюдения $M(x, y, z)$, можно рассматривать как сумму потенциалов полей элементарных зарядов величины $ed\xi$, непрерывно распределенных вдоль рассматриваемого отрезка, а также их изображений в плоскости $z = 0$:

$$\varphi(x, y, z) = e\int\limits_0^L \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 + (y - \xi\cos\alpha)^2 + (z - h - \xi\sin\alpha)^2}} -$$

$$-e\int\limits_0^L \frac{d\xi}{\sqrt{x^2 + (y - \xi\cos\alpha)^2 + (z + h + \xi\sin\alpha)^2}} =$$

$$= e\int\limits_0^L \frac{d\xi}{\sqrt{A_+^2 - B_+^2 + (\xi - B_+)^2}} - e\int\limits_0^L \frac{d\xi}{\sqrt{A_-^2 - B_-^2 + (\xi - B_-)^2}},$$

где

$$A_\pm^2 = x^2 + y^2 + (z \mp h)^2, \quad B_\pm = y\cos\alpha \pm (z \mp h)\sin\alpha.$$

Для вычисления интегралов воспользуемся табличной формулой:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C.$$

В результате получаем:

$$\varphi(x, y, z) = \ln\left|\frac{L - B_+ + \sqrt{A_+^2 - B_+^2 + (L - B_+)^2}}{L - B_- + \sqrt{A_-^2 - B_-^2 + (L - B_-)^2}}\right| - \ln\left|\frac{A_+ - B_+}{A_- - B_-}\right|.$$

Пример 2.3.5. *Найдите потенциал поля точечного заряда q, расположенного в заданной точке M_0 области, ограниченной двумя параллельными идеально проводящими заземленными плоскостями.*

Решение. Пусть расстояние между плоскостями равно l. Выберем систему координат таким образом, чтобы плоскость $z = 0$ совпадала с одной из граничных плоскостей (рис. 2.3.3). Пусть заряд помещен в точку $M_0 = M_0(x_0, y_0, z_0)$, а $M = M(x, y, z)$ — точка наблюдения.

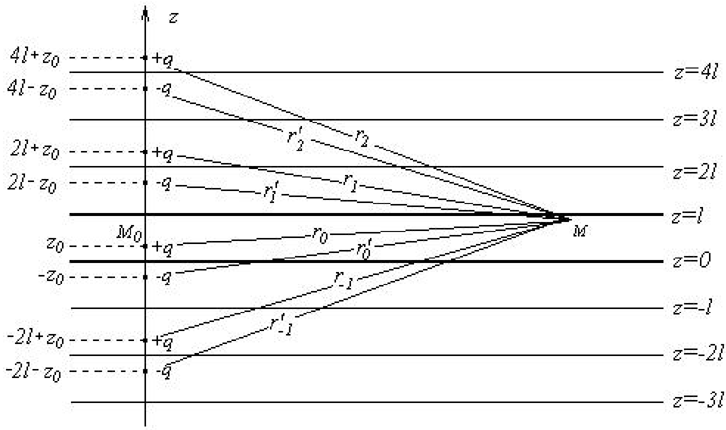

Рис. 2.3.3.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\Delta u = -4\pi q \delta(M, M_0), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ z \in (0, l), \tag{2.3.10}$$

$$u|_{z=0} = u|_{z=l} = 0. \tag{2.3.11}$$

Решение этой задачи представляет собой сумму фундаментального решения (потенциала точечного заряда, помещенного в точку M_0) и гармонической функции:

$$u = \frac{q}{r_{_{MM_0}}} + v, \ \ \Delta v = 0.$$

Гармоническую функцию v, такую чтобы искомая функция u удовлетворяла граничным условиям задачи, можно найти методом последовательных электростатических отображений в плоскостях $z = 0$ и $z = l$.

Шаг 1. Отобразим заряд q в плоскости $z = 0$ и поместим в точку $(x_0, y_0, -z_0)$ фиктивный заряд величины $-q$. Функция

$$u_0 = q \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0'} \right),$$

где

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

$$r_0' = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}$$

удовлетворяет уравнению (2.3.10) и условию $u_0 = 0$ при $z = 0$. Однако условие $u_0 = 0$ при $z = l$ не выполняется.

Шаг 2. Построим отображение системы зарядов, реального, расположенного в точке (x_0, y_0, z_0), и фиктивного, расположенного в точке $(x_0, y_0, -z_0)$, относительно плоскости $z = l$, меняя знаки у отображенных зарядов на противоположные. В результате получаем систему четырех зарядов. Функция

$$u_1 = q\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0'}\right) + q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right),$$

где

$$r_1 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2l+z_0))^2},$$

$$r_0' = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2l-z_0))^2}$$

удовлетворяет уравнению (2.3.10) и условию $u_1 = 0$ при $z = l$, но не обращается в нуль при $z = 0$.

Последовательно повторяя отображения в плоскостях $z = 0$ и $z = l$, получим решение в виде ряда

$$u = q\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_n'}\right), \tag{2.3.12}$$

где

$$r_n = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2ln+z_0))^2}$$

$$r_n' = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2ln-z_0))^2}$$

Покажем, что этот ряд равномерно сходится. Рассмотрим

$$a_n = \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_n'} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2ln+z_0))^2}} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2ln-z_0))^2}} =$$

$$= -\,2z_0\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{1}{r_n}\bigg|_{z_0=z_0^*} = -2z_0\frac{z-(2ln+z_0^*)}{(r_n^*)^3}, \quad z_0^* \in (0, l),$$

где

$$r_n^* = r_n(z_0^*) = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2ln+z_0^*))^2}.$$

Следовательно,

$$|a_n| < \frac{2l}{(r_n^*)^2} < \frac{2}{(2n-1)^2 l}.$$

Полученная оценка показывает, что ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n$ сходится равномерно и абсолютно, так как сходится его мажорантный ряд. Аналогичным образом можно показать, что ряд (2.3.12) можно дважды дифференцировать. Условия $u = 0$ при $z = 0$ и $z = l$ также оказываются выполненными, так как на каждом шаге одно из граничных условий выполняется точно, а ошибка в другом граничном условии убывает как $\dfrac{1}{n^2}$.

Пример 2.3.6. *Найдите функцию Грина задачи Дирихле внутри двугранного угла величины* $\dfrac{\pi}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. С точностью до умножения на постоянную рассматриваемая задача эквивалентна задаче о нахождении потенциала поля заряда, помещенного внутрь двугранного угла, ограниченного идеально проводящими заземленными плоскостями.

Направим ось z вдоль ребра угла и введем цилиндрические координаты. Пусть заряд $+q$ помещен в точку $M_0\,(r_0, \psi_0, z_0)$. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\Delta\varphi = -4\pi q\delta(M, M_0),\ \ \psi \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right), \tag{2.3.13}$$

$$\varphi|_{\psi=0} = \varphi|_{\psi=\frac{\pi}{n}} = 0. \tag{2.3.14}$$

Воспользуемся методом электростатических отображений. Чтобы удовлетворить однородным граничным условиям на полуплоскости $\psi = 0$ отобразим исходный заряд относительно плоскости $\psi = 0$, а чтобы удовлетворить условиям на полуплоскости $\psi = \dfrac{\pi}{n}$ отобразим исходный заряд относительно плоскости $\psi = \dfrac{\pi}{n}$ (рис. 2.3.4 а)). Наличие двух плоскостей приводит к тому, что попытка удовлетворить однородному граничному условию методом электростатических отображений на одной из них приводит к нарушению граничного условия на другой. Поэтому не удается удовлетворить двум условиям сразу. Отобразим эту систему зарядов относительно плоскостей $\psi = 0$ и $\psi = \dfrac{\pi}{n}$ (рис. 2.3.4 б)) и будем продолжать этот процесс пока «круг не замкнется». Тогда на $n-1$ шаге получим систему зарядов, потенциал суммарного поля которых удовлетворит граничным условиям, что следует из геометрических соображений. Все фиктивные заряды будут расположены на окружности $r = r_0$ в плоскости $z = z_0$. В результате в точках с координатами $\left(r_0, \dfrac{2\pi k}{n} + \psi_0, z_0\right)$, $k = 0, 1, ..., n-1$, окажутся положительные заряды, а в точках с координатами $\left(r_0, \dfrac{2\pi k}{n} - \psi_0, z_0\right)$, $k = 0, 1, ..., n-1$ — отрицательные.

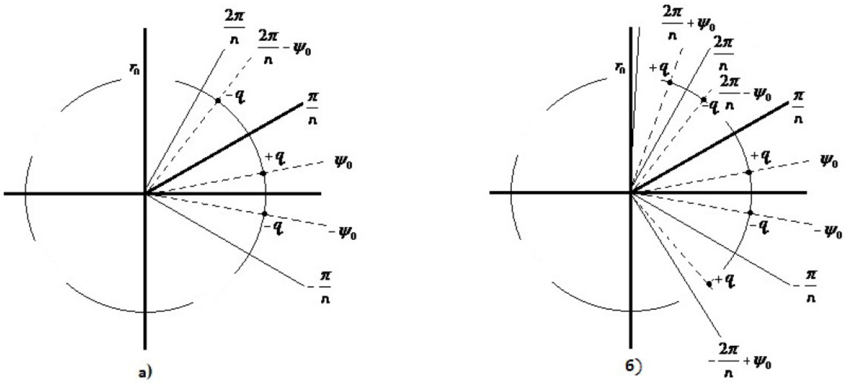

Рис. 2.3.4.

Следовательно, потенциал поля точечного заряда, помещенного в точку M_0 внутри двугранного угла имеет вид:

$$\varphi(M, M_0) = q\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{R^+_{MM_k}} - \frac{1}{R^-_{MM_k}}\right). \tag{2.3.15}$$

Здесь $R^{\pm}_{MM_k}$, $k = 0, 1, ..., n-1$ — расстояния от точки наблюдения $M(r, \psi, z)$ до зарядов системы:

$$R^+_{MM_k} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos\left(\frac{2\pi k}{n} + \psi_0 - \psi\right) + (z - z_0)^2},$$

$$R^-_{MM_k} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos\left(\frac{2\pi k}{n} - \psi_0 - \psi\right) + (z - z_0)^2}.$$

Положив, как и раньше, $q = \dfrac{1}{4\pi}$ в выражении (2.3.15), мы получим функцию Грина задачи Дирихле в двугранном угле величины $\dfrac{\pi}{n}$.

Замечание 2.3.4 *При использовании метода электростатических изображений для задачи с двугранным углом существенно, что n является целым числом. Действительно, если n не целое, то для выполнения однородных граничных условий часть фиктивных зарядов придется расположить внутри рассматриваемой области. А это означает, что потенциал поля, порождаемого фиктивными зарядами, не будет гармонической функцией внутри угла.*

Пример 2.3.7. *Постройте функцию Грина задачи Дирихле в шаре $K(O, a)$ с центром в начале координат и радиусом a, то есть найдите решение следующей краевой задачи:*

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \quad M, M_0 \in K(O, a), \\ G|_{r=a} = 0. \end{cases}$$

Решение. Функцию Грина:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} + v(M, M_0)$$

можно найти с помощью метода электростатических изображений.

Поместим в точку $M_0(r_0, \theta_0, \psi_0)$ внутри шара заряд величины $q = \dfrac{1}{4\pi}$. Рассмотрим точку $M_1(r_1, \theta_0, \psi_0)$, симметричную точке $M_0(r_0, \theta_0, \psi_0)$ относительно сферы $\Sigma(O, a)$ с цетром в начале координат и радиусом a, то есть такую точку, для которой выполнено соотношение:

$$r_0 \cdot r_1 = a^2. \tag{2.3.16}$$

Покажем, что поместив в точку M_1 заряд определенной величины, можно добиться, чтобы потенциал суммарного поля на сфере равнялся нулю.

Пусть $M(r, \theta, \psi)$ — любая точка внутри шара. Введем обозначения: $\rho_0 = MM_0$, $\rho_1 = MM_1$. Точку на сфере $\Sigma(O, a)$, лежащую на луче OM, обозначим P. Угол, который составляют векторы $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM}_0$ обозначим γ (рис 2.3.5).

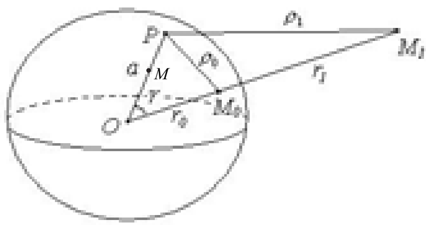

Рис. 2.3.5.

Покажем, что треугольники $\triangle\, POM_0$ и $\triangle\, M_1OP$ подобны. Действительно, угол $\angle POM_0$ у них общий, а из условия (2.3.16) следует

$$\frac{OM_0}{OP} = \frac{OP}{OM_1}.$$

Из подобия треугольников следует, что

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{r_0}{a}. \tag{2.3.17}$$

Так как точка M_1 располагается вне шара, то функция $v = \dfrac{A}{r_{MM_1}}$ является гармонической. Найдем такое A, при котором

$$v|_{\Sigma_a} = \frac{A}{r_{PM_1}} = -\frac{1}{4\pi r_{PM_0}}.$$

Из равенства (2.3.17) получаем $A = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{a}{r_0}$. Отсюда следует, что функция

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right) \tag{2.3.18}$$

обращается в нуль на поверхности сферы. В сферических координатах выражения для r_{MM_0} и r_{MM_1} имеют вид:

$$r_{MM_0} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos\gamma}\,, \quad r_{MM_1} = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos\gamma}\,,$$

где [1])

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Пример 2.3.8. *Постройте функцию Грина задачи Дирихле вне шара $K(O, a)$, то есть найдите решение следующей краевой задачи:*

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \quad M, M_0 \text{ вне } K(O,a), \\ G|_{r=a} = 0, \\ G \rightrightarrows 0 \text{ при } r \to +\infty. \end{cases}$$

Решение. Для того, чтобы найти функцию Грина внешней задачи, поместим точечный заряд $q = \dfrac{1}{4\pi}$ в точку $M_0(r_0, \theta_0, \psi_0)$ вне шара. Если поместить фиктивный заряд величины $q' = -\dfrac{qa}{r_0}$ в сопряженную точку $M_1\left(\dfrac{a^2}{r_0}, \theta_0, \psi_0\right)$ внутри шара, то суммарный потенциал поля на сфере $\Sigma(O, a)$ будет равен нулю, а следовательно, решением задачи является функция

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right). \tag{2.3.19}$$

Таким образом, построены функции Грина для простейших областей. Предложенные методы можно применить и для задач нахождения потенциала поля точечного заряда при наличии проводников различной формы.

Пример 2.3.9. *Найдите потенциал поля точечного заряда q в неограниченном пространстве в присутствии незаряженной прово-*

---

[1]) Рассмотрим $\triangle OMM_0$ (см. рис. 2.3.5). По теореме косинусов

$$MM_0^2 = OM^2 + OM_0^2 - 2OM \cdot OM_0 \cos\gamma.$$

В наших обозначениях $OM = r$, $OM_0 = r_0$, то есть $r_{MM_0}^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\gamma$. С другой стороны $r_{MM_0}^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$. В сферических координатах

$$r_{MM_0}^2 = (r\cos\varphi\sin\theta - r_0\cos\varphi_0\sin\theta_0)^2 + (r\sin\varphi\sin\theta - r_0\sin\varphi_0\sin\theta_0)^2 + \\ + (r\cos\theta - r_0\cos\theta_0)^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\left(\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)\right).$$

Сравнивая с выражением для $r_{MM_0}^2$, полученным из теоремы косинусов, находим

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0).$$

дящей сферы радиуса a.

Решение. Поместим начало координат в центр сферы. Пусть заряд q расположен в точке M_0 вне шара $K(O,a)$. Поскольку на бесконечности заряды отсутствуют, то считаем потенциал на бесконечности равным нулю. Необходимо решить задачу

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi q\delta(M,M_0), \quad r>a, \quad \theta\in(0,\pi), \varphi\in[0,2\pi], \\ u|_{r=a} = V, \\ u \rightrightarrows 0 \text{ при } r\to+\infty, \end{cases}$$

где V — постоянный потенциал на проводящей сфере, который пока не известен. Так как задача линейная, ее можно разбить на две:

$$\begin{cases} \Delta u_1 = -4\pi q\delta(M,M_0), \quad r>a, \quad \theta\in(0,\pi), \varphi\in[0,2\pi], \\ u_1|_{r=a} = 0, \\ u_1 \rightrightarrows 0 \text{ при } r\to+\infty, \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0, \quad r>a, \quad \theta\in(0,\pi), \varphi\in[0,2\pi], \\ u_2|_{r=a} = V, \\ u_2 \rightrightarrows 0 \text{ при } r\to+\infty. \end{cases} \tag{2.3.20}$$

Решение u исходной задачи равно сумме u_1 и u_2. Физически это означает, что потенциал суммарного поля складывается из потенциала точечного заряда в присутствии заземленной сферы и потенциала, создаваемого индуцированными на сфере зарядами.

Функция u_1 с точностью до множителя $4\pi q$ совпадает с функцией Грина оператора Лапласа внешней задачи Дирихле для сферы:

$$u_1 = q\left(\frac{1}{r_{_{MM_0}}} - \frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{_{MM_1}}}\right),$$

где $M_0 = M_0(r_0,\theta_0,\psi_0)$ и $M_1 = M_1(r_1,\theta_0,\psi_0)$, $r_1 = \dfrac{a^2}{r_0}$.

Решая задачу (2.3.20) методом разделения переменных, получаем:

$$u_2 = V\frac{a}{r}.$$

Для вычисления потенциала V воспользуемся тем, что полный заряд сферы равен нулю. Напомним, что поверхностная плотность заряда на поверхности проводника вычисляется по формуле

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S,$$

где $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности. Вычисляя полный заряд, получаем

$$0 = -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma(O,a)}\frac{\partial u}{\partial n}dS = -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_{\Sigma(O,a)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial u_2}{\partial r}\right)dS =$$

$$= Va - \frac{1}{4\pi} \oint\limits_{\Sigma(O,a)} \frac{\partial u_1}{\partial r} dS.$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся первой формулой Грина (A.1.1), в которой одна из функций равна u_1, а другая тождественно равна единице:

$$\oint\limits_{\Sigma(O,a)} \frac{q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r_{PM_0}} - \frac{a}{r_0 r_{PM_1}} \right) \Bigg|_{P \in \Sigma(O,a)} dS_P =$$

$$= \int\limits_{K(O,a)} \frac{q}{4\pi} \Delta \left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{a}{r_0 r_{MM_1}} \right) dV_M =$$

$$= -\frac{aq}{4\pi r_0} \int\limits_{K(O,a)} \Delta \frac{1}{r_{MM_1}} dV_M = \frac{aq}{r_0},$$

так как внутри шара $K(O,a)$ функция $\dfrac{1}{r_{MM_0}}$ является гармонической, а функция $\dfrac{1}{r_{MM_1}}$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta \frac{1}{r_{MM_1}} = -4\pi\delta(M, M_1).$$

Таким образом,

$$V = \frac{q}{r_0}.$$

Итак, потенциал точечного заряда q вне проводящей сферы радиуса a равен

$$u = \frac{aq}{rr_0} + q \left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{a}{r_0} \frac{1}{r_{MM_1}} \right).$$

Замечание 2.3.5 *В случае, если на сфере распределен заряд q_1, то в соответствии с принципом суперпозиции, потенциал суммарного поля содержит еще одно слагаемое $u_3 = \dfrac{q_1}{r}$.*

Пример 2.3.10. *Решите задачу Дирихле в шаре:*

$$\begin{cases} \Delta u = -F(r, \theta, \varphi), \quad r \in (0, a), \quad \theta \in (0, \pi), \varphi \in [0, 2\pi], \\ u|_{r=a} = f(\theta, \varphi), \\ |u||_{r=0} < \infty. \end{cases} \tag{2.3.21}$$

Решение. Воспользуемся формулой (2.1.7):

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = - \int\limits_{\Sigma(O,a)} f(P) \frac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P} dS_P +$$

$$+ \int\limits_{K(O,a)} F(M) G(M, M_0) dV_M = u_1 + u_2.$$

Подставим в нее выражение (2.3.18) для функции Грина в шаре. Вначале найдем функцию u_1. Для этого вычислим производную функции G по нормали $\mathbf{n}_P$ на поверхности шара:

$$-\frac{\partial G}{\partial n_P}\bigg|_{\Sigma(O,a)} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma}} - \frac{a}{r_0}\frac{1}{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\gamma}}\right\}\Bigg|_{r=a} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{r-r_0\cos\gamma}{\left(r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma\right)^{3/2}} - \frac{a}{r_0}\frac{r-r_1\cos\gamma}{\left(r^2+r_1^2-2rr_1\cos\gamma\right)^{3/2}}\right\}\Bigg|_{r=a} =$$

$$\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{a-r_0\cos\gamma}{\left(a^2+r_0^2-2ar_0\cos\gamma\right)^{3/2}} - \frac{a}{r_0}\frac{a-(a^2/r_0)\cos\gamma}{\left(a^2+(a^2/r_0)^2-2a(a^2/r_0)\cos\gamma\right)^{3/2}}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\frac{a-r_0\cos\gamma-r_0^2/a+r_0\cos\gamma}{\left(a^2+r_0^2-2ar_0\cos\gamma\right)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi a}\frac{a^2-r_0^2}{\left(a^2+r_0^2-2ar_0\cos\gamma\right)^{3/2}},$$

где $r_1 = \dfrac{a^2}{r_0}$. Для функции u_1 получаем выражение:

$$u_1(r_0,\theta_0,\varphi_0) = \frac{a}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}\frac{f(\theta,\varphi)(a^2-r_0^2)}{\left(a^2+r_0^2-2ar_0\cos\gamma\right)^{3/2}}\sin\theta d\theta. \qquad (2.3.22)$$

Функция u_2 имеет вид:

$$u_2(r_0,\theta_0,\varphi_0) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^{a}r^2dr\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi}F(r,\theta,\varphi)\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma}} - \right.$$

$$\left. - \frac{a}{\sqrt{r_0^2r^2+a^4-2rr_0a^2\cos\gamma}}\right)\sin\theta d\theta.$$

Замечание 2.3.6 *Если в задаче (2.3.21) $F\equiv 0$, то ее решением для любой непрерывной на сфере функции $f(\theta,\varphi)$ является функция u_1. Выражение (2.3.22) называется интегралом Пуассона для сферы.*

Пример 2.3.11. *Пусть внутри области, ограниченной полусферой радиуса a и плоскостью, проходящей через центр сферы, в точку $M_0\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$ помещен точечный заряд величины q. Найдите распределение потенциала поля этого заряда, если границы области заземлены.*

Решение. Задачу можно решить при помощи метода изображений. Воспользуемся известной функцией Грина $G(M, M_0)$ задачи Дирихле в шаре. Функция

$$\varphi_0 = 4\pi q G(M, M_0) = q\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{a}{a/2}\frac{1}{r_{MM_1}}\right) = q\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{2}{r_{MM_1}}\right),$$

где $M_1\left(2a, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, представляет собой потенциал поля точечного заряда, помещенного в точку $M_0\left(\frac{a}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ внутри заземленной сферы. Она удовлетворяет уравнению

$$\Delta_M \varphi_0(M, M_0) = -4\pi q \delta(M, M_0)$$

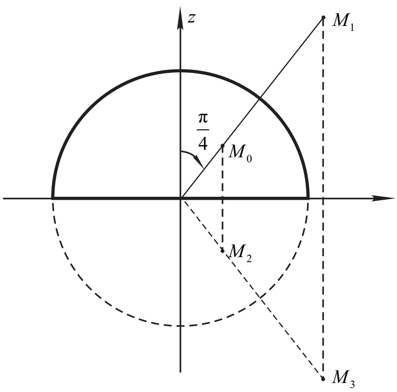

Рис. 2.3.6.

в рассматриваемой области и однородному условию Дирихле на части границы области, представляющей собой полусферу (рис. 2.3.6). Для того, чтобы добиться выполнения граничного условия на плоскости $z = 0$ построим точку $M_2\left(\frac{a}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, симметричную точке M_0 относительно плоскости $z = 0$, и поместим в нее фиктивный заряд $-q$. Чтобы «не испортилось» граничное условие на полусфере, рассмотрим потенциал, создаваемый фиктивным зарядом внутри шара с заземленной границей:

$$\varphi_1(M, M_2) = -q\left(\frac{1}{r_{MM_2}} - \frac{2}{r_{MM_3}}\right),$$

где точка $M_3\left(2a, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ сопряжена точке M_2 относительно сферы:

$$OM_2 \cdot OM_3 = a^2.$$

Так как мы рассматриваем задачу в полушарии выше плоскости $z = 0$, функция $\varphi_1(M, M_2)$ является гармонической как функция координат точки M в верхнем полупространстве. Кроме того, по построению

$$\varphi_0(P, M_0) = -\varphi_1(P, M_2), \quad \forall P(x, y, 0),$$

поэтому искомый потенциал имеет вид:

$$\varphi(M, M_0) = \varphi_0(M, M_0) + \varphi_1(M, M_2) =$$
$$= q\left(\frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{2}{r_{MM_1}}\right) - q\left(\frac{1}{r_{MM_2}} - \frac{2}{r_{MM_3}}\right).$$

Замечание 2.3.7 *Функция Грина задачи Дирихле в полушарии имеет вид:*

$$G_{1/2}(M, M_0) = G(M, M_0) - G(M, M_2).$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 2.3.12. *Найдите потенциал поля отрезка заряженной нити длины $2L$ с линейной плотностью e, помещенного над идеально проводящей заземленной плоскостью параллельно ей на расстоянии h от нее.*

Задача 2.3.13. *Найдите потенциал поля отрезка заряженной нити длины L с линейной плотностью e, помещенного над идеально проводящей заземленной плоскостью перпендикулярно ей. Ближайшая к плоскости точка отрезка удалена от нее на расстояние h.*

Задача 2.3.14. *Найдите потенциал поля точечного заряда, помещенного в точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ внутри «полуслоя» $0 \leqslant z \leqslant l$, $x \geqslant 0$, считая, что стенки идеально проводящие и имеют нулевой потенциал.*

Задача 2.3.15. *Найдите потенциал поля точечного заряда, помещенного внутри двугранного угла величины $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ в точку M_0, если его грани — идеально проводящие заземленные плоскости $\psi = \dfrac{\pi}{2}$ и $\psi = 0$. Угловая координата точки M_0 равна $\dfrac{\pi}{4}$, радиальная координата равна r_0.*

Задача 2.3.16. *Найдите потенциал поля в области $y > 0$, $z > 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, создаваемого зарядами, расположенными с линейной плотностью e вдоль отрезка длины L. Концы отрезка имеют координаты (x_0, y_0, z_0), $(x_0, y_0 + L, z_0)$, $x_0, y_0, z_0 > 0$. Границы $z = 0$ и $y = 0$ идеально проводящие и заземленные.*

Задача 2.3.17. *Найдите плотность поверхностных зарядов, индуцированных на внешней поверхности проводящей сферы точечным зарядом, помещенным в некоторую точку M_0 вне этой сферы.*

Задача 2.3.18. *Найдите распределение потенциала вне непроводящей сферы радиуса a, если на поверхности сферы поддерживается потенциал, равный $f(\theta, \psi)$.*

Задача 2.3.19. *Определите распределение потенциала на оси симметрии внутри сферы, если на поверхности сферы распределение потенциала задано следующим образом: при $0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (верхняя полусфера) $u = u_1$, при $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$ (нижняя полусфера) $u = u_2$, где u_1 и u_2 – константы. Внутри сферы нет объемных зарядов.*

Задача 2.3.20. *Найдите функцию Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле в четверти шара.*

Задача 2.3.21. *Найдите потенциал поля, создаваемого в неограниченном пространстве точечным зарядом, помещенным в точку*

$M_0(x_0, y_0, z_0)$, $z_0 > 0$. *Пространство заполнено неоднородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью:*

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_1, z > 0, \\ \varepsilon_2, z < 0. \end{cases}$$

3.2. Разложение функции Грина по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля.

Функцию Грина оператора Лапласа можно представить в виде разложения в ряд Фурье по системе собственных функций соответствующей задачи Штурма–Лиувилля. Для того, чтобы пояснить, в каком смысле следует понимать сходимость этого ряда, необходимо напомнить понятие пространства L_2.

Функциональное пространство L_2.

Пусть D — ограниченная область трехмерного пространства с замкнутой границей S. Рассмотрим множество непрерывных в D комплекснозначных функций $f(M)$. Как известно, они образуют линейное пространство $C(D)$ над полем комплексных чисел. Введем в пространстве $C(D)$ скалярное произведение

$$(f, g) = \int\limits_D \overline{g(M)} f(M) dV.$$

Скалярное произведение порождает норму

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}, \quad f \in C(D).$$

Дополняя линейное пространство $C(D)$ пределами всех фундаментальных по введенной норме последовательностей, получим *полное* нормированное пространство, которое называют пространством $L_2(D)$.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся понятия полноты и замкнутости систем функций в $L_2(D)$.

Определение 2.3.1 *Система функций $\{\varphi_n\}_1^\infty$ называется полной в $L_2(D)$, если не существует функции $f \in L_2(D)$, $\|f\| \neq 0$, такой что $(f, \varphi_n) = 0$ при всех n.*

Определение 2.3.2 *Система функций $\{\varphi_n\}_1^\infty$ называется замкнутой в $L_2(D)$, если для любой функции $f \in L_2(D)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$ и коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$, что*

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n \right\| \leqslant \varepsilon.$$

В пространстве $L_2(D)$ понятия полноты и замкнутости эквивалентны [19]. Для любой функции $f \in L_2(D)$ ряд Фурье

$$f = \sum_{n=1}^\infty (f, \varphi_n) \varphi_n,$$

по полной ортонормированной системе функций $\{\varphi_n\}_1^\infty \subset \subset L_2(D)$, $\|\varphi_n\| = 1$, сходится в норме $L_2(D)$.

Задача Штурма–Лиувилля.

Напомним, что задачей Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа называется следующая задача:

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0, & M \in D, \\ v|_S = 0, & P \in S. \end{cases} \tag{2.3.23}$$

Задача Штурма–Лиувилля (2.3.23) равносильна интегральному уравнению [14, 15]

$$v(M) = \lambda \int\limits_D G(Q, M) v(Q) dV_Q. \tag{2.3.24}$$

Перечислим основные свойства собственных функций и собственных значений задачи (2.3.23), которые понадобятся нам для дальнейшего изложения.

1. Существует бесконечное счетное множество собственных значений λ_n, каждому из которых отвечает конечное число линейно независимых собственных функций.
2. Собственные значения при увеличении номера n неограниченно возрастают. Все собственные значения задачи Дирихле положительны.
3. Собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны между собой:

$$\int\limits_D v_n(M) v_m(M) dV = 0, \quad \text{при } n \neq m.$$

4. Система $\{v_n\}_1^\infty$ собственных функций задачи (2.3.23) *полна* и *замкнута* в $L_2(D)$.

Разложение функции Грина по системе собственных функций.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), & M \in D, \\ u|_S = 0, & P \in S. \end{cases}$$

С помощью функции Грина ее решение может быть записано в виде

$$u(M) = \int\limits_D G(Q, M) F(Q) dV_Q.$$

Функция Грина удовлетворяет неравенству

$$\|G(Q, M)\|^2 = \int\limits_D \int\limits_D G^2(Q, M) dV_Q dV_M < \infty.$$

В самом деле, так как

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q,M),$$

где v — гармоническая функция, непрерывная в $\overline{D}$, то найдется такая константа $C > 0$, что $|v| \leqslant C$. Следовательно

$$\|G(Q,M)\|^2 \leqslant \int\limits_D \int\limits_D \frac{1}{16\pi^2 r_{QM}^2} dV_Q dV_M + \frac{C}{2\pi} \int\limits_D \int\limits_D \frac{1}{r_{QM}} dV_Q dV_M + C^2 V_0^2,$$

где V_0 — объем области D. В [7] показано, что интегралы

$$I_1(M) = \int\limits_D \frac{1}{r_{QM}^2} dV_Q, \quad I_2(M) = \int\limits_D \frac{1}{r_{QM}} dV_Q$$

являются непрерывными функциями. Следовательно, интегралы

$$\int\limits_D I_1(M) dV_M, \quad \int\limits_D I_2(M) dV_M$$

ограничены.

Рассмотрим пространство $L_2(D \times D)$, состоящее из всех функций $\mathcal{A}(Q,M)$, таких что

$$\|\mathcal{A}(Q,M)\|^2 = \int\limits_D \int\limits_D |\mathcal{A}(Q,M)|^2 dV_Q dV_M < \infty.$$

В качестве скалярного произведения в $L_2(D \times D)$ возьмем

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \int\limits_D \int\limits_D \overline{\mathcal{B}(Q,M)} \mathcal{A}(Q,M) dV_M dV_Q.$$

Рассмотрим операторы вида

$$(Af)(M) = \int\limits_D \mathcal{A}(Q,M) f(Q) dV_Q, \tag{2.3.25}$$

где $\mathcal{A}(Q,M) \in L_2(D \times D)$, $f \in L_2(D)$.

Справедлива следующая теорема [20]:

Теорема 2.3.1 *Для любого ядра $\mathcal{A}(Q,M) \in L_2(D \times D)$ оператор A, определяемый равенством (2.3.25), является линейным ограниченным оператором в $L_2(D)$, и для любой функции $f \in L_2(D)$ справедливо равенство*

$$(Af)(M) = (A_0 f)(M),$$

где A_0 — интегральный оператор с ядром

$$\mathcal{A}_0(Q,M) = \sum_{n,k=1}^{\infty} (A\varphi_k, \varphi_n)\varphi_n(M)\overline{\varphi}_k(Q), \tag{2.3.26}$$

$$(A\varphi_k, \varphi_n) = \int\limits_D \left\{ \int\limits_D \mathcal{A}(Q,M)\varphi_k(Q)dV_Q \right\} \overline{\varphi}_n(M)dV_M,$$

где $\{\varphi_n\}_1^\infty$ — любая полная ортонормированная система функций в $L_2(D)$.

Поскольку система $\{v_n\}_1^\infty$ собственных функций задачи Штурма–Лиувилля (2.3.23) является полной ортогональной системой в $L_2(D)$, то, нормировав ее на единицу, эту систему можно взять в качестве $\{\varphi_n\}_1^\infty$. Рассмотрим выражение

$$(Gf)(M) = \int\limits_D G(Q,M)f(Q)dV_Q$$

для произвольной функции $f \in L_2(D)$. В силу теоремы 2.3.1 справедливо равенство

$$(Gf)(M) = (G_0 f)(M),$$

где G_0 — интегральный оператор с ядром

$$G_0(Q,M) = \\ = \sum_{n,k=1}^{\infty} \left\{ \int\limits_D \left(\int\limits_D G(Q',M')v_k(Q')dV_{Q'} \right) v_n(M')dV_{M'} \right\} v_n(M)v_k(Q)$$

Используя равенство (2.3.24), получаем

$$\int\limits_D G(Q',M')v_k(Q')dV_{Q'} = \frac{1}{\lambda_k} v_k(M').$$

В силу ортонормированности системы функций $\{v_n\}_1^\infty$ справедливо равенство

$$\int\limits_D \frac{1}{\lambda_k} v_k(M')v_n(M')dV_{M'} = \frac{1}{\lambda_k}\delta_{nk}.$$

Следовательно,

$$G_0(Q,M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)v_n(Q)}{\lambda_n}.$$

Данный ряд сходится по норме $L_2(D \times D)$. Итак, получаем, что для любой функции $f \in L_2(D)$ имеет место равенство

$$\int\limits_D G(Q, M) f(Q) dV_Q = \int\limits_D \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M) v_n(Q)}{\lambda_n} f(Q) dV_Q.$$

Таким образом, можно считать, что

$$G(Q, M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M) v_n(Q)}{\lambda_n}, \tag{2.3.27}$$

но равенство (2.3.27) следует понимать как равенство элементов пространства $L_2(D \times D)$. В пространстве $L_2(D \times D)$ два элемента считаются равными, если норма их разности равна 0.

Пример 2.3.22. *Найдите потенциал поля точечного заряда величины q, помещенного в точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ внутри прямоугольного параллелепипеда с ребрами a, b, c.*

Решение. Так как потенциал поля точечного заряда является обобщенной функцией и с точностью до множителя $4\pi q$ совпадает с функцией Грина, то можно воспользоваться формулой (2.3.27). Для этого найдем собственные функции и собственные значения задачи Штурма–Лиувилля в прямоугольном параллелепипеде с условиями Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta v + \lambda v = 0, \quad x \in (0, a),\ y \in (0, b),\ z \in (0, c), \\ v|_{x=0} = v|_{x=a} = v|_{y=0} = v|_{y=b} = v|_{z=0} = v|_{z=c} = 0. \end{cases}$$

Как известно [1], собственные функции и собственные значения этой задачи имеют вид:

$$v_{nmk} = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \sin\left(\frac{\pi k}{c} z\right),$$

$$\lambda_{nmk} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2, \text{ где } n, m, k \in \mathbb{N}.$$

Используя формулу (2.3.27), получаем потенциал поля заряда, помещенного в прямоугольный параллелепипед:

$$\varphi(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \frac{8}{abc} \times$$
$$\times \sum_{k,m,n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n}{a} x_0\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y\right) \sin\left(\frac{\pi m}{b} y_0\right) \sin\left(\frac{\pi k}{c} z\right) \sin\left(\frac{\pi k}{c} z_0\right)}{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi k}{c}\right)^2}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 2.3.23. *Постройте функцию Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в прямом круговом цилиндре высоты h, радиуса a.*

Задача 2.3.24. *Постройте функцию Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в секторе прямого кругового цилиндра высоты h, радиуса a, с углом раствора α.*

3.3. Метод разделения переменных. Как было сказано выше, для того, чтобы найти функцию Грина

$$G(Q,M)=\frac{1}{4\pi r_{_{QM}}}+v(Q,M)$$

внутренней или внешней задачи Дирихле для уравнения Пуассона в трехмерном случае, достаточно решить задачу

$$\begin{cases} \Delta_{_Q} v=0, \quad Q\in D, \\ v|_S=-\dfrac{1}{4\pi r_{_{PM}}}, \quad P\in S \end{cases} \tag{2.3.28}$$

в ограниченной области D с границей S, либо задачу

$$\begin{cases} \Delta_{_Q} v=0, \quad Q\in D_e, \\ v|_S=-\dfrac{1}{4\pi r_{_{PM}}}, \quad P\in S, \\ v\rightrightarrows 0 \text{ на бесконечности} \end{cases} \tag{2.3.29}$$

в области D_e, внешней по отношению к области D. Одним из способов решения задач (2.3.28) и (2.3.29) является метод разделения переменных.

В данном пособии ограничимся важным для приложений случаем сферических координат. Пусть точка наблюдения Q имеет координаты (r,θ,ψ), а точка источника M имеет координаты (r_0,θ_0,ψ_0). Общее решение уравнения Лапласа в сферических координатах, полученное методом разделения переменных, может быть представлено в виде ряда [1]:

$$v(r,\theta,\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} r^n\left(C_{n,m}\cos m\psi+D_{n,m}\sin m\psi\right)P_n^{(m)}(\cos\theta)+$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{r^{n+1}}\left(E_{n,m}\cos m\psi+F_{n,m}\sin m\psi\right)P_n^{(m)}(\cos\theta), \tag{2.3.30}$$

где $P_n^{(m)}(\cos\theta)$ — присоединенные функции Лежандра. Для решения задачи необходимо найти неизвестные коэффициенты $C_{n,m}$, $D_{n,m}$, $E_{n,m}$, $F_{n,m}$, используя граничные условия. Представим функцию, стоящую в правой части граничного условия, в виде разложения по полиномам Лежандра. Для этого построим разложение фундаментального решения оператора Лапласа в ряд по полиномам Лежандра. Применяя формулу для производящей функции полиномов Лежандра P_n [1]

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(\alpha), \quad |t|<1,$$

получаем:

$$\frac{1}{4\pi r_{QM}} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma}} = \\ = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi r}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma), \text{ если } r>r_0, \\ \dfrac{1}{4\pi r_0}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n P_n(\cos\gamma), \text{ если } r<r_0, \end{cases} \tag{2.3.31}$$

где $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\psi-\psi_0)$. Если ориентировать систему координат таким образом, чтобы точка источника M находилась на оси Oz, то $\sin\theta_0 = 0$, и, следовательно, $\cos\gamma = \cos\theta$. Описанный метод особенно удобно применять для решения задач в шаре и его частях. Для нахождения неизвестных коэффициентов достаточно подставить выражение (2.3.30) в граничное условие задачи (2.3.28) или (2.3.29) (и в условие на бесконечности в случае внешней задачи) и сравнить коэффициенты разложения в ряд Фурье по сферическим функциям в правой и левой частях равенства.

Пример 2.3.25. *Найдите потенциал поля, создаваемого точечным зарядом величины q внутри шарового слоя, ограниченного двумя концентрическими проводящими заземленными сферами с радиусами a и b.*

Решение. Пусть заряд q помещен в точку M_0 внутри шарового слоя. Искомый потенциал имеет вид:

$$\varphi(M, M_0) = \frac{q}{r_{MM_0}} + v(M, M_0),$$

где $v(M, M_0)$ — гармоническая функция координат точки M. Введем сферическую систему координат. Поместим начало координат в центр концентрических сфер. Направим ось Oz вдоль прямой, соединяющей центр сфер и точку M_0. Функция $v(M, M_0)$ является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad r\in(a,b), \quad \theta\in(0,\pi), \\ v|_{r=a} = -\left.\dfrac{q}{r_{PM_0}}\right|_{r=a} = -\dfrac{q}{\sqrt{a^2+r_0^2-2ar_0\cos\theta}}, \\ v|_{r=b} = -\left.\dfrac{q}{r_{PM_0}}\right|_{r=b} = -\dfrac{q}{\sqrt{b^2+r_0^2-2br_0\cos\theta}}, \end{cases}$$

где $M_0 = M_0(r_0, 0, 0)$ и $M = M(r, \theta, \psi)$. В постановке задачи нет зависимости от переменной ψ, поэтому функция $v(M, M_0)$ зависит только от r и θ. Тогда общее решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаровом слое [2] можно представить следующим образом:

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{r^{2n+1} - a^{2n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta),$$

где коэффициенты A_n и B_n находятся из граничных условий. Преобразуем граничные условия к более удобному для дальнейшего решения виду:

$$-\frac{q}{\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\theta}} = -\frac{q}{r_0}\frac{1}{\sqrt{1 + (a/r_0)^2 - 2(a/r_0)\cos\theta}} = \\ = -\frac{q}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

так как $r_0 > a$, и

$$-\frac{q}{\sqrt{b^2 + r_0^2 - 2br_0\cos\theta}} = -\frac{q}{b}\frac{1}{\sqrt{1 + (r_0/b)^2 - 2(r_0/b)\cos\theta}} = \\ = -\frac{q}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{b}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

так как $r_0 < b$. Подставим общее решение в граничные условия и найдем неизвестные коэффициенты:

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{b^{2n+1} - a^{2n+1}}{a^{n+1}} P_n(\cos\theta) = -\frac{q}{r_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r_0}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{b^{2n+1} - a^{2n+1}}{b^{n+1}} P_n(\cos\theta) = -\frac{q}{b}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{b}\right)^n P_n(\cos\theta).$$

Сравнивая правые и левые части в этих равенствах, получаем

$$A_n = -\frac{q}{b}\left(\frac{r_0}{b}\right)^n \frac{b^{n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} = -q\frac{r_0^n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}},$$

$$B_n = -\frac{q}{r_0}\left(\frac{a}{r_0}\right)^n \frac{a^{n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}.$$

Следовательно:

$$v = -\frac{q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \frac{r^{2n+1} - a^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} P_n(\cos\theta) - \\ -\frac{q}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^{n+1} \frac{b^{2n+1} - r^{2n+1}}{b^{2n+1} - a^{2n+1}} P_n(\cos\theta).$$

Замечание 2.3.8 *Для того, чтобы получить функцию Грина, зависящую от произвольных точек $M(r,\theta,\psi)$ и $M_0(r_0,\theta_0,\psi_0)$ внутри шарового слоя, следует положить $q = \dfrac{1}{4\pi}$ и заменить $\cos\theta$ на косинус угла между векторами OM и OM_0:*

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\psi-\psi_0).$$

Итак, функция Грина задачи Дирихле внутри шарового слоя имеет вид:

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \frac{r^{2n+1}-a^{2n+1}}{b^{2n+1}-a^{2n+1}}P_n(\cos\gamma) - \\ -\frac{1}{4\pi a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^{n+1}\frac{b^{2n+1}-r^{2n+1}}{b^{2n+1}-a^{2n+1}}P_n(\cos\gamma). \tag{2.3.32}$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 2.3.26. *Найдите функцию Грина задачи Дирихле для оператора Лапласа в области $a^2 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant b^2$, $z \geqslant 0$, $a < b$.*
Совет: Воспользуйтесь формулой (2.3.32) и методом электростатических изображений.

Задача 2.3.27. *Получите выражение (2.3.18) для функции Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в шаре радиуса a методом разделения переменных.*

Задача 2.3.28. *Получите выражение (2.3.19) для функции Грина оператора Лапласа задачи Дирихле вне шаре радиуса a методом разделения переменных.*

3.4. Построение функции Грина с помощью преобразования Фурье.

Метод Фурье построения решений дифференциальных уравнений в частных производных удобен в том случае, когда задача рассматривается в бесконечной цилиндрической области $\Omega = \{(x,y) \in D,\ z \in (-\infty,+\infty)\}$. Решение задачи можно искать в виде $u = u(M,z)$, где M — точка в поперечном сечении D цилиндра. Предположим, что решение $u(M,z)$ уравнения допускает преобразование Фурье по переменной z, то есть существует его Фурье-образ

$$\widehat{u}(M,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(M,z)e^{-i\mu z}dz.$$

Тогда, применяя преобразование Фурье к уравнению и граничным условиям на боковой поверхности цилиндра, для Фурье-образа $\widehat{u}(M,\mu)$ получим краевую задачу в поперечном сечении цилиндра.

Пример 2.3.29. *Найдите потенциал поля точечного заряда величины q, помещенного в точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ внутри области, заполненной воздухом, ограниченной заземленной цилиндрической поверхностью сечения D.*

Решение. Пусть $\Omega = \{(x, y) \in D,\ z \in (-\infty, +\infty)\}$, $\partial\Omega$ — боковая поверхность рассматриваемого цилиндра. В отсутствии проводящей заземленной поверхности $\partial\Omega$ потенциал поля точечного заряда q, помещенного в точку M_0, имеет вид:

$$u_0 = \frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}},$$

то есть

$$u_0 \to 0 \text{ и } \frac{\partial u_0}{\partial z} \to 0 \text{ при } z \to \pm\infty. \tag{2.3.33}$$

При наличии проводящей поверхности $\partial\Omega$ нужно учесть также поле наведенных зарядов. При удалении от точки M_0 это поле будет убывать, поэтому естественно потребовать для него выполнения условий, аналогичных (2.3.33). Следовательно, математическую постановку задачи можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi q\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0), & \begin{array}{l}(x,y) \in D,\\ -\infty < z < +\infty,\end{array} \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & \\ u \to 0, \quad u_z \to 0 \text{ при } z \to \pm\infty. & \end{cases} \tag{2.3.34}$$

Будем искать решение $u(x, y, z)$, которое допускает вместе со своими производными преобразование Фурье по переменной z. Проведем преобразование Фурье по переменной z:

$$\widehat{u}(x, y, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, z)e^{-i\mu z} dz.$$

Применим преобразование Фурье к левой части уравнения:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Delta u\, e^{-i\mu z} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\Delta_2 u + u_{zz})\, e^{-i\mu z} dz =$$

$$= \Delta_2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\mu z} dz}_{=\widehat{u}(x,y,\mu)} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{zz} e^{-i\mu z} dz, \tag{2.3.35}$$

где Δ_2 — оператор Лапласа в поперечном сечении. Вычислим последний интеграл в (2.3.35) два раза по частям, используя условия на бесконечности для функции $u(x, y, z)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_{zz} e^{-i\mu z} dz = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, u_z e^{-i\mu z} \Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty}}_{=0} + \frac{i\mu}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_z e^{-i\mu z} dz =$$

$$= \underbrace{\frac{i\mu}{\sqrt{2\pi}} \, u e^{-i\mu z} \Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty}}_{=0} - \mu^2 \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\mu z} dz}_{=\widehat{u}(x,y,\mu)} .$$

Таким образом, применяя преобразование Фурье к уравнению и граничному условию, для Фурье-образа получаем задачу

$$\begin{cases} \Delta_2 \widehat{u} - \mu^2 \widehat{u} = -2\sqrt{2\pi}\, q e^{-i\mu z_0} \delta(x - x_0)\delta(y - y_0), \;\; (x, y) \in D, \\ \widehat{u}\big|_L = 0, \end{cases} \tag{2.3.36}$$

где L — граница области D. Решение задачи (2.3.36) удобно искать в виде разложения в ряд Фурье по системе нормированных на единицу собственных функций $v_n(x, y)$ задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta v_n + \lambda_n^2 v_n = 0, \;\; (x, y) \in D, \\ v_n\big|_L = 0 \end{cases}$$

в поперечном сечении D:

$$\widehat{u}(x, y, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\mu) v_n(x, y), \qquad C_n(\mu) = \int\limits_D \widehat{u} v_n dS. \tag{2.3.37}$$

Умножая уравнение (2.3.36) на $v_n(x, y)$, интегрируя по области D и применяя вторую формулу Грина, получаем:

$$\underbrace{\int\limits_D \Delta_2 \widehat{u}\, v_n ds}_{} \qquad - \mu^2 \underbrace{\int\limits_D \widehat{u} v_n ds}_{=C_n(\mu)} = -2\sqrt{2\pi}\, q e^{-i\mu z_0} v_n(x_0, y_0),$$

$$= \int\limits_D \widehat{u} \Delta_2 v_n ds =$$

$$= -\lambda_n^2 \int\limits_D \widehat{u} v_n ds = -\lambda_n^2 C_n(\mu)$$

то есть коэффициенты $C_n(\mu)$ удовлетворяют алгебраическому уравнению

$$-\lambda_n^2 C_n(\mu) - \mu^2 C_n(\mu) = -2\sqrt{2\pi}\, q e^{-i\mu z_0} v_n(x_0, y_0).$$

Следовательно
$$C_n(\mu) = \frac{2\sqrt{2\pi}\, q e^{-i\mu z_0} v_n(x_0, y_0)}{\lambda_n^2 + \mu^2}.$$
Таким образом, решение имеет вид
$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(x,y,\mu) e^{i\mu z} d\mu = \\ &= 2q \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-i\mu z_0} v_n(x,y) v_n(x_0,y_0)}{\lambda_n^2 + \mu^2} e^{i\mu z} d\mu = \\ &= 2q \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x_0,y_0) v_n(x,y) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\mu(z-z_0)}}{\lambda_n^2 + \mu^2} d\mu. \end{aligned}$$

Интеграл в последнем выражении можно вычислить с помощью вычетов, применяя лемму Жордана и замыкая контур в верхней полуплоскости при $z - z_0 > 0$ и в нижней полуплоскости при $z - z_0 < 0$. В результате получим
$$u(x,y,z) = 2\pi q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(x_0,y_0) v_n(x,y)}{\lambda_n} e^{-\lambda_n |z - z_0|},$$
где $v_n(x,y)$ — собственные функции задачи Штурма–Лиувилля в поперечном сечении D.

Пример 2.3.30. *Найдите потенциал поля точечного заряда величины q, помещенного внутри двугранного угла величины α, $\alpha \in (0; 2\pi)$. Грани угла представляют собой проводящие заземленные плоскости.*

Решение. Для частного случая $\alpha = \dfrac{\pi}{n}$ данная задача решена ранее методом электростатических отображений, однако, согласно замечанию 2.3.4, в общем случае этот метод неприменим. Построим решение с помощью преобразования Фурье. Математическая постановка задачи имеет вид:
$$\begin{cases} \Delta_3 u = -\dfrac{4\pi q}{r_0} \delta(r - r_0) \delta(\psi - \psi_0) \delta(z - z_0), & \begin{array}{l} 0 < r, r_0 < +\infty, \\ 0 < \psi, \psi_0 < \alpha, \\ -\infty < z, z_0 < +\infty, \end{array} \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=\alpha} = 0, \end{cases} \tag{2.3.38}$$
где $\Delta_3 u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Проведем преобразование Фурье по переменной z :
$$\widehat{u} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(r,\psi,z) e^{-i\mu z} dz.$$

В пространстве Фурье-образов уравнение (2.3.38) примет вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\widehat{u}}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial\psi^2}-\mu^2\widehat{u}=-\frac{2\sqrt{2\pi}}{r_0}\delta(r-r_0)\delta(\psi-\psi_0)e^{-i\mu z_0}. \quad (2.3.39)$$

Будем искать решение уравнения (2.3.39) с граничными условиями из (2.3.38) в виде разложения в ряд Фурье по системе функций $\{\Phi_n\} = \left\{\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots$:

$$\widehat{u}(r,\psi,\mu)=\sum_{n=1}^{\infty}R_n(r)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi,$$

где

$$R_n(r)=\frac{2}{\alpha}\int\limits_0^{\alpha}\widehat{u}(r,\psi,\mu)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi. \quad (2.3.40)$$

Умножим уравнение (2.3.39) на $\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi$ и проинтегрируем по переменной ψ от 0 до α:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_0^{\alpha}\widehat{u}(r,\psi,\mu)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi\right)-\mu^2\int\limits_0^{\alpha}\widehat{u}(r,\psi,\mu)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi+$$
$$+\frac{1}{r^2}\int\limits_0^{\alpha}\frac{\partial^2\widehat{u}(r,\psi,\mu)}{\partial\psi^2}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi=-\frac{2\sqrt{2\pi}}{r_0}e^{-i\mu z_0}\delta(r-r_0)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0.$$

Отсюда вытекает уравнение для радиальной части:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_n}{dr}\right)-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2R_n(r)-\mu^2R_n(r)&=\\=-\frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha r_0}e^{-i\mu z_0}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0\,\delta(r-r_0).&\end{aligned} \quad (2.3.41)$$

Умножая уравнение (2.3.41) на r^2 и учитывая, что в смысле обобщенных функций $r^2\delta(r-r_0)=r_0^2\delta(r-r_0)$, преобразуем уравнение к виду

$$\begin{aligned}r^2R_n''(r)+rR_n'(r)-\left[\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2+\mu^2r^2\right]R_n(r)&=\\=-\frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha}r_0e^{-i\mu z_0}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0\,\delta(r-r_0).&\end{aligned} \quad (2.3.42)$$

Таким образом, задача свелась к построению функции Грина уравнения Бесселя чисто мнимого аргумента. В качестве дополнительных условий потребуем, чтобы

$$|R_n(0)|<\infty, \quad |R_n(r)|<\infty \text{ при } r\to\infty. \quad (2.3.43)$$

Согласно изложенному в [17] методу построения функции Грина для обыкновенного дифференциального уравнения, будем искать решение уравнения (2.3.42) с дополнительными условиями (2.3.43) в виде:

$$R_n(r) = \begin{cases} C_1 I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r), & r < r_0, \\ C_2 K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r), & r > r_0. \end{cases} \tag{2.3.44}$$

Функции $I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r)$ и $K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r)$ представляют собой решения однородного уравнения (2.3.42), ограниченные при $r = 0$ и при $r \to \infty$ соответственно. Следуя [17], потребуем выполнения следующих условий сопряжения при $r = r_0$:

$$\begin{cases} R_n(r_0 + 0) - R_n(r_0 - 0) = 0, \\ R_n'(r_0 + 0) - R_n'(r_0 - 0) = -\dfrac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha r_0} \sin \dfrac{\pi n}{\alpha} \psi_0 \, e^{-i\mu z_0}. \end{cases} \tag{2.3.45}$$

Подставляя (2.3.44) в (2.3.45), получим систему для определения коэффициентов C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_2 K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) - C_1 I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) = 0, \\ \mu C_2 K'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) - \mu C_1 I'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) = -\dfrac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha r_0} \sin \dfrac{\pi n}{\alpha} \psi_0 \, e^{-i\mu z_0}. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$\begin{cases} C_2 = C_1 \dfrac{I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)}{K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0)}, \\ C_1 \mu \left[I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) K'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) - I'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) \right] = \\ \qquad = -\dfrac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha r_0} \sin \dfrac{\pi n}{\alpha} \psi_0 \, e^{-i\mu z_0} K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0). \end{cases} \tag{2.3.46}$$

Учитывая, что определитель Вронского функций Инфельда и Макдональда [1] равен

$$W \left[I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0), K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) \right] = \\ = \left[I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) K'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) - I'_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) \right] = -\frac{1}{\mu r_0},$$

из (2.3.46) получаем

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sin \dfrac{\pi n}{\alpha} \psi_0 \, e^{-i\mu z_0} K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0), \\ C_2 = \dfrac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sin \dfrac{\pi n}{\alpha} \psi_0 \, e^{-i\mu z_0} I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0). \end{cases}$$

Следовательно,

$$R_n(r) = \frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha} \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0\, e^{-i\mu z_0} \begin{cases} I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r) K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0), & r < r_0, \\ I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r), & r > r_0. \end{cases} \tag{2.3.47}$$

Подставляя (2.3.47) в (2.3.40), находим

$$\widehat{u}(r, \psi, \mu) = \\ = \frac{4\sqrt{2\pi}}{\alpha} e^{-i\mu z_0} \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r) K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0 \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi, & r < r_0, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} I_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r_0) K_{\frac{\pi n}{\alpha}}(\mu r) \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0 \sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi, & r > r_0. \end{cases} \tag{2.3.48}$$

Осуществив обратное преобразование Фурье, получим решение исходной задачи:

$$u(r, \psi, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(r, \psi, \mu) e^{i\mu z} d\mu. \tag{2.3.49}$$

Сходимость интеграла (2.3.49) следует из свойств функций Инфельда и Макдональда [1].

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 2.3.31. *В точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, взятой вне бесконечного проводящего заземленного цилиндра кругового поперечного сечения помещен заряд q. Поставьте задачу для потенциала поля, порождаемого этим зарядом, и сведите ее к краевой задаче для уравнения Гельмгольца на плоскости, перпендикулярной оси цилиндра.*

Задача 2.3.32. *В точке M_0 внутри бесконечной проводящей заземленной цилиндрической поверхности с квадратным поперечным сечением расположен заряд q. Найдите потенциал поля, порождаемого этим зарядом.*

Задача 2.3.33. *Внутри бесконечной проводящей заземленной цилиндрической поверхности, поперечное сечение которой представляет собой прямоугольник со сторонами a и b, находится заряженный отрезок прямой длины l. Отрезок расположен на оси цилиндра и имеет плотность заряда, равную e. Найдите потенциал поля, создаваемого этим отрезком.*

Задача 2.3.34. *Внутри бесконечной проводящей заземленной цилиндрической поверхности, поперечное сечение которой представляет собой прямоугольник со сторонами a и b, $a > b$, находится заряженный отрезок прямой длины $a/2$. Пусть ось Oz совпадает с осью цилиндра, а ось Ox параллельна большей стороне поперечного сечения. Координаты концов заряженного отрезка равны* $(-a/4, 0, 0)$ *и* $(-a/4, 0, 0)$. *Найдите потенциал поля, создаваемого этим отрезком.*

§ 4. Внутренние двумерные задачи

Пусть D — область на плоскости, ограниченная достаточно гладкой замкнутой кривой L. Здесь и далее будем считать, что L является кривой Ляпунова. Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле:

$$\Delta u = -F(M), \quad M \in D, \tag{2.4.1}$$

$$u|_L = f(P), \quad P \in L. \tag{2.4.2}$$

Определение 2.4.1 *Будем называть классическим решением задачи (2.4.1-2.4.2) функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D, непрерывную в замкнутой области $\overline{D}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (2.4.1) в области D и граничному условию (2.4.2).*

При $F \in L_2(D) \cap C^{(1)}(D)$ и $f \in C(L)$ задача (2.4.1-2.4.2) имеет единственное классическое решение [1]. Для его построения можно повторить те же рассуждения, что и в трехмерном случае, взяв во второй формуле Грина фундаментальное решение оператора Лапласа на плоскости:

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{QM}} + v, \tag{2.4.3}$$

где v — гармоническая функция. Тогда аналогом формулы (2.1.5) будет

$$\begin{aligned} u(M) = \oint\limits_L \left(G(P,M) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dl_P - \\ - \int\limits_D G(Q,M) \Delta u(Q) dS_Q = \\ = \oint\limits_L \left(G(P,M) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - f(P) \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dl_P + \int\limits_D G(Q,M) F(Q) dS_Q. \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Как и в трехмерном случае, в выражении (2.4.4) можно убрать слагаемое, содержащее неизвестное значение $\dfrac{\partial u(P)}{\partial n_P}$ на границе L, если воспользоваться произвольностью гармонического слагаемого v в (2.4.3) и потребовать выполнения условия

$$G(P,M) = 0, \ \ \forall P \in L.$$

Тогда

$$u(M) = -\oint\limits_L f(P) \frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} dl_P + \int\limits_D G(Q,M) F(Q) dS_Q. \tag{2.4.5}$$

Определение 2.4.2 *Функцией Грина внутренней задачи Дирихле для оператора Лапласа в двумерном случае будем называть функцию*

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} + v(Q,M), \quad Q \in \overline{D}, \quad M \in D,$$

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q,M)$ *— гармоническая функция координат точки* $Q \in D$*, непрерывная на* $\overline{D}$ *для каждой точки* $M \in D$*;*
2) $G(P,M)|_{P\in L} = 0$ *для каждой точки* $M \in D$*.*

Для того, чтобы построить решение двумерной задачи Дирихле (2.4.1)-(2.4.2), достаточно найти такую функцию $v(Q,M)$, что

$$\begin{cases} \Delta_Q v = 0, \quad Q \in D, \\ v|_L = -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{r_{PM}}, \quad P \in L \end{cases} \tag{2.4.6}$$

и использовать квадратурную формулу (2.4.5).

§ 5. Внешние двумерные задачи

Пусть D_e — дополнение некоторой ограниченной замкнутой области $\overline{D}$ с гладкой замкнутой границей L до всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Также, как и в трехмерном случае, для того, чтобы краевая задача для уравнения Пуассона или Лапласа в области D_e имела единственное решение, следует потребовать регулярности решения на бесконечности.

Определение 2.5.1 *Функция* $u(M)$ *называется регулярной на бесконечности в двумерном случае, если она ограничена при* $r \to \infty$*, где* $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

Внешняя задача Дирихле для уравнения Пуассона в двумерном случае ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), \quad M \in D_e, \\ u|_L = f(P), \quad P \in L, \\ |u| < \infty. \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Если функция F является финитной и непрерывно дифференцируемой, а функция f непрерывной, то задача (2.5.1) имеет единственное классическое решение [1].

Заметим, что поскольку в двумерном случае от функций требуется только ограниченность на бесконечности, формулы Грина во внешних областях остаются справедливыми лишь для регулярных функций, *гармонических* вне некоторой ограниченной области (см. прил. A., § 4). Поскольку функция $F(M)$ является финитной, то для решения задачи (2.5.1) применимы формулы Грина. Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат O находилось строго внутри области D.

Применим третью формулу Грина для решения рассматриваемой задачи (2.5.1):

$$\Omega(M)u(M) - 2\pi u_\infty = \oint\limits_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM}} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM}} \right\} dl_P - \\ - \int\limits_{D_e} \Delta u(Q) \ln \frac{1}{r_{QM}} dS_Q, \tag{2.5.2}$$

где

$$\Omega(M) = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } M \in D_e, \\ \pi, & \text{если } M \in L, \\ 0, & \text{если } M \notin \overline{D_e}. \end{cases}$$

Запишем формулу (2.5.2), взяв в качестве точки M начало координат:

$$-2\pi u_\infty = \oint\limits_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{OP}} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{OP}} \right\} dl_P - \\ - \int\limits_{D_e} \Delta u(Q) \ln \frac{1}{r_{OQ}} dS_Q, \tag{2.5.3}$$

поскольку точка O не принадлежит области $\overline{D_e}$.

Пусть M — произвольная точка области D_e. Используя соотношение (2.5.2), где слагаемое $2\pi u_\infty$ определяется равенством (2.5.3), получим

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \left(\ln \frac{1}{r_{PM}} - \ln \frac{1}{r_{OP}} \right) - \\ - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \left(\ln \frac{1}{r_{PM}} - \ln \frac{1}{r_{OP}} \right) \right\} dl_P - \\ - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{D_e} \Delta u(Q) \left(\ln \frac{1}{r_{QM}} - \ln \frac{1}{r_{OQ}} \right) dS_Q. \tag{2.5.4}$$

В равенстве (2.5.4) значение $\dfrac{\partial u(P)}{\partial n_P}$ на границе области неизвестно. Применим стандартный прием для того, чтобы убрать слагаемое, содержащее это неизвестное значение. Пусть v_2 — произвольная гармоническая в области D_e и регулярная на бесконечности функция. Для решения $u(M)$ задачи (2.5.1) и функции v_2 справедлива вторая формула Грина (A.4.5) в области D_e:

$$0 = \oint\limits_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} v_2(P) - u(P) \frac{\partial v_2(P)}{\partial n_P} \right\} dl_P - \int\limits_{D_e} \Delta u(Q) v_2(Q) dS_Q. \tag{2.5.5}$$

Складывая равенства (2.5.4) и (2.5.5), получаем

$$u(M) = \oint\limits_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} G(P,M) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} G(P,M) \right\} dl_P - \\ - \int\limits_{D_e} \Delta u(Q) G(Q,M) dS_Q, \tag{2.5.6}$$

где введено обозначение

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{QM}} - \ln \frac{1}{r_{OQ}} \right) + v_2. \tag{2.5.7}$$

Замечание 2.5.1 *При построении функции $G(Q,M)$ вместо точки O можно выбрать любую точку строго внутри области D.*

Соотношение (2.5.6) является аналогом формулы (2.2.4) для внешней задачи в трехмерном случае. Воспользуемся произвольностью гармонической функции v_2 и выберем такую функцию, которая удовлетворяет граничному условию на кривой L:

$$v_2|_L = -\frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{PM}} - \ln \frac{1}{r_{OP}} \right), \quad P \in L. \tag{2.5.8}$$

Отметим, что после того, как мы потребовали от функции v_2 выполнения граничного условия (2.5.8), она стала также зависеть от координат точки M как от параметров. При этом функция $G(Q,M)$ обратится в ноль на границе L области D_e, и для решения задачи (2.5.1) из (2.5.6) мы получим формулу:

$$u(M) = -\oint\limits_L f(P) \frac{\partial}{\partial n_P} G(P,M) dl_P + \int\limits_{D_e} F(Q) G(Q,M) dS_Q. \tag{2.5.9}$$

Заметим, что функция $v(Q,M) = -\dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{r_{OQ}} + v_2(Q,M)$ является гармонической в области D_e по координатам точки Q, но имеет логарифмическую особенность на бесконечности (координаты точки M играют роль параметров).

Покажем, что функция $G(Q,M)$, определяемая формулой (2.5.7), регулярна на бесконечности. Введем полярные координаты. Пусть точка наблюдения Q имеет координаты (r, ψ), а точка источника M — координаты (r_0, ψ_0). Тогда

$$r_{QM} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\psi - \psi_0)}, \quad r_{OQ} = r.$$

Так как функция v_2 является регулярной на бесконечности, то существует $A > 0$, такое что $|v_2(Q, M)| < A$ на бесконечности. Тогда

$$\lim_{r\to+\infty} |G(Q,M)| = \lim_{r\to+\infty} \left| \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{QM}} - \ln\frac{1}{r_{OQ}}\right) + v_2\right| \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\left|\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\psi-\psi_0)}} - \ln\frac{1}{r}\right| + A =$$
$$= \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{4\pi}\left|\ln\left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} - 2\frac{r_0}{r}\cos(\psi-\psi_0)\right)\right| + A = A.$$

Определение 2.5.2 *Функцией Грина внешней задачи Дирихле для оператора Лапласа в двумерном случае будем называть функцию*

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} + v(Q,M), \quad Q \in \overline{D_e}, \quad M \in D_e, \tag{2.5.10}$$

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q, M)$ — гармоническая функция координат точки $Q \in D_e$, непрерывная в $\overline{D_e}$ для каждой точки $M \in D_e$, имеющая логарифмическую особенность на бесконечности;
2) $G(P, M)|_{P\in L} = 0$ для каждой точки $M \in D_e$;
3) $G(Q, M)$ регулярна на бесконечности.

Функция Грина $G(Q, M)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q \in D_e, \quad M \in D_e, \\ G(P,M)|_L = 0, \quad P \in L, \\ |G(Q,M)| < \infty. \end{cases} \tag{2.5.11}$$

Поскольку функция Грина (2.5.10) регулярна на бесконечности, то можно показать, что она симметрична относительно перестановки точки наблюдения Q и точки источника M. Читателю предлагается доказать это самостоятельно аналогично тому, как это сделано для случая ограниченной области в книге [1].

§ 6. Методы решения двумерных задач

6.1. Метод электростатических изображений.

Как и в трехмерном случае, при решении двумерных задач в ряде областей удобно использовать метод электростатических изображений.

Пример 2.6.1. *Постройте функцию Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле внутри круга радиуса a.*

Решение. Функция Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле внутри круга является решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), & M, M_0 \in U(0, a), \\ G(P, M_0)|_{r=a} = 0, \end{cases}$$

где $U(0, a)$ — круг с центром в начале координат и радиусом a, $M_0 = M_0(r_0, \psi_0)$ — точка истока, $M = M(r, \psi)$ — точка наблюдения. Используем построение, аналогичное тому, что применялось при решении задачи в шаре. Гармоническую функцию v в выражении

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{_{MM_0}}} + v$$

будем искать в виде

$$v = A + B \ln \frac{1}{r_{_{MM_1}}} = B \ln \frac{\widetilde{A}}{r_{_{MM_1}}}, \qquad \widetilde{A} = e^{\frac{A}{B}}$$

где A и B — некоторые постоянные, $M_1(r_1, \psi_0)$ — точка, сопряженная точке M_0 относительно окружности радиуса a:

$$r_0 \cdot r_1 = a^2.$$

Проводя те же геометрические построения, что и для задачи в шаре, получаем

$$\frac{r_{_{PM_0}}}{r_{_{PM_1}}} = \frac{r_0}{a}.$$

Если взять $B = -\dfrac{1}{2\pi}$ и $\widetilde{A} = \dfrac{a}{r_0}$, то гармоническая функция

$$v = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{a}{r_0} \frac{1}{r_{_{MM_1}}} \right)$$

удовлетворяет граничному условию

$$v|_{r=a} = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{_{PM_0}}}.$$

Такая функция v единственна в силу теоремы единственности решения внутренней задачи Дирихле на плоскости [1]. Следовательно, функция Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в круге радиуса a имеет вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{r_{_{MM_0}}} - \ln \left(\frac{a}{r_0} \frac{1}{r_{_{MM_1}}} \right) \right), \tag{2.6.1}$$

где $r_{_{MM_0}} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\psi - \psi_0)}$,
$r_{_{MM_1}} = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\psi - \psi_0)}$, $r_1 = \dfrac{a^2}{r_0}$.

Пример 2.6.2. *Для любой непрерывной функции $f(\psi)$ постройте решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < a, \quad \psi \in [0, 2\pi] \\ u|_{r=a} = f(\psi), \end{cases}$$

в интегральной форме.

Решение. Найдем решение задачи с помощью формулы (2.4.5), в которой функция Грина $G(M, M_0)$ определяется выражением (2.6.1). Вычислим производную

$$\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_{r=a} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\psi - \psi_0)}} - \right.$$
$$\left.\left. - \ln\left(\frac{a}{r_0}\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\psi - \psi_0)}}\right)\right)\right|_{r=a} =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\psi - \psi_0)}} - \right.$$
$$\left.\left. - \ln\frac{1}{\sqrt{\dfrac{r^2 r_0^2}{a^2} + a^2 - 2rr_0\cos(\psi - \psi_0)}}\right)\right|_{r=a} =$$
$$= -\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{a^2 - r_0^2}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos(\psi - \psi_0)}.$$

Подставляя найденное выражение в формулу (2.4.5), получим решение в любой точке $M_0(r_0, \psi_0)$

$$u(r_0, \psi_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{a^2 - r_0^2}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos(\psi - \psi_0)}f(\psi)d\psi. \tag{2.6.2}$$

Формула (2.6.2) носит название *интеграла Пуассона.*

Пример 2.6.3. *Найдите функцию Грина задачи Дирихле вне круга радиуса a.*

Решение. Функция Грина является решением следующей задачи

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \quad r > a, \; r_0 > a, \\ G|_{r=a} = 0, \\ |G| < \infty \text{ при } r \to \infty. \end{cases} \tag{2.6.3}$$

Здесь Δ_M — оператор Лапласа, где производные берутся по координатам точки M, а r и r_0 — полярные радиусы точек M и M_0 соответственно.

Будем искать функцию $G(M, M_0)$ в виде

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + v(M, M_0),$$

где

$$\begin{cases} \Delta_M v(M, M_0) = 0, \quad r > a, \ r_0 > a, \\ G|_{r=a} = -\dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{r_{PM_0}}. \end{cases} \tag{2.6.4}$$

Пусть $M_1\left(\dfrac{a^2}{r_0}, \psi_0\right)$ — точка, сопряженная $M_0\,(r_0, \psi_0)$ относительно окружности радиуса a. Функция

$$v = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{a}{r_0} \frac{1}{r_{MM_1}}$$

является гармонической вне круга радиуса a и удовлетворяет (2.6.4). Таким образом, решение задачи (2.6.3):

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a}{r_0} \frac{1}{r_{MM_1}}. \tag{2.6.5}$$

Пример 2.6.4. *Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити с линейной плотностью заряда q, помещенной внутри двугранного угла величины $\dfrac{\pi}{n}$ параллельно ребру этого угла. Грани угла представляют собой проводящие заземленные плоскости.*

Решение. Введем цилиндрическую систему координат. Направим ось Oz вдоль ребра двугранного угла, а полярную ось поместим на одной из его граней. Поскольку в условии задачи нет явной зависимости от координаты z, то она может быть сведена к двумерной задаче в поперечном сечении угла. Пусть $M(r, \psi)$ — произвольная точка поперечного сечения угла, $M_0(r_0, \psi_0)$ — точка сечения, определяющая положение нити. Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi q \delta(M, M_0), \ 0 < \psi < \dfrac{\pi}{n}, \ 0 < \psi_0 < \dfrac{\pi}{n}, \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=\frac{\pi}{n}} = 0. \end{cases}$$

Согласно замечанию 1.5.1, данную задачу можно рассматривать как задачу о потенциале точечного заряда в двумерном пространстве. По аналогии с решением примера 2.3.6. применим метод электростатических отображений, используя для потенциала поля точечного заряда выражение

$$\varphi(M) = 2q \ln \frac{1}{r_{MM_0}}.$$

Для функции $u(M, M_0)$ получаем

$$u(M, M_0) = 2q \sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln \frac{1}{R^+_{MM_k}} - \ln \frac{1}{R^-_{MM_k}} \right), \qquad (2.6.6)$$

где

$$R^+_{MM_k} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos\left(\frac{2\pi k}{n} + \psi_0 - \psi\right)},$$
$$R^-_{MM_k} = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos\left(\frac{2\pi k}{n} - \psi_0 - \psi\right)}.$$

Положив $q = \dfrac{1}{4\pi}$ в выражении (2.6.6), мы получим функцию Грина задачи Дирихле в угле величины $\dfrac{\pi}{n}$ на плоскости.

Пример 2.6.5. *Найдите потенциал поля внутри двугранного угла величины* $\dfrac{\pi}{2}$*, образованного координатными плоскостями* $x = 0$ *и* $y = 0$*, если грань* $x = 0$ *— идеально проводящая заземленная плоскость, а грань* $y = 0$ *— непроводящая плоскость, поддерживаемая при потенциале* $V(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$.

Решение. В отличие от примера 2.6.4, здесь мы имеем однородное уравнение (так как заряды внутри угла отсутствуют) и неоднородные граничные условия (поскольку одна из граней поддерживается при ненулевом потенциале). Также, как и в примере 2.6.4, задача может быть сведена к двумерной в поперечном сечении:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \;\; x > 0, y > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{y=0} = \dfrac{1}{x^2 + a^2}, \\ |u| < \infty. \end{cases}$$

Ее решение можно построить при помощи функции Грина (получите ее самостоятельно):

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} - \ln \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}} - \right.$$
$$\left. - \ln \frac{1}{\sqrt{(x + x_0)^2 + (y - y_0)^2}} + \ln \frac{1}{\sqrt{(x + x_0)^2 + (y + y_0)^2}} \right),$$

где $M(x, y)$ — точка наблюдения, а $M_0(x_0, y_0)$ — точка источника, расположенные в поперечном сечении угла. Согласно (2.5.9), решение задачи имеет вид

$$u(M_0) = \int\limits_0^{+\infty} \left(u \frac{\partial G}{\partial y} \right)\Big|_{y=0} dx$$

для любой точки M_0 внутри угла. Так как

$$\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{y_0}{\pi}\left(\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2} - \frac{1}{(x+x_0)^2+y_0^2}\right),$$

получаем

$$u(M_0) = \frac{y_0}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left(\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2} - \frac{1}{(x+x_0)^2+y_0^2}\right)\frac{dx}{x^2+a^2} =$$

$$= \frac{y_0}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left\{\frac{2Ax}{x^2+a^2} - A\left(\frac{x-x_0}{(x-x_0)^2+y_0^2} + \frac{x+x_0}{(x+x_0)^2+y_0^2}\right) + \right.$$

$$\left. + B\left(\frac{1}{(x-x_0)^2+y_0^2} - \frac{1}{(x+x_0)^2+y_0^2}\right)\right\} dx,$$

где

$$A = \frac{2x_0}{4x_0^2a^2 + \left(x_0^2+y_0^2-a^2\right)^2}, \quad B = \frac{x_0^2-y_0^2+a^2}{4x_0^2a^2 + \left(x_0^2+y_0^2-a^2\right)^2}.$$

Вычисляя интеграл, находим

$$u(M_0) = \frac{y_0}{\pi}\left\{A\ln\left.\frac{x^2+a^2}{\sqrt{(x-x_0)^2+y_0^2}\cdot\sqrt{(x+x_0)^2+y_0^2}}\right|_0^{+\infty} + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{y_0}\left(\operatorname{arctg}\left.\frac{x-x_0}{y_0}\right|_0^{+\infty} - \operatorname{arctg}\left.\frac{x+x_0}{y_0}\right|_0^{+\infty}\right)\right\} =$$

$$= -\frac{Ay_0}{\pi}\ln\frac{a^2}{x_0^2+y_0^2} + 2\frac{B}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0} =$$

$$= \frac{1}{4x_0^2a^2 + \left(x_0^2+y_0^2-a^2\right)^2}\left\{-\frac{2x_0y_0}{\pi}\ln\frac{a^2}{x_0^2+y_0^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\left(x_0^2-y_0^2+a^2\right)\operatorname{arctg}\frac{x_0}{y_0}\right\} =$$

$$= \frac{1}{4a^2r_0^2\cos^2\psi_0 + \left(r_0^2-a^2\right)^2}\left\{-\frac{r_0^2\sin 2\psi_0}{\pi}\ln\frac{a^2}{r_0^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}(r_0^2\cos 2\psi_0 + a^2)\left(\frac{\pi}{2} - \psi_0\right)\right\}.$$

Последнее выражение представляет собой потенциал поля в полярных координатах.

Пример 2.6.6. *Найдите потенциал поля внутри двугранного угла, величины $\frac{\pi}{2}$, образованного координатными плоскостями $x = 0$ и $y = 0$, если грань $x = 0$ — идеально проводящая заземленная плоскость, а грань $y = 0$ — также идеально проводящая плоскость, поддерживаемая при постоянном потенциале V.*

Решение. То, что потенциал является постоянной величиной, позволяет применить другой метод решения, гораздо проще, чем в примере 2.6.5. Математическая постановка рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x > 0, y > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \\ u|_{y=0} = V, \\ |u| < \infty. \end{cases}$$

Поскольку задача линейная, ее решение можно искать в виде суммы $u = u_1 + u_2$. Подберем слагаемое u_1 так, чтобы оно удовлетворяло краевым условиям. В данной конкретной задаче (в отличие от предыдущей) это сделать совсем просто, например, можно положить $u_1(r, \psi) = \frac{2V}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$. Заметим, что функция u_1 удовлетворяет уравнению Лапласа. Для u_2 получаем задачу с однородным уравнением и однородными граничными условиями. Следовательно, $u_2 \equiv 0$. Итак, решением задачи является функция $u(r, \psi) = \frac{2V}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 2.6.7. *Найдите потенциал поля бесконечной заряженной пластины ширины L с поверхностной плотностью заряда σ, помещенной внутри двугранного угла величины $\frac{\pi}{2}$. Грани угла — идеально проводящие заземленные плоскости $\psi = 0$ и $\psi = \frac{\pi}{2}$. Края пластины лежат на прямых, параллельных грани угла, проходящих, соответственно, через точки (x_1, y_1, z_1) и $(x_1, y_1 + L, z_1)$.*

Задача 2.6.8. *Найдите потенциал поля бесконечной заряженной пластины ширины L с поверхностной плотностью заряда σ, помещенной внутри двугранного угла величины $\frac{\pi}{2}$. Грани угла — идеально проводящие заземленные плоскости $\psi = 0$ и $\psi = \frac{\pi}{2}$. Края пластины лежат на прямых, параллельных грани угла, проходящих, соответственно, через точки (r_1, ψ_0, z_1) и $(r_1 + L, \psi_0, z_1)$, $0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$.*

Задача 2.6.9. *Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити, помещенной внутри бесконечной цилиндрической полости кругового сечения параллельно оси цилиндра. Полость ограничена идеально проводящей заземленной поверхностью.*

Задача 2.6.10. *Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити, помещенной вне бесконечного цилиндра кругового сечения параллельно его оси. Цилиндр является идеально проводящим и заземленным.*

Задача 2.6.11. *Постройте функцию Грина оператора Лапласа внутренней задачи Дирихле для полукруга радиуса a.*

Задача 2.6.12. *Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити, помещенной внутри бесконечной цилиндрической полости параллельно оси цилиндра. Поперечное сечение полости представляет собой сектор круга радиуса a, с углом $\frac{\pi}{4}$. Полость ограничена идеально проводящей заземленной поверхностью.*

Задача 2.6.13. *Найдите потенциал поля, создаваемого бесконечной цилиндрической поверхностью кругового сечения радиуса a, которая поддерживается при потенциале*

$$V = \frac{1}{2 + \cos\psi + \sin\psi},$$

где ψ — полярный угол.

Совет. Примените формулу Пуассона для круга. Используйте замену переменных $z = e^{i\psi}$. При этом интеграл по отрезку $[0, 2\pi]$ перейдет в интеграл по единичной окружности $|z| = 1$. Для вычисления последнего интеграла воспользуйтесь теорией вычетов.

Ответ:

$$\varphi(r,\psi) = \frac{a^2 - r^2}{a(a^2 + r^2)} \frac{1}{\sqrt{1 + 4\varepsilon^2 \cos 2\psi}} \left(2 + \frac{1 - \sqrt{1 + 4\varepsilon^2 \cos 2\psi}}{2\varepsilon(\cos\psi + \sin\psi)}\right)^{-1},$$

где $\varepsilon = \dfrac{ar}{a^2 + r^2}$.

Задача 2.6.14. *Для любой непрерывной функции $f(\varphi)$ получите в интегральной форме решение задачи вне круга радиуса a:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > a, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \\ u|_{r=a} = f(\varphi), \\ |u| < \infty \text{ при } r \to +\infty. \end{cases}$$

Задача 2.6.15. *Решите с помощью функции Грина первую краевую задачу для уравнения Лапласа в полуплоскости $y > 0$, если:*

$$u|_{y=0} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ V_0, & x > 0, \end{cases}$$

где $V_0 = const$.

Задача 2.6.16. *Решите с помощью функции Грина первую краевую задачу для уравнения Лапласа в полукруге*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < a, \quad \varphi \in (0, \pi), \\ u|_{r=a} = 0, \\ u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\pi} = V_0, \end{cases}$$

где $V_0 = const$.

6.2. Разложение функции Грина по собственным функциям оператора Лапласа.

Как и в трехмерном случае (глава 2, § 3.2), функция Грина оператора Лапласа внутренней двумерной задачи Дирихле представима в виде ряда

$$G(Q,M)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(Q)v_k(M)}{\lambda_k}, \tag{2.6.7}$$

где v_k и λ_k соответственно ортонормированные собственные функции и собственные значения задачи Штурма–Лиувилля для оператора Лапласа

$$\begin{cases} \Delta v_k=-\lambda_k v_k, & M\in D,\\ v_k\big|_L=0. \end{cases} \tag{2.6.8}$$

Ряд сходится по норме пространства $L_2(D\times D)$. Равенство (2.6.7) следует понимать как равенство элементов пространства $L_2(D\times D)$ (см. § 3.2). Равенство (2.6.7) следует из теоремы (2.3.1), так как

$$\|G(Q,M)\|^2=\int\limits_D\int\limits_D G^2(Q,M)dS_QdS_M<\infty.$$

В самом деле, поскольку

$$G(Q,M)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}}+v(Q,M),$$

где v — гармоническая функция, непрерывная в $\overline{D}$, то найдется такая константа $C>0$, что $|v|\leqslant C$. Следовательно

$$\|G(Q,M)\|^2\leqslant \\ \leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_D\int\limits_D\left(\ln\frac{1}{r_{QM}}\right)^2dS_QdS_M+\frac{C}{\pi}\int\limits_D\int\limits_D\left|\ln\frac{1}{r_{QM}}\right|dS_QdS_M+C^2S_0^2, \tag{2.6.9}$$

где S_0 — площадь области D. В [7] показано, что интеграл

$$I(M)=\int\limits_D\frac{1}{r_{QM}}\,dS_Q$$

является непрерывной функцией переменной M.

Так как $\left|\ln\dfrac{1}{r_{QM}}\right|\leqslant\dfrac{1}{r_{QM}}$ и $\left(\ln\dfrac{1}{r_{QM}}\right)^2\leqslant\dfrac{1}{r_{QM}}$ при $r_{QM}\to 0$, то интегралы в правой части (2.6.9) сходятся.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 2.6.17. *Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити с постоянной линейной плотностью заряда ρ, помещенной внутрь бесконечной цилиндрической полости прямоугольного поперечного сечения: $0<x<a$, $0<y<b$. Стенки цилиндра идеально проводящие и заземленные, а нить параллельна оси цилиндра.*

Задача 2.6.18. *Постройте функцию Грина оператора Лапласа задачи Дирихле в секторе радиуса a с углом α.*

6.3. Метод разделения переменных.

Метод разделения переменных для построения функции Грина задачи Дирихле в двумерной области D применяется аналогично тому, как это делается в трехмерном случае (см. пункт 3.3). Функция Грина имеет вид

$$G(Q, M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{QM}} + v(Q, M),$$

где $Q \in D$ — точка истока, $M \in D$ — точка наблюдения, а функция v является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad Q \in D, \\ v|_L = -\dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{r_{PM}}, \quad P \in L. \end{cases} \tag{2.6.10}$$

Общее решение уравнения Лапласа в полярной системе координат имеет вид

$$v(r, \psi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right) \cos n\psi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n r^n + F_n r^{-n}\right) \sin n\psi.$$

Коэффициенты C_n, D_n, E_n, F_n находятся из граничного условия. Разложим неоднородность в граничном условии в ряд Фурье по основной тригонометрической системе. Для этого воспользуемся разложением в ряд фундаментального решения оператора Лапласа:

$$\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{r} + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{r_0}{r}\right)^n \cos n(\varphi - \varphi_0), \ \text{если } r > r_0, \\ \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{r_0} + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\varphi - \varphi_0), \ \text{если } r < r_0. \end{cases} \tag{2.6.11}$$

Вывод формулы (2.6.11) приведен в приложении (см. (Б.0.14)).

Пример 2.6.19. *Найдите потенциал поля, создаваемого бесконечной заряженной нитью с постоянной линейной плотностью заряда ρ_0 внутри цилиндрического слоя, ограниченного двумя концентрическими проводящими заземленными цилиндрами, поперечные сечения которых являются окружностями радиусов a и b ($a < b$). Нить параллельна оси системы.*

Решение. Задачу можно рассматривать как плоскую в любом поперечном сечении цилиндрического слоя. Пусть нить проходит через точку M_0, лежащую в поперечном сечении. Потенциал имеет вид

$$\varphi(M, M_0) = 2\rho_0 \ln \frac{1}{r_{_{MM_0}}} + v(M, M_0).$$

В выбранном поперечном сечении введем полярные координаты. Поместим начало координат на ось симметрии области, а полярную ось так, чтобы на ней лежала точка M_0. Тогда точка M имеет координаты (r, ψ), а точка M_0 — координаты $(r_0, 0)$. Задача для функции $v(M, M_0)$ имеет вид:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad r \in (a, b), \quad \psi \in [0, 2\pi], \\ v|_{r=a} = -2\rho_0 \ln \dfrac{1}{r_{_{PM_0}}}\Bigg|_{r=a} = 2\rho_0 \ln \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos\psi}\,, \\ v|_{r=b} = -2\rho_0 \ln \dfrac{1}{r_{_{PM_0}}}\Bigg|_{r=b} = 2\rho_0 \ln \sqrt{b^2 + r_0^2 - 2br_0 \cos\psi}\,. \end{cases}$$

Общее решение уравнения Лапласа в кольце можно записать следующим образом [2]:

$$v = A_0 \ln \frac{r}{a} + B_0 \ln \frac{b}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{r^{2n} - a^{2n}}{r^n} \cos n\psi + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{b^{2n} - r^{2n}}{r^n} \cos n\psi.$$

Неизвестные коэффициенты A_n и B_n найдем из граничных условий. Для этого представим неоднородности в граничных условиях задачи в виде разложения в ряд Фурье по тригонометрической системе функций $\{\sin n\psi, \cos n\psi\}$, используя формулы (2.6.11):

$$2\rho_0 \ln \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos\psi} = \\ = 2\rho_0 \frac{1}{2} \ln \left(r_0^2 \left(1 + (a/r_0)^2 - 2(a/r_0)\cos\psi\right)\right) = \\ = 2\rho_0 \ln r_0 - 2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \frac{\cos n\psi}{n},$$

так как $r_0 > a$, и

$$\ln \sqrt{b^2 + r_0^2 - 2br_0 \cos\psi} = \ln b - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{b}\right)^n \frac{\cos n\psi}{n},$$

так как $r_0 < b$.
Тогда

$$v|_{r=a} = B_0 \ln\frac{b}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{b^{2n} - a^{2n}}{a^n} \cos n\psi = \\ = 2\rho_0 \ln r_0 - 2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \frac{\cos n\psi}{n}$$

и

$$v|_{r=b} = A_0 \ln\frac{b}{a} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{b^{2n} - a^{2n}}{b^n} \cos n\psi = \\ = 2\rho_0 \ln b - 2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{b}\right)^n \frac{\cos n\psi}{n},$$

откуда получаем:

$$A_0 = 2\rho_0 \frac{\ln b}{\ln(b/a)}, \quad A_n = -\frac{2\rho_0}{n} \frac{r_0^n}{b^{2n} - a^{2n}},$$

$$B_0 = 2\rho_0 \frac{\ln r_0}{\ln(b/a)}, \quad B_n = -\frac{2\rho_0}{n} \left(\frac{a}{r_0}\right)^n \frac{a^n}{b^{2n} - a^{2n}}.$$

Итак, потенциал имеет вид:

$$\varphi(M, M_0) = 2\rho_0 \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi}} + 2\rho_0 \frac{\ln b \ln(r/a) + \ln r_0 \ln(b/r)}{\ln(b/a)} - \\ - 2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \frac{r^{2n} - a^{2n}}{b^{2n} - a^{2n}} + \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n \frac{b^{2n} - r^{2n}}{b^{2n} - a^{2n}} \right\} \cos n\psi.$$

Замечание 2.6.1 *Положив* $\rho_0 = \dfrac{1}{4\pi}$ *и заменив угол* ψ *на* $(\psi - \psi_0)$, *получим функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в кольце* $a < r < b$:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + \frac{1}{2\pi} \frac{\ln b \ln(r/a) + \ln r_0 \ln(b/r)}{\ln(b/a)} - \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \frac{r^{2n} - a^{2n}}{b^{2n} - a^{2n}} + \left(\frac{a^2}{r_0 r}\right)^n \frac{b^{2n} - r^{2n}}{b^{2n} - a^{2n}} \right\} \cos n(\psi - \psi_0).$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 2.6.20. *Постройте функцию Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле в полукольце* $\{a < r < b, 0 < \psi < \pi\}$.

Задача 2.6.21. *Получите выражение (2.6.1) для функции Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле в круге, используя метод разделения переменных.*

Задача 2.6.22. *Получите выражение (2.6.5) для функции Грина оператора Лапласа для задачи Дирихле вне круга, используя метод разделения переменных.*

6.4. Использование конформных отображений для построения функции Грина оператора Лапласа.

Напомним определение и свойства конформного отображения [10].

Определение 2.6.1 *Взаимно однозначное отображение области D комплексной плоскости z на область $\widetilde{D}$ комплексной плоскости w называется конформным, если это отображение во всех точках $z \in D$ обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений.*

Теорема 2.6.1 [10] *Пусть функция $h(z)$ является однозначной и однолистной аналитической функцией в области D и $h'(z) \neq 0$ при $z \in D$. Тогда функция $h(z)$ производит конформное отображение области D на область $\widetilde{D}$ комплексной плоскости w, представляющую собой область значений функции $w = h(z)$ при $z \in D$.*

Итак, конформное отображение обладает свойствами сохранения углов и постоянства растяжений. То есть угол между любыми двумя гладкими кривыми, пересекающимися в точке z_0, равен по абсолютной величине углу между их образами на плоскости w в точке $w_0 = h(z_0)$, а бесконечно малые линейные элементы $\Delta z_1 = z_1 - z_0$ и $\Delta z_2 = z_2 - z_0$ преобразуются подобным образом в бесконечно малые линейные элементы $\Delta w_1 = w_1 - w_0$ и $\Delta w_2 = w_2 - w_0$. Коэффициент подобия равен

$$\frac{|\Delta w_1|}{|\Delta z_1|} = \frac{|\Delta w_2|}{|\Delta z_2|} = |h'(z_0)|.$$

При конформном отображении граница области D переходит в границу области $\widetilde{D}$.

Любая гармоническая функция $u(z)$ при конформном отображении преобразуется в гармоническую функцию $U(w)$ [10]. Это свойство можно использовать при решении краевой задачи для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & M \in D, \\ u|_L = f(P), & P \in L, \end{cases} \tag{2.6.12}$$

где L — граница области D.

Найдем такое конформное отображение области D в $\widetilde{D}$, чтобы в полученной области краевая задача для уравнения Лапласа решалась легче. Пусть это отображение осуществляется с помощью функции

$$w = h(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y),$$

где $z = x + iy$, $w = \xi + i\eta$. Функция $h(z)$ задает невырожденную замену действительных переменных

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta). \end{cases} \tag{2.6.13}$$

Обратное преобразование осуществляется при помощи обратной замены:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y), \\ \eta = \eta(x, y). \end{cases} \tag{2.6.14}$$

Можно показать [10], что оператор Лапласа преобразуется следующим образом
$$\Delta_{xy} = |h'|^2 \Delta_{\xi\eta}.$$
Применяя замену переменных (2.6.13) к задаче (2.6.12), получаем
$$\begin{cases} \Delta_{\xi\eta} U = 0, & (\xi, \eta) \in \widetilde{D}, \\ U|_{\widetilde{L}} = g(\xi, \eta), & (\xi, \eta) \in \widetilde{L}, \end{cases} \tag{2.6.15}$$
где $U(\xi, \eta) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad g(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$.

Решая задачу (2.6.15), находим функцию $U(\xi, \eta)$, гармоническую в области $\widetilde{D}$. С помощью обратного преобразования (2.6.14) получаем выражение для функции $u(x, y)$ — решения задачи (2.6.12).

Указанный метод особенно удобен в случае, если область D является односвязной. Из теоремы Римана [10] вытекает, что в этом случае можно подобрать функцию $w = h(z)$ таким образом, чтобы конформно отобразить область D на внутренность единичного круга $|w| \leqslant 1$ с центром в начале координат. При этом фиксированная внутренняя точка $M_0 \in D$ переходит в центр этого круга. Тогда значению $u(M_0)$ соответствует значение $U|_{r=0}$ функции $U(r, \theta)$, гармонической в круге $|w| \leqslant 1$:
$$\begin{cases} \Delta_{r,\theta} U = 0, & 0 \leqslant r < 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \\ U|_{r=1} = g(\theta), & 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \end{cases}$$
Используя формулу среднего значения для гармонической функции, получаем
$$U|_{r=0} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(\theta) d\theta.$$
Поскольку
$$1 = -\frac{d}{dr}\left(\ln \frac{1}{r}\right) r\bigg|_{r \neq 0},$$
то
$$U|_{r=0} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} 1 \cdot g(\theta) d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d}{dr}\left(\ln \frac{1}{r}\right) g(\theta) r d\theta\bigg|_{r=1} =$$
$$= -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \widetilde{n}}\left(\ln \frac{1}{r}\right) g(\theta) r d\theta\bigg|_{r=1} = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{\widetilde{\mathbf{n}}}{|\widetilde{\mathbf{n}}|}, \nabla \ln \frac{1}{r}\right) g(\theta) r d\theta\bigg|_{r=1},$$
где $\widetilde{\mathbf{n}}$ — вектор нормали к окружности.

Переход к переменным (x, y) осуществляется при помощи функции $z = h^{-1}(w)$, которая осуществляет конформное отображение единичного круга на область D [10]. Поэтому в результате замены переменных

(2.6.14) внешняя нормаль $\widetilde{\mathbf{n}}$ к окружности преобразуется во внешнюю нормаль к границе L области D. Кроме того, имеет место соотношение подобия

$$\frac{d\theta}{|\widetilde{\mathbf{n}}|} = \frac{dl}{|\mathbf{n}|},$$

где dl — бесконечно малый элемент кривой L (отображение элемента $d\theta$), а $\mathbf{n}$ — отображение вектора нормали $\widetilde{\mathbf{n}}$, перпендикулярного к элементу $d\theta$. В силу свойства сохранения углов при конформном отображении ортогональный базис переходит в ортогональный. Возвращаясь к переменным (x, y), находим $u(M_0) = U|_{r=0}$.

$$u(M_0) = -\int\limits_{L_1} f(P) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|h(z_0, z)|}\right) dl.$$

Справедлива следующая теорема [10]:

Теорема 2.6.2 *Если функция $w = h(z_0, z)$ осуществляет конформное отображение области D_1 комплексной плоскости z на внутренность единичного круга $|w| < 1$ так, что заданная точка $z_0 \in D_1$ переходит в центр $w = 0$ этого круга, то функция*

$$G(M_0, M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|h(z_0, z)|} \tag{2.6.16}$$

является функцией Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области D_1.

Пример 2.6.23. *Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити с постоянной линейной плотностью заряда q, помещенной внутри двугранного угла величины α параллельно ребру этого угла, $\alpha \in (0; 2\pi)$. Грани угла представляют собой проводящие заземленные плоскости. (Для частного случая $\alpha = \dfrac{\pi}{n}$ данная задача решена ранее методом электростатических отображений, однако в общем случае этот метод неприменим: рано или поздно фиктивный заряд, полученный при отражении, попадет в рассматриваемую область, что приведет к наличию лишнего точечного источника).*

Решение. Введем цилиндрическую систему координат, совместив ось Oz с ребром угла. Так как линейная плотность заряда q нити постоянна, то в задаче нет зависимости от переменной z, и она сводится к двумерной. Рассмотрим произвольную плоскость, перпендикулярную ребру угла. Пусть M_0 — точка пересечения нити с этой плоскостью, и (r_0, ψ_0) — полярные координаты точки M_0 в рассматриваемой плоскости. Область $D = \{(r, \psi) : \ r > 0, \ 0 < \psi < \alpha\}$ в выбранной плоскости соответствует внутренней части двугранного угла. Итак, задача принимает вид:

$$\begin{cases} \Delta u = -4\pi q \delta(M, M_0), \ \ M, M_0 \in D, \\ u|_{\psi=0} = u|_{\psi=\alpha} = 0. \end{cases}$$

Введем комплексную плоскость z, где $|z| = r$, $\arg z = \psi$ и будем искать решение этой задачи с помощью теоремы 2.6.2. Для этого нужно отобразить область D на внутренность круга единичного радиуса. Сначала преобразуем сектор в верхнюю полуплоскость с помощью функции $\zeta = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$, $\zeta_0 = z_0^{\frac{\pi}{\alpha}}$, где z_0 соответствует точке M_0. Верхняя полуплоскость может быть отображена на круг с помощью дробно-линейной функции

$$w = f(\zeta) = \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta - \overline{\zeta}_0},$$

где $\overline{\zeta}_0$ — комплекно сопряженное к ζ_0, причем точка $\zeta_0 = z_0^{\frac{\pi}{\alpha}}$ переходит в центр круга. Следовательно, по теореме 2.6.2 функция Грина имеет вид:

$$u(z, z_0) = \frac{q}{2} \ln \frac{\left| z^{\pi/\alpha} - z_0^{\pi/\alpha} \right|}{\left| z^{\pi/\alpha} - \overline{z}_0^{\pi/\alpha} \right|},$$

или

$$u(r, \psi) = \frac{q}{2} \ln \frac{r_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} + r^{\frac{2\pi}{\alpha}} - 2\,(rr_0)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \dfrac{\pi}{\alpha}(\psi - \psi_0)}{r_0^{\frac{2\pi}{\alpha}} + r^{\frac{2\pi}{\alpha}} - 2\,(rr_0)^{\frac{\pi}{\alpha}} \cos \dfrac{\pi}{\alpha}(\psi + \psi_0)}.$$

Замечание 2.6.2 *Вообще говоря, функция $\zeta = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$ является многозначной:*

$$\zeta = z^{\frac{\pi}{\alpha}} = e^{\frac{\pi}{\alpha} \operatorname{Ln} z} = e^{\frac{\pi}{\alpha}(\ln|z| + i \arg z + i2\pi k)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Для того, чтобы построить с ее помощью конформное отображение, мы выбираем ветвь, соответствующую $k = 0$.

Точка $z = 0$ является точкой ветвления для функции $\zeta = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$, поэтому при $z = 0$ конформность отображения нарушается. Тем не менее, значение потенциала поля в этой точке известно из граничного условия, оно равно нулю, поскольку по условию грани угла заземлены.

Пример 2.6.24. *Постройте функцию Грина первой краевой задачи для оператора Лапласа в полосе $x \in (-\infty; +\infty)$, $y \in (0; \pi)$.*

Решение. Для решения задачи нужно построить конформное отображение данной полосы комплексной плоскости z на внутренность единичного круга $|\zeta| < 1$, при котором заданная точка z_0 переходила бы в центр круга $\zeta = 0$. Это отображение осуществляется с помощью функции Жуковского, имеющей вид:

$$f(z, z_0) = \frac{e^z - e^{z_0}}{e^z - e^{\overline{z}_0}}.$$

Так как

$$|e^z - e^{z_0}| = \left\{ \left(e^x \cos y - e^{x_0} \cos y_0\right)^2 + \left(e^x \sin y - e^{x_0} \sin y_0\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} =$$
$$= e^{\frac{x+x_0}{2}} \sqrt{2}\ \{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y - y_0)\}^{\frac{1}{2}},$$

то после преобразований получаем искомую функцию Грина

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|f(z, z_0)|} = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y + y_0)}{\operatorname{ch}(x - x_0) - \cos(y - y_0)}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 2.6.25. *Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити с линейной плотностью заряда q, помещенной внутри двугранного угла величины $\frac{2\pi}{3}$ параллельно ребру этого угла. Грани угла представляют собой идеально проводящие заземленные плоскости.*

Задача 2.6.26. *Найдите потенциал поля бесконечной заряженной пластины ширины L с поверхностной плотностью заряда σ, помещенной вне двугранного угла величины $\frac{\pi}{2}$. Грани угла — идеально проводящие заземленные плоскости $\psi = 0$ и $\psi = \frac{\pi}{2}$. Края пластины лежат на прямых, параллельных грани угла, проходящих, соответственно, через точки (r_1, ψ_0, z_1) и $(r_1 + L, \psi_0, z_1)$, $\frac{\pi}{2} < \psi_0 < 2\pi$.*

6.5. Построение функции Грина с помощью разложения в ряд Фурье. Метод разложения в ряд Фурье применим и в двумерном случае. Он позволяет свести исходное уравнение в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрим построение функции Грина с помощью этого метода.

Пример 2.6.27. *Постройте функцию Грина для кольцевого сектора $a \leqslant r \leqslant b$, $0 \leqslant \psi \leqslant \alpha$.*

Решение. Функция Грина $G\,(r, r_0, \psi, \psi_0)$ является решением задачи

$$\Delta G = -\frac{4\pi}{r_0}\delta(r - r_0)\delta(\psi - \psi_0), \tag{2.6.17}$$

$$a < r, r_0 < b;\; 0 < \psi, \psi_0 < \alpha, \tag{2.6.18}$$

$$G|_{\psi=0} = G|_{\psi=\alpha} = 0, \tag{2.6.19}$$

$$G|_{r=a} = G|_{r=b} = 0. \tag{2.6.20}$$

Будем искать функцию $G\,(r, r_0, \psi, \psi_0)$ в виде разложения в ряд Фурье по системе собственных функций $v_n(\psi) = \sin \frac{\pi n}{\alpha}\psi$, $n = 1, 2, \ldots$ отрезка $[0, \alpha]$:

$$G\,(r, r_0, \psi, \psi_0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,(r, r_0, \psi_0) \sin \frac{\pi n}{\alpha}\psi.$$

Коэффициенты A_n Фурье разложения определяются формулами

$$A_n(r, r_0, \psi_0) = \frac{2}{\alpha} \int\limits_0^\alpha G\,(r, r_0, \psi, \psi_0) \sin \frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Получим уравнения для коэффициентов разложения. Для этого умножим уравнение (2.6.18) на $\frac{2}{\alpha}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi$ и проинтегрируем левую и правую части полученного равенства по отрезку $[0,\alpha]$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2}{\alpha}\int\limits_0^\alpha G\left(r,r_0,\psi,\psi_0\right)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{r^2}\frac{2}{\alpha}\int\limits_0^\alpha\frac{\partial^2 G}{\partial\psi^2}\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi=-\frac{8\pi\delta(r-r_0)}{\alpha r_0}\int\limits_0^\alpha\delta(\psi-\psi_0)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi d\psi.$$

Два раза интегрируя по частям второе слагаемое в левой части с учетом граничных условий (2.6.19), получаем уравнения для функций $A_n(r,r_0,\psi_0)$:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_n}{dr}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2A_n=-\frac{8\pi r}{r_0\alpha}\delta(r-r_0)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0,\ \ n=1,2,\ldots \tag{2.6.21}$$

Краевые условия для этого уравнения следуют из (2.6.20):

$$A_n|_{r=a}=A_n|_{r=b}=0. \tag{2.6.22}$$

Будем строить решение краевой задачи (2.6.21)-(2.6.22) на отрезке $[a,b]$ с помощью функции Грина. Как известно [17], функцию Грина самосопряженного оператора

$$L[y]=\frac{d}{dr}\left(p(r)\frac{dy}{dr}\right)$$

следует искать в виде:

$$g(r,s)=\frac{1}{p(s)W(s)}\begin{cases}y_1(r)y_2(s), & a\leqslant r\leqslant s,\\ y_2(r)y_1(s), & s\leqslant r\leqslant b,\end{cases}$$

где $y_1(r)$, $y_2(r)$ — решения однородного уравнения $L[y]=0$, удовлетворяющие условиям

$$y_1(a)=0,\quad y_2(b)=0, \tag{2.6.23}$$

а $W(s)$ — определитель Вронского функций $y_1(r)$ и $y_2(r)$, взятый в точке s.

Решения однородного уравнения

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dy}{dr}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{\pi n}{\alpha}\right)^2y=0,$$

удовлетворяющие краевым условиям (2.6.23), имеют вид

$$y_1(r)=r^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right),\quad y_2(r)=r^{-\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right).$$

Тогда

$$p(s)W(s) = sW\left[y_1(s), y_2(s)\right] = -\frac{2\pi n}{\alpha}\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right).$$

Для функции $g(r, s)$ получаем выражение

$$g(r, s) = \left[-\frac{2\pi n}{\alpha}\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\right]^{-1} \times$$
$$\times \begin{cases} \left(\frac{r}{s}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\left(1-\left(\frac{s}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right), & a \leqslant r \leqslant s, \\ \left(\frac{s}{r}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{a}{s}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\left(1-\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right), & s \leqslant r \leqslant b. \end{cases}$$

Функция $A_n(r, r_0, \psi_0)$, которая является решением задачи (2.6.21)-(2.6.22), может быть представлена через функцию $g(r, s)$ следующим образом [17]:

$$A_n(r, r_0, \psi_0) = \int\limits_a^b g(r, s)\left(-\frac{8\pi}{\alpha}\right)\frac{s}{r_0}\delta(s-r_0)\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0 ds, \tag{2.6.24}$$

Подставляя выражение для $g(r, s)$ в (2.6.24), получаем

$$A_n(r, r_0, \psi_0) =$$
$$= \begin{cases} 4\cdot\dfrac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\left(1-\left(\frac{r_0}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}{n\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}\sin\dfrac{\pi n}{\alpha}\psi_0, & a \leqslant r \leqslant r_0, \\ 4\cdot\dfrac{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{a}{r_0}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\left(1-\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}{n\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}\sin\dfrac{\pi n}{\alpha}\psi_0, & r_0 \leqslant r \leqslant b. \end{cases}$$

Окончательно решение задачи (2.6.18)-(2.6.20) получаем в виде ряда Фурье

$$G(r,r_0,\psi,\psi_0)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\frac{\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\left(1-\left(\frac{r_0}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}{n\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}\times\\ \qquad\qquad\times\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi,\ \ r\leqslant r_0,\\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}4\cdot\frac{\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\frac{\pi n}{\alpha}}\left(1-\left(\frac{a}{r_0}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)\left(1-\left(\frac{r}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}{n\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2\pi n}{\alpha}}\right)}\times\\ \qquad\qquad\times\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi_0\sin\frac{\pi n}{\alpha}\psi,\quad r_0\leqslant r.\end{cases}$$

Отметим, что полученные ряды сходятся абсолютно при $r\neq r_0$ и условно при $r=r_0$.

Задания для самостоятельного решения.

Задача 2.6.28. *Найдите потенциал поля бесконечной заряженной нити, помещенной внутрь бесконечной цилиндрической полости, поперечное сечение которой имеет форму сектора радиуса a и углом $\frac{\pi}{4}$. Полость ограничена идеально проводящей заземленной поверхностью.*

Глава 3

ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧ НЕЙМАНА

Краевые задачи для оператора Лапласа с граничным условием Неймана возникают, например, при расчете стационарного распределения температуры в некоторой области. Если известен тепловой поток через границу этой области, то мы приходим к задаче с неоднородным условием Неймана. Если поток тепла через границу отсутствует, то есть граница теплоизолирована, то граничное условие Неймана оказывается однородным.

§ 1. Внутренние трехмерные задачи

Пусть D — область, ограниченная достаточно гладкой поверхностью S в пространстве $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим задачу Неймана для уравнения Пуассона:

$$\Delta u = -F(M), \qquad M \in D, \tag{3.1.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P), \qquad P \in S, \tag{3.1.2}$$

где $\mathbf{n}$ — единичная внешняя по отношению к области D нормаль к поверхности S.

В отличие от задачи Дирихле вторая краевая задача (3.1.1-3.1.2) разрешима только при выполнении условия

$$-\int\limits_D F(M)dV = \oint\limits_S f(P)dS. \tag{3.1.3}$$

Действительно, пусть решение задачи $u(M)$ существует. Применим первую формулу Грина,

$$\int\limits_D v\Delta u\, dV = \oint\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n}\, dS - \int\limits_D \nabla v \cdot \nabla u\, dV,$$

к решению u задачи (3.1.1-3.1.2) и функции $v = 1$. В результате получим

$$\int\limits_D \Delta u dV = \oint\limits_S \frac{\partial u}{\partial n}\, dS, \tag{3.1.4}$$

откуда следует (3.1.3). Таким образом, условие (3.1.3) является необходимым условием разрешимости задачи.

Поясним физический смысл условия разрешимости (3.1.3) в рамках электростатики. Если функция u представляет собой потенциал электростатического поля, то выражение в правой части (3.1.4) есть полный поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность S, а выражение в левой части (3.1.4) есть полный заряд, находящийся внутри области D. Таким образом, равенство (3.1.3) означает выполнение теоремы Остроградского–Гаусса.

Пусть условие разрешимости задачи (3.1.1-3.1.2) выполнено.

Определение 3.1.1 *Будем называть классическим решением задачи (3.1.1-3.1.2) функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D, непрерывно дифференцируемую в области $\overline{D}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (3.1.1) в области D и граничному условию (3.1.2).*

Если граница S области D является поверхностью Ляпунова, функция $F(M)$ является непрерывно дифференцируемой, а функция $f(P)$ непрерывна и удовлетворяет условию (3.1.3), то задача (3.1.1-3.1.2) имеет классическое решение, которое определяется с точностью до аддитивной постоянной [1].

Для того, чтобы получить выражение для решения задачи (3.1.1-3.1.2), воспользуемся формулой (2.1.4):

$$u(M) = \oint\limits_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dS_P - \\ - \int\limits_D G(Q,M)\Delta u(Q) dV_Q. \tag{3.1.5}$$

Через $G(Q,M)$ обозначено фундаментальное решение оператора Лапласа в трехмерном случае, которое представляет собой сумму двух слагаемых:

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v,$$

где v — гармоническая в области D функция. Подставляя в выражение (3.1.5) значения $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P)$ и $\Delta u(Q) = -F(Q)$, получаем:

$$u(M) = \oint\limits_S \left(G(P,M)f(P) - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dS_P + \\ + \int\limits_D G(Q,M)F(Q) dV_Q. \tag{3.1.6}$$

В правой части (3.1.6) содержится слагаемое

$$\oint\limits_S u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} dS_P = \oint\limits_S u(P) \left(\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{4\pi r_{PM}} + \frac{\partial v}{\partial n_P} \right) dS_P, \tag{3.1.7}$$

значение которого неизвестно, поскольку в задаче на границе S задано лишь $\dfrac{\partial u}{\partial n}(P)$, $P \in S$, а значение самой функции $u(P)$ не определено.

Решение внутренней трехмерной задачи Неймана определено с точностью до аддитивной постоянной, поэтому подберем функцию v таким образом, чтобы выражение (3.1.7) было равно константе. Возьмем в качестве функции v решение задачи

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad Q \in D, \\ \dfrac{\partial v}{\partial n_P}\Big|_S = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial n_P}\dfrac{1}{r_{PM}} + C, \quad P \in S. \end{cases} \tag{3.1.8}$$

Константа C в краевом условии задачи (3.1.8) выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие разрешимости (3.1.3), которое в данном случае приобретает вид:

$$\oint\limits_S \left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM}} + C\right) dS_P = 0,$$

откуда получаем

$$C \cdot S_0 = \oint\limits_S \left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM}}\right) dS_P,$$

где S_0 — площадь поверхности S. Интеграл в правой части последнего равенства можно вычислить, используя третью формулу Грина (A.1.6), записанную для функции $u \equiv 1$:

$$1 = -\frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM}} dS_P.$$

Окончательно получаем

$$C = -\frac{1}{S_0}.$$

Определение 3.1.2 *Функцией Грина внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа в трехмерном случае будем называть функцию*

$$G(Q, M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q, M), \quad Q \in \overline{D}, \quad M \in D,$$

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q, M)$ *— гармоническая функция координат точки* $Q \in D$, *непрерывная на* $\overline{D}$ *для каждой точки* $M \in D$;
2) $\dfrac{\partial}{\partial n_P} G(P, M)\Big|_{P \in S} = -\dfrac{1}{S_0}$ *для каждой точки* $M \in D$.

Функция Грина оператора Лапласа для внутренней задачи Неймана в трехмерном случае представляет собой решение задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q,M \in D, \\ \left.\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right|_S = -\dfrac{1}{S_0}, \quad P \in S, \quad M \in D. \end{cases} \tag{3.1.9}$$

Функция Грина задачи Неймана определена с точностью до слагаемого, не зависящего от координат точки Q, но, вообще говоря, зависящего от координат точки M. Это слагаемое можно выбрать так, чтобы функция Грина была симметричной. Для этого достаточно потребовать выполнения дополнительного условия

$$\oint_S G(P,M)dS_P = 0, \tag{3.1.10}$$

однозначно определяющего функцию Грина $G(Q,M)$ [1].

Таким образом, решение задачи (3.1.1-3.1.2) можно записать в виде

$$u(M) = \oint_S G(P,M)f(P)dS_P + \int_D G(Q,M)F(Q)dV_Q + A_0, \tag{3.1.11}$$

где A_0 — произвольная постоянная.

§ 2. Внешние трехмерные задачи Неймана

Как и в случае внешних задач Дирихле, при постановке внешних задач Неймана для оператора Лапласа требуется дополнительное условие регулярности решения на бесконечности (см. определение 2.2.1).

Пусть D_e — дополнение ограниченной области D с границей S до всего пространства $\mathbb{R}^3$. Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\Delta u = -F(M), \ \ M \in D_e, \tag{3.2.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P), \ \ P \in S, \tag{3.2.2}$$

где $\mathbf{n}$ — единичная внешняя по отношению к области D_e нормаль к поверхности S, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Определение 3.2.1 *Будем называть классическим решением задачи (3.2.1-3.2.2) регулярную на бесконечности функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D_e, непрерывно дифференцируемую в области $\overline{D}_e$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (3.2.1) в области D_e и граничному условию (3.2.2).*

Если поверхность S является поверхностью Ляпунова, то задача (3.2.1-3.2.2) имеет единственное классическое решение для любой непрерывной на поверхности S функции $f(P)$ и любой финитной непрерывно-дифференцируемой функции $F(M)$ [1]. Таким образом, в отличие от случая внутренней трехмерной задачи Неймана, для внешней трехмерной задачи дополнительное условие разрешимости не требуется.

Для регулярных на бесконечности функций во внешних областях справедливы формулы Грина. Поэтому решение задачи (3.2.1) можно построить, используя формулу (2.1.4):

$$u(M) = \oint\limits_S \left(G(P, M) \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P) \frac{\partial G(P, M)}{\partial n_P} \right) dS_P -$$
$$- \int\limits_{D_e} G(Q, M) \Delta u(Q) dV_Q,$$

где

$$G(Q, M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v,$$

а v — произвольная регулярная на бесконечности гармоническая функция. Заметим, что в отличие от внутренних задач Неймана, при построении решения внешних задач в трехмерном случае можно требовать, чтобы производная $\dfrac{\partial G(P, M)}{\partial n_P}$ обращалась в ноль на границе S, так как никаких дополнительных условий разрешимости задачи не требуется.

Определение 3.2.2 *Функцией Грина внешней задачи Неймана (3.2.1-3.2.2) для оператора Лапласа в трехмерном случае будем называть функцию*

$$G(Q, M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q, M), \quad Q \in \overline{D_e}, \quad M \in D_e,$$

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q, M)$ — регулярная на бесконечности гармоническая функция координат точки $Q \in D_e$, непрерывная на $\overline{D_e}$ для каждой точки $M \in D_e$;
2) $\left.\dfrac{\partial G(P, M)}{\partial n_P}\right|_{P \in S} = 0$ для каждой точки $M \in D_e$.

Функция Грина $G(Q, M)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q, M) = -\delta(Q, M), \;\; Q, M \in D_e, \\ \left.\dfrac{\partial G(P, M)}{\partial n_P}\right|_S = 0, \;\; P \in S, M \in D_e, \\ G(Q, M) \rightrightarrows 0 \text{ на бесконечности.} \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Функция $G(Q, M)$ симметрична относительно перестановки точек Q и M. Решение задачи (3.2.1) может быть записано в виде:

$$u(M) = \oint\limits_S G(P, M) f(P) dS_P + \int\limits_{D_e} G(Q, M) F(Q) dV_Q. \tag{3.2.4}$$

§ 3. Внутренние двумерные задачи Неймана

Пусть D — ограниченная область с достаточно гладкой границей L в двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$. Рассмотрим задачу Неймана:

$$\Delta u = -F(M), \quad M \in D, \tag{3.3.1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_L = f(P), \quad P \in L. \tag{3.3.2}$$

Как и в случае трехмерной задачи, можно доказать, что краевая задача (3.3.1) разрешима только при выполнении условия

$$-\int\limits_D F(M)dS = \oint\limits_L f(P)dl. \tag{3.3.3}$$

Определение 3.3.1 *Будем называть классическим решением задачи (3.3.1)-(3.3.2) функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D, непрерывно дифференцируемую в области $\overline{D}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (3.3.1) в области D и граничному условию (3.3.2).*

Если граница L области D является кривой Ляпунова, функция $f(P)$ непрерывной, а функция $F(M)$ непрерывно дифференцируемой, то при выполнении условия (3.3.3) решение задачи (3.3.1)-(3.3.2) существует, но оно не единственно и определяется с точностью до аддитивной постоянной [1].

Как и в трехмерном случае, для решения задачи (3.3.1)-(3.3.2) справедливо соотношение:

$$\begin{aligned} u(M) = \oint\limits_L \left(G(P,M)f(P) - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dl_P + \\ + \int\limits_D G(Q,M)F(Q)dS_Q. \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Через $G(Q,M)$ обозначено фундаментальное решение оператора Лапласа в двумерном случае:

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MQ}} + v,$$

где v — гармоническая в области S функция.
В правой части (3.3.4) содержится слагаемое

$$\oint\limits_L u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}dl_P = \oint\limits_L u(P)\left(\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial n_P}\ln\frac{1}{r_{PM}} + \frac{\partial v}{\partial n_P} \right) dl_P, \tag{3.3.5}$$

значение которого неизвестно, поскольку на границе L задано лишь $\frac{\partial u}{\partial n}$, а значение $u(P)$ не задано.

Как и в трехмерном случае, подберем функцию v таким образом, чтобы выражение (3.3.5) было равно константе. Возьмем в качестве функции $v(Q, M)$ решение задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q v = 0, \quad Q \in D, \\ \left.\frac{\partial v}{\partial n_P}\right|_L = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM}} + C, \quad P \in L. \end{cases} \tag{3.3.6}$$

Константа C в краевом условии (3.3.6) выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие разрешимости (3.3.3), которое в данном случае приобретает вид:

$$\oint\limits_L \left(-\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM}} + C \right) dl_P = 0,$$

откуда получаем

$$C \cdot L_0 = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_L \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM}} dl_P, \tag{3.3.7}$$

где L_0 — длина кривой L.

Интеграл в правой части (3.3.7) можно вычислить, используя третью формулу Грина (A.3.3), записанную для функции $u \equiv 1$:

$$1 = -\frac{1}{2\pi} \oint\limits_L \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{PM}} dl_P.$$

Окончательно получаем

$$C = -\frac{1}{L_0}.$$

Определение 3.3.2 *Функцией Грина внутренней задачи Неймана для оператора Лапласа в двумерном случае будем называть функцию*

$$G(Q, M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{QM}} + v(Q, M), \quad Q \in \overline{D}, \quad M \in D,$$

удовлетворяющую условиям:

1) $v(Q, M)$ — гармоническая функция координат точки $Q \in D$, непрерывная на $\overline{D}$ для каждой точки $M \in D$;

2) $\left.\frac{\partial}{\partial n_P} G(P, M)\right|_{P \in L} = -\frac{1}{L_0}$ для каждой точки $M \in D$.

Функция Грина оператора Лапласа для внутренней задачи Неймана в двумерном случае представляет собой решение задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q, M \in D, \\ \dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\Big|_L = -\dfrac{1}{L_0}, \quad P \in L, \quad M \in D. \end{cases} \tag{3.3.8}$$

Функция Грина задачи Неймана определена с точностью до слагаемого, не зависящего от координат точки Q, но, вообще говоря, зависящего от координат точки M. Это слагаемое можно выбрать так, чтобы функция Грина была симметричной. Для этого достаточно выполнения дополнительного условия

$$\oint\limits_L G(P,M)dl_P = 0,$$

однозначно определяющего функцию Грина $G(Q,M)$ [1].

Решение задачи (3.3.1) можно записать в виде

$$u(M) = \oint\limits_L G(P,M)f(P)dl_P + \int\limits_D G(Q,M)F(Q)dS_Q + A_0, \tag{3.3.9}$$

где A_0 — произвольная постоянная.

§ 4. Внешние двумерные задачи Неймана

Пусть D_e — дополнение некоторой ограниченной области $\overline{D}$ с гладкой границей L до всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Внешняя задача Неймана для оператора Лапласа в двумерном случае имеет вид:

$$\Delta u = -F(M), \ \ M \in D_e, \tag{3.4.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_L = f(P), \ \ P \in L, \tag{3.4.2}$$

$$|u| < \infty, \tag{3.4.3}$$

где $\mathbf{n}$ – внешняя по отношению к области D_e нормаль к границе L.

Определение 3.4.1 *Будем называть классическим решением задачи (3.4.1)-(3.4.3) регулярную на бесконечности функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D_e, непрерывно дифференцируемую в области $\overline{D}_e$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (3.4.1) в области D_e и граничному условию (3.4.2).*

Если кривая L является кривой Ляпунова, функция $F(M)$ является финитной и непрерывно дифференцируемой, а функция $f(P)$ непрерывной, то задача (3.4.1)-(3.4.3) имеет классическое решение только при выполнении условия разрешимости

$$\oint_L f(P)dl_P = -\int_{D_e} F(M)dS_M. \tag{3.4.4}$$

Условие (3.4.4) получается из второй формулы Грина для неограниченной области D_e (см. (A.4.5)):

$$\int_{D_e} (v\Delta u - u\Delta v)\, dS = \oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dl,$$

записанной для решения u задачи (3.4.1) и регулярной на бесконечности в двумерном случае функции $v = 1$.

Замечание 3.4.1 *Провести подобные рассуждения в случае внешних трехмерных задач Неймана нельзя, так как формулы Грина во внешних областях справедливы только для регулярных на бесконечности функций, к которым функция $v \equiv 1$ в трехмерном случае не относится.*

Классическое решение внешней двумерной задачи Неймана не единственно, а определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Пусть условие (3.4.4) выполнено. Построим решение задачи (3.4.1)-(3.4.3) в интегральном виде. Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат O находилось внутри области D. Рассмотрим функцию

$$G(Q, M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QO}} + v_2, \tag{3.4.5}$$

где v_2 — гармоническая в области D_e регулярная на бесконечности функция. Функция $G(Q, M)$ представляет собой регулярное на бесконечности фундаментальное решение оператора Лапласа в двумерном случае, то есть

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q, M) = -\delta(Q, M), \quad Q, M \in D_e, \\ |G(Q, M)| < \infty \text{ при } r_{QM} \to \infty, \quad M \in D_e. \end{cases} \tag{3.4.6}$$

Предположим, что носитель функции $F(M)$ в задаче (3.4.1) принадлежит ограниченной области $D_0 \subset D_e \subset \mathbb{R}^2$. Тогда вне области D_0 решение $u(M)$ задачи (3.4.1) является гармонической функцией, и поэтому в любой точке $M \in D_e$ для него справедлива формула (2.5.6) §5 главы 2:

$$u(M) = \oint_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} G(P, M) - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P} G(P, M)\right\} dl_P -$$

$$- \int_{D_e} \Delta u(Q) G(Q, M) dS_Q.$$

Подставляя в последнее выражение правые части уравнения и краевого условия задачи (3.4.1)-(3.4.3), получаем

$$u(M) = \oint_L \left(f(P)G(P,M) - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dl_P + \\ + \int_{D_e} G(Q,M)F(Q)dS_Q. \tag{3.4.7}$$

Слагаемое
$$\oint_L u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} dl_P \tag{3.4.8}$$

в выражении (3.4.7) неизвестно. Поскольку решение внешней двумерной задачи Неймана для оператора Лапласа определяется с точностью до аддитивной постоянной, подберем функцию v_2 в выражении (3.4.5) для функции $G(Q,M)$ таким образом, чтобы это неизвестное слагаемое было равно константе. Если положить

$$\left.\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right|_L = C = const, \tag{3.4.9}$$

то интеграл (3.4.8) представляет собой константу. Постоянную C определим из условия разрешимости задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q, M \in D_e, \\ |G(Q,M)| < \infty \text{ при } r_{QM} \to \infty, \quad M \in D_e. \\ \left.\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right|_L = C, \end{cases} \tag{3.4.10}$$

которое принимает вид:
$$\oint_L C dl_P = -1. \tag{3.4.11}$$

Из равенства (3.4.11) получаем

$$C = -\frac{1}{L_0},$$

где L_0 — длина контура L.

Таким образом, для произвольной точки $M \in D_e$ имеем:

$$u(M) = \oint_L G(P,M)f(P)dl_P + \int_{D_e} G(Q,M)F(Q)dV_Q + A_0, \tag{3.4.12}$$

где A_0 — произвольная константа.

Определение 3.4.2 *Функцией Грина внешней задачи Неймана (3.4.1)-(3.4.3) для оператора Лапласа в двумерном случае будем называть функцию*

$$G(Q, M) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{QM}} + v(Q, M), \quad Q \in \overline{D_e}, \quad M \in D_e,$$

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q, M)$ — гармоническая функция координат точки $Q \in D_e$, непрерывная на $\overline{D_e}$ для каждой точки $M \in D_e$ и имеющая логарифмическую особенность на бесконечности;
2) $\left.\dfrac{\partial G(P, M)}{\partial n_P}\right|_{P \in L} = -\dfrac{1}{L_0}$ для каждой точки $M \in D_e$, где L_0 – длина кривой L;
3) $G(Q, M)$ регулярна на бесконечности.

Функция $G(Q, M)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q, M) = -\delta(Q, M), \;\; Q, M \in D_e, \\ \left.\dfrac{\partial G(P, M)}{\partial n_P}\right|_L = -\dfrac{1}{L_0}, \;\; P \in L, \quad M \in D_e, \\ |G(Q, M)| < \infty \text{ при } r_{QM} \to \infty, \quad M \in D_e. \end{cases} \tag{3.4.13}$$

Функция Грина $G(Q, M)$ определена с точностью до слагаемого, не зависящего от точки Q. Как и в случае внутренних двумерных задач, функция Грина будет симметрична относительно перестановки точек M и Q, если дополнительно потребовать выполнения условия

$$\oint_L G(P, M) dl_P = 0,$$

однозначно определяющего функцию Грина $G(Q, M)$.

§ 5. Методы решения задач Неймана

5.1. Метод зеркальных отображений.

Пример 3.5.1. *Найдите функцию Грина задачи Неймана в верхнем полупространстве.*

Решение. Функция Грина $G(M, M_0)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \quad x, y \in (-\infty, +\infty), \quad z \in (0, +\infty), \\ \left.\dfrac{\partial G(P, M_0)}{\partial n_P}\right|_{z=0} = 0, \quad x, y \in (-\infty, +\infty), \\ G(M, M_0) \text{ регулярна на бесконечности,} \end{cases} \tag{3.5.1}$$

где точка наблюдения M имеет координаты (x, y, z), а точка источника M_0 — координаты (x_0, y_0, z_0).

Пусть точка M_1 симметрична точке M_0 относительно плоскости $z = 0$. Функция

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}} + \frac{1}{r_{MM_1}}\right) =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right), \tag{3.5.2}$$

представляющая собой сумму фундаментального решения оператора Лапласа и гармонической функции $v = \dfrac{1}{4\pi r_{MM_1}}$, удовлетворяет уравнению (3.5.1) и граничному условию (3.5.1) и является регулярной на бесконечности. По определению функция $G(M, M_0)$ является функцией Грина задачи Неймана в верхнем полупространстве.

Замечание 3.5.1 *Поясним физический смысл построенной функции Грина на примере задачи о стационарном точечном источнике тепла. Пусть плоскость $z = 0$ является теплоизолированной, то есть поток тепла через нее отсутствует. Поместим точечный источник тепла в точку M_0 верхнего полупространства. Формально добиться равенства нулю потока тепла через границу можно, поместив в симметричную точку M_1 фиктивный источник тепла той же мощности.*

Пример 3.5.2. *Найдите распределение температуры от стационарного источника мощности q, расположенного в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ внутри слоя $0 < z < l$, считая, что плоскость $z = 0$ поддерживается при нулевой температуре, а плоскость $z = l$ не пропускает тепло.*

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ — точка наблюдения (рис. 3.5.1). Искомое распределение температуры $u(x, y, z)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u = -q \cdot \delta(M, M_0), \quad x, y \in (-\infty, +\infty), \ z \in (0, l), \\ u|_{z=0} = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=l} = 0, \end{cases} \tag{3.5.3}$$

и имеет вид $u = \dfrac{q}{r_{MM_0}} + v(M, M_0)$, где $v(M, M_0)$ — гармоническая функция M, зависящая от M_0 как от параметра.

Найдем функцию v, последовательно отображая точечный источник тепла в плоскостях $z = 0$ и $z = l$, так чтобы на каждом шаге точно

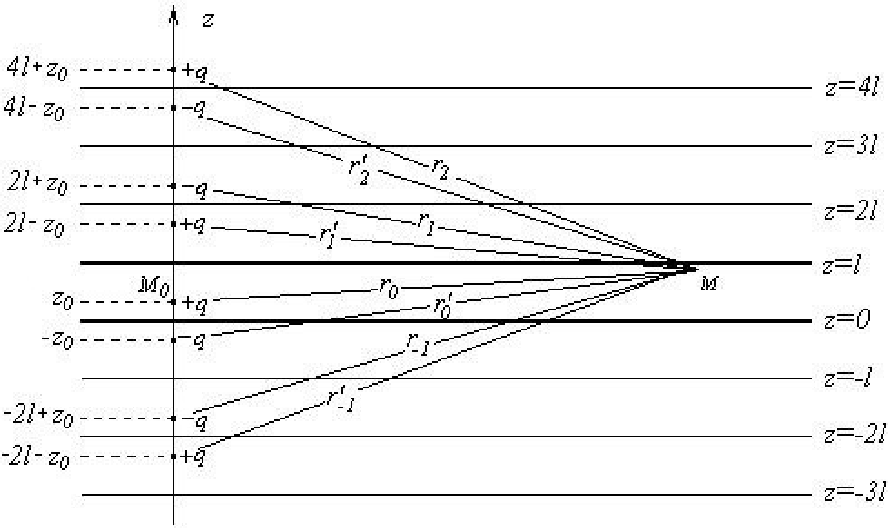

Рис. 3.5.1.

выполнялось краевое условие при $z = 0$ или $z = l$.

Шаг 1. Добиться выполнения условия Дирихле при $z = 0$ можно, добавляя симметрично относительно плоскости $z = 0$ фиктивный источник, мощность которого по модулю равна, но по знаку противоположна исходному. Будем далее называть его стоком тепла. Поскольку сток оказывается вне слоя $z \in [0, l]$, то функция

$$u_0 = q\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0'}\right),$$

где

$$r_0 = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}\,,$$

$$r_0' = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2}\,,$$

удовлетворяет уравнению (3.5.3) в области $x, y \in (-\infty, +\infty)$, $z \in (0, l)$ и граничному условию $u_0 = 0$ при $z = 0$. Однако условие $\dfrac{\partial u_0}{\partial z} = 0$ при $z = l$ не выполняется.

Шаг 2. Для того, чтобы добиться выполнения условия Неймана при $z = l$, достаточно отобразить источники (исходный в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и фиктивный в точке $M_0'(x_0, y_0, -z_0)$) симметрично относительно плоскости $z = l$, не меняя их знаки. В результате получаем систему из двух источников и двух стоков. Функция

$$u_1 = q\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0'}\right) - q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1'}\right),$$

где

$$r_1 = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2l+z_0))^2}\,,$$

$$r_1' = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2l-z_0))^2}\,,$$

удовлетворяет уравнению (3.5.3), граничному условию $\dfrac{\partial u_1}{\partial z} = 0$ при $z = l$, но не обращается в нуль при $z = 0$.

Последовательно повторяя отображения, так что при отражении относительно плоскости $z = 0$ знаки источников и стоков меняются на противоположные, а при отражении относительно плоскости $z = l$ остаются неизменными, получим решение в виде ряда

$$u = q \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_n'}\right), \tag{3.5.4}$$

где

$$r_n = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2ln+z_0))^2}\,,$$

$$r_n' = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-(2ln-z_0))^2}\,.$$

Абсолютная и равномерная сходимость ряда (3.5.4) доказывается также, как и в примере 2.3.5. Аналогично можно показать, что ряд (3.5.4) можно дважды дифференцировать. Граничные условия при $z = 0$ и $z = l$ также оказываются выполненными, так как на каждом шаге одно из граничных условий выполняется точно, а ошибка в другом граничном условии убывает как $\dfrac{1}{n^2}$.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 3.5.3. *Найдите распределение температуры в нижнем полупространстве, создаваемое точечным источником, помещенным в точку $(1, 2, -3)$, если плоскость $z = 0$ теплоизолирована.*

Задача 3.5.4. *Найдите распределение температуры в верхнем полупространстве $z > 0$, если поток тепла через плоскость $z = 0$ задается функцией $f(x, y)$, такой что $f(x, y) = \underline{\underline{O}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ при $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$.*

Задача 3.5.5. *Запишите формулу для распределения температуры в верхнем полупространстве $z > 0$, если в некоторой ограниченной области D верхнего полупространства распололожены источники тепла с плотностью $Q(M)$, а плоскость $z = 0$ теплоизолирована.*

Задача 3.5.6. *Найдите распределение температуры, создаваемое отрезком длины l бесконечно тонкой равномерно нагретой нити с линейной плотностью источников тепла q, помещенным над теп-*

лоизолированной плоскостью. Отрезок составляет с плоскостью угол α. Расстояние от плоскости до ближайшей к ней точки отрезка равно h.

Задача 3.5.7. *Найдите распределение температуры, создаваемое отрезком длины l бесконечно тонкой равномерно нагретой нити с линейной плотностью источников тепла q, помещенным над теплоизолированной плоскостью. Отрезок расположен параллельно плоскости на расстоянии h от нее.*

Задача 3.5.8. *Найдите распределение температуры, создаваемое отрезком длины l бесконечно тонкой равномерно нагретой нити с линейной плотностью источников тепла q, помещенным над теплоизолированной плоскостью. Отрезок расположен перпендикулярно плоскости. Расстояние от плоскости до ближайшей к ней точки отрезка равно h.*

Задача 3.5.9. *Найдите распределение температуры от стационарного источника мощности q, расположенного в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ внутри слоя $0 < z < l$, считая, что плоскости $z = 0$ и $z = l$ не пропускают тепло.*

Задача 3.5.10. *Найдите распределение температуры, создаваемое точечным источником, помещенным внутри двугранного угла величины $\frac{\pi}{2}$ в точке M_0, если одна грань угла $\psi = 0$ поддерживается при нулевой температуре, а вторая его грань $\psi = \frac{\pi}{2}$ теплоизолирована. Угловая координата точки M_0 равна $\frac{\pi}{8}$, радиальная координата равна r_0.*

Задача 3.5.11. *Найдите распределение температуры в области $y > 0$, $z > 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$, создаваемое источниками, расположенными с линейной плотностью q вдоль отрезка длины l. Концы отрезка имеют координаты (x_0, y_0, z_0), $(x_0, y_0 + l, z_0)$, $x_0, y_0, z_0 > 0$. Граница $z = 0$ поддерживается при нулевой температуре, а граница $y = 0$ теплоизолирована.*

5.2. Метод разделения переменных.

Пример 3.5.12. *Найдите функцию Грина внутренней задачи Неймана для шара радиуса a.*

Решение. Для того, чтобы построить функцию Грина $G(M, M_0)$, прежде всего выберем систему координат, в которой будет наиболее удобно решать задачу. Направим ось Oz, от которой отсчитывается угол θ сферической системы координат, так, чтобы она проходила через точку источника M_0. Тогда точки M и M_0 будут иметь координаты

$$M(r, \theta, \psi) \text{ и } M_0(r_0, 0, 0),$$

а расстояние между ними

$$r_{_{MM_0}} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}\,.$$

Функция Грина представима в виде:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}} + v,$$

где v есть решение следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad r \in (0, a), \quad \theta \in (0, \pi), \quad \psi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} = -\dfrac{1}{4\pi a^2} - \left.\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{\partial}{\partial r}\dfrac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}}\right|_{r=a}, \\ |v|_{r=0} < \infty. \end{cases} \tag{3.5.5}$$

Заметим, что решение задачи (3.5.5) не зависит от угла ψ и может быть записано в виде [2]:

$$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{r^n}{na^{n-1}} P_n(\cos\theta). \tag{3.5.6}$$

Разложим выражение

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}} \tag{3.5.7}$$

в граничном условии задачи в ряд Фурье по полиномам Лежандра. Поскольку $r_0 < a$, а выражение (3.5.7) нам нужно при $r = a$, то, не ограничивая общности, его можно сначала получить для $r_0 < r \leqslant a$. Рассмотрим

$$\frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}} = \frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1 + (r_0/r)^2 - 2(r_0/r)\cos\theta}} =$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n P_n(\cos\theta).$$

Здесь мы воспользовались формулой для производящей функции полиномов Лежандра и тем, что $\dfrac{r_0}{r} < 1$. Итак, выражение в правой части граничного условия можно записать в виде

$$-\frac{1}{4\pi a^2} - \left.\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta}}\right|_{r=a} =$$
$$= -\frac{1}{4\pi a^2} + \frac{1}{4\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r_0^n(n+1)}{a^{n+2}}P_n(\cos\theta) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_0^n(n+1)}{a^{n+2}}P_n(\cos\theta).$$

Подставляя выражение (3.5.6) в граничное условие, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n P_n(\cos\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_0^n (n+1)}{a^{n+2}} P_n(\cos\theta),$$

откуда находим

$$A_n = \frac{1}{4\pi a^2}(n+1)\left(\frac{r_0}{a}\right)^n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, функция v имеет вид:

$$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi a} \frac{n+1}{n} \left(\frac{r_0 r}{a^2}\right)^n P_n(\cos\theta) =$$
$$= A_0 + \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0 r}{a^2}\right)^n P_n(\cos\theta) + \frac{1}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0 r}{a^2}\right)^n P_n(\cos\theta),$$

где A_0 — произвольная постоянная. Введем обозначение $r_1 = a^2/r_0$ и просуммируем первый из рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0 r}{a^2}\right)^n P_n(\cos\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos\theta) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - 2\dfrac{r}{r_1}\cos\theta + \left(\dfrac{r}{r_1}\right)^2}} - 1 =$$

$$= \frac{a^2}{r_0} \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r^2 - 2rr_1\cos\theta}} - 1 = \frac{a^2}{r_0} \frac{1}{r_{MM_1}} - 1,$$

где $M_1(r_1, 0, 0)$ — точка, сопряженная точке M_0 относительно сферы, то есть точка, лежащая на луче OM_0, такая что $r_1 \cdot r_0 = a^2$.

Используя формулу (Б.0.9) приложения, просуммируем второй ряд в выражении для функции v:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_0 r}{a^2}\right)^n P_n(\cos\theta) =$$

$$= -\ln\frac{1}{2}\left\{1 - \frac{r_0 r}{a^2}\cos\theta + \sqrt{1 - 2\frac{r}{r_1}\cos\theta + \frac{r^2}{r_1^2}}\right\} =$$

$$= -\ln\frac{1}{2}\left\{1 - \frac{r_0 r}{a^2}\cos\theta + \frac{r_0}{a^2} r_{MM_1}\right\} = \ln\frac{2a^2}{a^2 - rr_0\cos\theta + r_0 r_{MM_1}}.$$

Следовательно, в выбранной системе координат функция Грина внутренней задачи Неймана для шара имеет вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{_{MM_0}}} + \frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{_{MM_1}}} + \frac{1}{a}\ln\frac{2a^2}{a^2 - rr_0\cos\theta + r_0 r_{_{MM_1}}}\right) + A,$$

где A — произвольная постоянная.

Если система координат ориентирована произвольным образом, то точки M и M_0 имеют координаты

$$M(r, \theta, \psi) \text{ и } M_0(r_0, \theta_0, \psi_0),$$

а функция Грина имеет вид

$$\begin{aligned} G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\Bigg(&\frac{1}{r_{_{MM_0}}} + \frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{_{MM_1}}} + \\ &+\frac{1}{a}\ln\frac{2a^2}{a^2 - rr_0\cos\gamma + r_0 r_{_{MM_1}}}\Bigg) + A(M_0), \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

где $M_1(a^2/r_0, \theta_0, \psi_0)$ — точка, сопряженная относительно сферы радиуса a точке M_0, γ — угол между лучами OM и OM_0,

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\psi - \psi_0),$$

а $A(M_0)$ — произвольная функция точки M_0, не зависящая от точки M.

Пример 3.5.13. *С помощью найденной в предыдущем примере функции Грина постройте решение краевой задачи Неймана*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \in (0, a), \quad \theta \in (0, \pi), \quad \psi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\theta, \psi), \\ |u|_{r=0} < +\infty \end{cases}$$

в шаре радиуса a, если выполнено условие

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(\theta, \psi)\sin\theta d\theta d\psi = 0.$$

Решение. С помощью функции Грина (3.5.8) решение задачи в произвольной точке $M_0(r_0, \theta_0, \psi_0)$, принадлежащей рассматриваемому шару, может быть записано в виде:

$$u(r_0, \theta_0, \psi_0) = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} G(a, \theta, \psi; r_0, \theta_0, \psi_0) f(\theta, \psi) a^2 \sin\theta d\theta d\varphi + C,$$

где C — произвольная константа. Поскольку для любой точки P на поверхности шара

$$r_{PM_1} = \frac{a}{r_0} r_{PM_0}$$

где

$$r_{PM_0} = \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\gamma}\,,$$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\psi - \psi_0),$$

M_0 и M_1 — точки, сопряженные относительно сферы радиуса a (см. пример 2.3.7.), то

$$G(P, M_0)|_{r=a} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{r_{PM_0}} + \frac{1}{a}\ln\frac{2a^2}{a^2 - ar_0\cos\gamma + r_0 r_{PM_1}}\right) + A(M_0) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{r_{PM_0}} + \frac{1}{a}\ln\frac{2a}{a - r_0\cos\gamma + r_{PM_0}}\right) + A(M_0) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{2}{r_{PM_0}} - \frac{1}{a}\ln\left(a - r_0\cos\gamma + r_{PM_0}\right)\right) + \widetilde{A}(M_0).$$

Таким образом, решение задачи можно записать в виде:

$$u(r_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{a^2}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{2}{\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\gamma}} - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{a}\ln\left(a - r_0\cos\gamma + \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\gamma}\right)\right) f(\theta, \psi)\sin\theta d\theta d\psi + C.$$

Полученная формула называется формулой Неймана.

Пример 3.5.14. *Найдите функцию Грина внутренней задачи Неймана для круга.*

Решение. Искомая функция Грина является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_M G(M, M_0) = -\delta(M, M_0), \quad r \in (0, a), \quad \psi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=a} = -\dfrac{1}{2\pi a} \end{cases} \tag{3.5.9}$$

и имеет вид:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{MM_0}} + v(M, M_0),$$

где

$$\begin{cases} \Delta_M v = 0, \quad r \in (0, a), \quad \psi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} = -\dfrac{1}{2\pi a} - \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial r}\ln\left.\dfrac{1}{r_{MM_0}}\right|_{r=a}, \\ |v|_{r=0} < \infty. \end{cases} \tag{3.5.10}$$

Выберем систему координат таким образом, чтобы точка M_0 лежала на полярной оси. Тогда

$$r_{_{MM_0}} = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi}\,,$$

$$-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi}} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial r}\ln\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{r - r_0\cos\psi}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\psi}.$$

Таким образом, гармоническая функция v должна удовлетворять граничному условию:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{a - r_0\cos\psi}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0\cos\psi} - \frac{1}{2\pi a}, \quad r_0 < a.$$

На основании метода разделения переменных получаем [2]:

$$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{na^{n-1}}\left(A_n\cos n\psi + B_n\sin n\psi\right).$$

Неизвестные коэффициенты A_n и B_n найдем из граничного условия задачи (3.5.10):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\psi + B_n\sin n\psi\right) = \frac{1}{2\pi a}\left(\frac{1 - (r_0/a)\cos\psi}{1 + (r_0/a)^2 - 2(r_0/a)\cos\psi} - 1\right). \tag{3.5.11}$$

Выражение в правой части этого равенства можно разложить в ряд по системе тригонометрических функций, если воспользоваться следующими соотношениями:

$$\sum_{n=0}^{\infty}t^n e^{in\psi} = \frac{1}{1 - te^{i\psi}} = \frac{1 - te^{-i\psi}}{1 + t^2 - 2t\cos\psi}. \tag{3.5.12}$$

Рассмотрим действительную часть этого равенства, положив $t = r_0/a$:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_0}{a}\right)^n\cos n\psi = \frac{1 - (r_0/a)\cos\psi}{1 + (r_0/a)^2 - 2(r_0/a)\cos\psi}. \tag{3.5.13}$$

Используя (3.5.13), мы можем записать граничные условия (3.5.11) в виде:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos n\psi + B_n\sin n\psi\right) = \frac{1}{2\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_0}{a}\right)^n\cos n\psi.$$

Сравнивая правую и левую части этого равенства, находим
$$A_n = \frac{1}{2\pi a}\left(\frac{r_0}{a}\right)^n, \quad B_n = 0.$$
Следовательно
$$v = A_0 + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(r_0 r)^n}{n a^{2n}}\cos n\psi. \tag{3.5.14}$$
Полученный ряд можно просуммировать. Для этого возьмем $t = \dfrac{r_0 r}{a^2}$ и рассмотрим мнимую часть равенства (3.5.12):
$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n \sin n\psi = \frac{t\sin\psi}{1 + t^2 - 2t\cos\psi},$$
откуда в результате интегрирования по ψ получаем
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n\cos n\psi}{n} = \int \frac{t\sin\psi}{1+t^2-2t\cos\psi}d\psi = \frac{1}{2}\ln\left(1+t^2-2t\cos\psi\right) + C.$$
Положив $t = 0$, находим постоянную интегрирования $C = 0$, и окончательно получаем:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n\cos n\psi}{n} = -\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2-2t\cos\psi\right) = \ln\frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\cos\psi}}. \tag{3.5.15}$$
Таким образом, искомую функцию v в (3.5.14), взяв в (3.5.15) $t = \dfrac{r_0 r}{a^2}$, можно записать в следующем виде:
$$v = A_0 + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{r_0 r}{a^2}\right)^2 - 2\dfrac{r_0 r}{a^2}\cos\psi}} =$$
$$= A_0 + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{a^2}{r_0}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{a^4}{r_0^2} + r^2 - 2\dfrac{ra^2}{r_0}\cos\psi}}.$$
Обозначим $r_1 = a^2/r_0$ расстояние от начала координат до точки $M_1(r_1, 0)$, сопряженной точке $M_0(r_0, 0)$ относительно круга. Тогда
$$v = A_0 + \frac{1}{2\pi}\ln a + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{a}{r_0\cdot r_{MM_1}}.$$
Так как $\dfrac{1}{2\pi}\ln a$ — константа, то ее можно объединить с A_0, и записать функцию Грина в виде:
$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left(\ln\frac{1}{r_{MM_0}} + \ln\frac{a}{r_0}\frac{1}{r_{MM_1}}\right) + A_0.$$

Пример 3.5.15. *Найдите функцию Грина задачи Неймана вне круга радиуса a.*

Решение. Введем полярные координаты и для удобства направим полярную ось так, чтобы ей принадлежала точка источника M_0. Тогда M_0 и точка наблюдения M имеют координаты $M_0(r_0, 0)$ и $M(r, \psi)$, и функция Грина имеет вид:

$$G(r, \psi; r_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos\psi}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + v(r, \psi),$$

где

$$\begin{cases} \Delta v = 0, \quad r > a, \psi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} = -\dfrac{1}{2\pi} \dfrac{\partial}{\partial r} \ln \left.\dfrac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos\psi}}\right|_{r=a} + \\ + \dfrac{1}{2\pi} \dfrac{d}{dr} \ln \left.\dfrac{1}{r}\right|_{r=a} + \dfrac{1}{2\pi a}, \\ |v| < \infty. \end{cases} \tag{3.5.16}$$

Преобразуем выражение в правой части граничного условия. Так как $r_0 > a$, а выражение

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos\psi}}$$

в граничном условии нас интересует при $r = a$, то, не ограничивая общности, можно сначала рассмотреть это выражение при $a \leqslant r < r_0$, а потом положить r равным a. При $r < r_0$

$$\ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos\psi}} = \ln \frac{1}{r_0} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 2\frac{r}{r_0} \cos\psi\right) =$$

$$= \ln \frac{1}{r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \frac{\cos n\psi}{n}.$$

Таким образом, функция v должна удовлетворять условию

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=a} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{r_0^n} \cos n\psi.$$

Следовательно, общее решение задачи (3.5.16) можно искать в виде

$$v = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{r^n} \cos n\psi.$$

Найдем коэффициенты A_n из граничного условия:

$$A_n = \frac{a^{2n}}{2\pi n r_0^n}, \quad n = 1, 2, ...$$

Коэффициент A_0 остается неопределенным. Итак, функция v имеет вид:

$$v = A_0 + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^2}{rr_0}\right)^n \frac{\cos n\psi}{n} = A_0 + \frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r_1}{r}\right)^n \frac{\cos n\psi}{n} =$$

$$= A_0 + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\psi}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}, \quad r_1 = \frac{a^2}{r_0}.$$

Обозначим $M_1(r_1, 0)$ точку, сопряженную точке M_0 относительно окружности радиуса a с центром в начале координат. Тогда

$$v = A_0 + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{_{MM_1}}} - \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{_{MO}}}.$$

Следовательно, функция Грина задачи Неймана для оператора Лапласа вне круга радиуса a имеет вид

$$G(M, M_0) = A_0 + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{_{MM_0}}} + \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{_{MM_1}}} - \frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{r_{_{MO}}}.$$

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 3.5.16. *Найдите распределение температуры в пространстве, создаваемого точечным источником мощности q, помещенным в точку M_0 вне теплоизолированного шара радиуса R.*

Задача 3.5.17. *Постройте функцию Грина оператора Лапласа в шаровом слое $a < r < b$, если на границе $r = a$ задано условие Дирихле, а на границе $r = b$ задано условие Неймана.*

Задача 3.5.18. *Постройте функцию Грина оператора Лапласа в кольце $a < r < b$, если на границе $r = a$ задано условие Неймана, а на границе $r = b$ задано условие Дирихле.*

Задача 3.5.19. *Найдите функцию Грина задачи Неймана для оператора Лапласа вне шара радиуса a.*

Задача 3.5.20. *С помощью функции Грина вне шара запишите решение задачи Неймана:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > a, \quad \theta \in (0, \pi), \varphi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\theta, \varphi), \\ u \rightrightarrows 0, \ r \to \infty \end{cases}$$

в квадратурах.

Задача 3.5.21. *С помощью функции Грина для круга запишите решение задачи Неймана:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r \in (0, a), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi), \\ |u|\big|_{r=0} < \infty \end{cases}$$

в квадратурах.

Задача 3.5.22. *С помощью функции Грина вне круга запишите решение задачи Неймана:*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > a, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a} = f(\varphi), \\ |u| < \infty \end{cases}$$

в квадратурах.

Задача 3.5.23. *Найдите распределение температуры, создаваемое бесконечной цилиндрической поверхностью кругового сечения, поток тепла через которую равен*

$$V = \frac{\sin\psi - \cos\psi}{(2 + \cos\psi + \sin\psi)^2}.$$

Совет. Воспользуйтесь функцией Грина для круга. Проинтегрируйте по частям полученное выражение, а затем используйте замену переменных $z = e^{i\psi}$. При этом интеграл по отрезку $[0, 2\pi]$ перейдет в интеграл по единичной окружности $|z| = 1$. Для вычисления последнего интеграла воспользуйтесь теорией вычетов.

5.3. Разложение функции Грина по собственным функциям.

Получим разложение функции Грина $G(Q, M)$ задачи Неймана для оператора Лапласа в ограниченной области D трехмерного или двумерного пространства с замкнутой границей S в ряд по собственным функциям соответствующей задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \Delta v_k = -\lambda_k v_k, \quad M \in D, \\ \left.\dfrac{\partial v_k}{\partial n}\right|_S = 0. \end{cases} \tag{3.5.17}$$

Задача (3.5.17), как известно [14, 15], равносильна интегральному уравнению

$$v_k(M) = \lambda_k \int\limits_D G(Q, M) v_k(Q) dV_Q + \frac{1}{S_0} \int\limits_S v_k(P) dS_P. \tag{3.5.18}$$

Система $\{v_n\}_0^\infty$ собственных функций задачи (3.5.17) является полной ортогональной системой в пространстве $L_2(D)$. Далее будем считать, что система собственных функций нормирована на единицу. Заметим, что задача (3.5.17) имеет нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$, которому соответствует нормированная собственная функция $v_0 = \dfrac{1}{\sqrt{V_0}}$, где V_0 — объем области D.

Согласно теореме (2.3.1), поскольку $\|G(Q, M)\| < \infty$ (см. параграфы 3.2 и 6.2 главы 2), для любой функции $f \in L_2(D)$ справедливо равенство

$$\int\limits_D G(Q, M) f(Q) dV_Q = \int\limits_D \sum_{n,k=0}^{\infty} g_{nk} v_n(M) v_k(Q) f(Q) dV_Q, \tag{3.5.19}$$

где

$$g_{nk} = \int\limits_D \int\limits_D G(Q', M') v_n(M') v_k(Q') dV_{Q'} dV_{M'}.$$

Равенство (3.5.19) понимается в смысле равенства двух элементов пространства $L_2(D)$.

Упростим выражения для коэффициентов g_{nk}, пользуясь ортогональностью собственных функций и равенством (3.5.18). Если $k \neq 0$, то

$$\int\limits_D G(Q', M') v_k(Q') dV_{Q'} = \frac{1}{\lambda_k} v_k(M') - \frac{1}{S_0 \lambda_k} \oint\limits_S v_k(P) dS_P.$$

Следовательно, при $k \neq 0$

$$g_{nk} = \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_D v_k(M') v_n(M') dV_{M'} - \frac{1}{S_0 \lambda_k} \int\limits_D v_n(M') dV_{M'} \oint\limits_S v_k(P) dS_P.$$

В силу ортогональности собственных функций получаем

$$g_{nk} = \frac{1}{\lambda_k} \delta_{nk}, \quad n \neq 0;$$
$$g_{0k} = -\frac{\sqrt{V_0}}{S_0 \lambda_k} \oint\limits_S v_k(P) dS_P.$$

Если же $k = 0$, то

$$\int\limits_D G(Q', M') v_0(Q') dV_{Q'} = \frac{1}{\sqrt{V_0}} \int\limits_D G(Q', M') dV_{Q'}.$$

Следовательно,

$$g_{n0} = \frac{1}{\sqrt{V_0}} \int\limits_D \int\limits_D G(Q', M') v_n(M') dV_{Q'} dV_{M'}.$$

Если $n \neq 0$, то из (3.5.18) получаем

$$g_{n0} = \frac{1}{\sqrt{V_0}\,\lambda_n} \int\limits_D v_n(Q')dV_{Q'} - \frac{1}{\sqrt{V_0}\,\lambda_n S_0} \int\limits_D \oint\limits_S v_n(P)dS_P dV_{Q'} =$$

$$= -\frac{\sqrt{V_0}}{S_0\lambda_n} \oint\limits_S v_n(P)dS_P.$$

При $n = 0$

$$g_{00} = \frac{1}{V_0} \int\limits_D \int\limits_D G(Q', M')dV_{Q'}dV_{M'} = const.$$

Подставляя найденные значения для коэффициентов g_{nk} в равенство (3.5.19), находим

$$\int\limits_D G(Q, M)f(Q)dV_Q = \int\limits_D \left\{ \frac{1}{V_0^2} \int\limits_D \int\limits_D G(Q', M')dV_{Q'}dV_{M'} + \right.$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)v_n(Q)}{\lambda_n} - \frac{\sqrt{V_0}}{S_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(Q)}{\lambda_k \sqrt{V_0}} \oint\limits_S v_k(P)dS_P -$$

$$\left. - \frac{\sqrt{V_0}}{S_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)}{\lambda_n \sqrt{V_0}} \oint\limits_S v_n(P)dS_P \right\} f(Q)dV_Q.$$

Итак, окончательно получаем

$$G(Q, M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)v_n(Q)}{\lambda_n} - \frac{1}{S_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M) + v_n(Q)}{\lambda_n} \oint\limits_S v_n(P)dS_P + C, \tag{3.5.20}$$

где C — произвольная постоянная. Ряд (3.5.20) сходится по норме пространства $L_2(D \times D)$. Равенство (3.5.20) следует понимать как равенство двух элементов пространства $L_2(D \times D)$.

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Delta u = -F(M), & M \in D, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(P), & P \in S. \end{cases} \tag{3.5.21}$$

Напомним, что условие ее разрешимости имеет вид

$$-\int\limits_D F(M)dV_M = \oint f(P)dS_P.$$

Покажем, что в интегральном выражении для решения этой задачи основную роль играет только первое слагаемое

$$\widehat{G}(Q, M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(Q)v_n(M)}{\lambda_n} \tag{3.5.22}$$

функции Грина (3.5.20), а остальные слагаемые после преобразования дадут аддитивную постоянную. В самом деле, подставляя функцию Грина (3.5.20) в выражение

$$u(M) = \oint_S G(P', M)f(P')dS_{P'} + \int_D G(Q, M)F(Q)dV_Q + A_0,$$

получаем

$$\begin{aligned}u(M) = \oint_S f(P') \Bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(P')v_n(M)}{\lambda_n} - \\ - \frac{1}{S_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(v_n(P') + v_n(M)\big)}{\lambda_n} \oint_S v_n(P)dS_P + C \Bigg\} dS_{P'} + \\ + \int_D F(Q) \Bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(Q)v_n(M)}{\lambda_n} - \\ - \frac{1}{S_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(v_n(Q) + v_n(M))}{\lambda_n} \oint_S v_n(P)dS_P + C \Bigg\} dV_Q + A_0.\end{aligned}$$

В последнем равенстве

$$\begin{aligned}\frac{1}{S_0} \oint_S f(P') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(P')}{\lambda_n} \oint_S v_n(P)dS_P dS_{P'} + \\ + \frac{1}{S_0} \int_D F(Q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(Q)}{\lambda_n} \oint_S v_n(P)dS_P dV_Q = const,\end{aligned}$$

а в силу условий разрешимости

$$\begin{aligned}\frac{1}{S_0} \oint_S f(P') \Bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)}{\lambda_n} \oint_S v_n(P)dS_P \Bigg\} dS_{P'} + \\ + \frac{1}{S_0} \int_D F(Q) \Bigg\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_n(M)}{\lambda_n} \oint_S v_n(P)dS_P \Bigg\} dV_Q =\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{S_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v_n(M)}{\lambda_n}\oint\limits_S v_n(P)dS_P \underbrace{\left(\oint\limits_S f(P')dP' + \int\limits_D F(Q)dV_Q\right)}_{=0} = 0.$$

Итак, для решения задачи (3.5.21) получаем выражение

$$u(M) = \oint\limits_S f(P')\widehat{G}(P',M)dS_{P'} + \int\limits_D F(Q)\widehat{G}(Q,M)dV_Q + \widetilde{A}_0. \tag{3.5.23}$$

Пример 3.5.24. *Решите краевую задачу Неймана для уравнения Лапласа в прямоугольнике*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \quad x\in(0,a),\ y\in(0,b),\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = a,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = b, \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=b} = 0. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулой (3.5.23). Для этого прежде всего найдем $\widehat{G}(M,M_0)$, где точка M имеет координаты (x,y), а точка M_0 координаты (x',y'). Для прямоугольника получаем:

$$\widehat{G}(x,y;x',y') = \frac{2}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi m x}{a}\cos\frac{\pi m x'}{a}}{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2} + \frac{2}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n y}{b}\cos\frac{\pi n y'}{b}}{\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2} +$$
$$+\frac{4}{ab}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi m x}{a}\cos\frac{\pi n y}{b}\cos\frac{\pi m x'}{a}\cos\frac{\pi n y'}{b}}{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2+\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}.$$

Границей области D в данном случае являются четыре отрезка прямых, на двух из которых заданы нулевые граничные условия. Подставляя $\widehat{G}(x,y;x',y')$ в формулу (3.5.23) и учитывая, что $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=0} = -\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}$, получим

$$u(x,y) = -\int\limits_0^a b\widehat{G}(x,y;x',0)dx' + \int\limits_0^b a\widehat{G}(x,y;a,y')dy' + A_0 =$$

$$= -b\cdot\frac{2}{ab}\int\limits_0^a\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n y}{b}}{\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}dx' + a\cdot\frac{2}{ab}\int\limits_0^b\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\cos\frac{\pi m x}{a}}{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2}dy' + A_0 =$$

$$= -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n y}{b}}{\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2} + 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\cos\frac{\pi m x}{a}}{\left(\frac{\pi m}{a}\right)^2} + A_0$$

В прямоугольнике $x \in [\delta_1, a]$, $y \in [\delta_2, b]$, где $0 < \delta_1 < a$, $0 < \delta_2 < b$ — произвольные числа, полученные ряды можно просуммировать. [1]) В результате получаем

$$u(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + by + A_0.$$

Полученная функция непрерывно примыкает к граничным условиям задачи.

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 3.5.25. *Постройте функцию Грина задачи Неймана в круговом секторе радиуса a раствора α.*

Задача 3.5.26. *Постройте функцию Грина задачи Неймана в круговом цилиндре радиуса a высоты h.*

---

[1]) Покажем, как вычисляется сумма ряда

$$I(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi n y}{b}}{\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}. \tag{3.5.24}$$

Выберем произвольное $\delta > 0$. Рассмотрим ряд

$$I'(y) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi n y}{b}}{\left(\frac{\pi n}{b}\right)} \tag{3.5.25}$$

на отрезке $y \in [\delta; b]$, где он сходится равномерно [19]. Он получается формальным почленным дифференцированием ряда (3.5.24). Из равномерной сходимости следует, что его можно интегрировать почленно:

$$I(y) = \int I'(y)dy,\ \ y \in [\delta; b].$$

Просуммируем ряд (3.5.25):

$$I'(y) = -\frac{b}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi n y}{b}}}{n} = \frac{b}{\pi}\mathrm{Im}\ln\left(1 - e^{\frac{i\pi y}{b}}\right) =$$

$$= \frac{b}{\pi}\mathrm{Im}\left(\ln\left|1 - e^{\frac{i\pi y}{b}}\right| + i\arg\left(1 - e^{\frac{i\pi y}{b}}\right)\right) = -\frac{b}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sin\frac{\pi y}{b}}{1-\cos\frac{\pi y}{b}} =$$

$$= -\frac{b}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\cos\frac{\pi y}{2b}}{\sin\frac{\pi y}{2b}} = -\frac{b}{\pi}\,\mathrm{arctg}\left(\mathrm{ctg}\frac{\pi y}{2b}\right) = -\frac{b}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi y}{2b}\right) = \frac{1}{2}(y - b).$$

Следовательно

$$I(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - by\right) + const$$

Задача 3.5.27. *Постройте в интегральном виде решение задачи*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ r \in (0, a), \ \varphi \in (0, \alpha), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi=0} = f(r), \ r \in [0, a], \\ u|_{\varphi=\alpha} = u|_{r=a} = 0, \\ |u||_{r=0} < \infty. \end{cases}$$

Задача 3.5.28. *Постройте решение задачи*

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \ (x, y) \in D, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{L} = f(x, y), \ (x, y) \in L, \\ |u||_{x=0,\, y=0} < \infty, \end{cases}$$

где область D имеет вид $y > 0$, $x^2 + y^2 < a^2$, L — граница области D, а $f(x, y) = x^3 - a^2 x$ при $y = 0$ и $f(x, y) = 0$ при $x^2 + y^2 = a^2$.

Глава 4

ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА

§ 1. Внутренние задачи

Пусть D — конечная область, ограниченная достаточно гладкой замкнутой поверхностью S (например, поверхностью Ляпунова) в трехмерном случае или достаточно гладкой замкнутой кривой L (например, кривой Ляпунова) в двумерном случае. Рассмотрим задачу с граничными условиями третьего рода, также иногда называемыми в литературе условиями Робена, для уравнения Пуассона в области D:

$$\Delta u = -F(M), \quad M \in D, \tag{4.1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu\Big|_P = f(P), \quad P \in S, \quad (P \in L), \quad h > 0, \tag{4.1.2}$$

где $\mathbf{n}$ — единичная внешняя по отношению к области D нормаль к поверхности S (кривой L).

Определение 4.1.1 *Будем называть классическим решением задачи (4.1.1-4.1.2) функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D, непрерывно дифференцируемую в области $\overline{D}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (4.1.1) в области D и граничному условию (4.1.2).*

Если функция $F(M)$ является непрерывной в области $\overline{D}$ и непрерывно дифференцируемой в области D, а функция $f(P)$ является непрерывной на границе S (либо L в двумерном случае) области D, то задача (4.1.1-4.1.2) имеет единственное классическое решение $u(M)$ [5].

Решение задачи (4.1.1-4.1.2), как и в случае рассмотренных ранее задач с условиями Дирихле и Неймана, в трехмерном случае удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} u(M) = \int\limits_S \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P}\right) dS_P - \\ - \int\limits_D G(Q,M)\Delta u(Q) dV_Q, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

где

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{r_{QM}} + v, \quad \Delta_Q v = 0, \quad Q \in D,$$

а в двумерном случае равенству

$$u(M) = \int\limits_L \left(G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} \right) dl_P - \\ - \int\limits_D G(Q,M)\Delta u(Q) dS_Q, \tag{4.1.4}$$

где

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} + v, \quad \Delta_Q v = 0, \quad Q \in D.$$

Выберем гармоническую функцию v так, чтобы функция $G(Q,M)$ удовлетворяла граничному условию

$$\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} + hG(P,M) = 0, \quad P \in S \ (P \in L).$$

При этом справедливо равенство

$$G(P,M)\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} = \\ = G(P,M)\left(\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} + hu(P)\right) = G(M,P)f(P), \quad P \in S \ (P \in L). \tag{4.1.5}$$

Учитывая равенство (4.1.5) и подставляя в (4.1.3) значение $\Delta u(Q) = -F(Q)$, получаем

$$u(M) = \int\limits_S G(P,M)f(P)dS_P + \int\limits_D G(Q,M)F(Q)dV_Q \tag{4.1.6}$$

в трехмерном случае, и

$$u(M) = \int\limits_L G(P,M)f(P)dl_P + \int\limits_D G(Q,M)F(Q)dS_Q \tag{4.1.7}$$

в двумерном.

Определение 4.1.2 *Функцией Грина внутренней задачи Робена для оператора Лапласа будем называть функцию*

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q,M), \ Q \in \overline{D}, \ M \in D,$$

в трехмерном случае,

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} + v(Q,M), \ Q \in \overline{D}, \ M \in D,$$

в двумерном случае,

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q,M)$ — гармоническая функция координат точки $Q \in D$,

непрерывно дифференцируема на $\overline{D}$ для каждой точки $M \in D$;
2) $\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} + hG(P,M) = 0$ для каждой точки $M \in D$, где $P \in S$ в трехмерном случае и $P \in L$ в двумерном.

Из определения функции Грина $G(Q,M)$ следует, что она является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q,\ M \in D, \\ \dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} + hG(P,M) = 0, \quad P \in S\ (P \in L),\ M \in D. \end{cases} \tag{4.1.8}$$

Если граница S области D является поверхностью Ляпунова (L является кривой Ляпунова), то функция Грина задачи Дирихле существует и единственна [5].

Функция Грина симметрична относительно перестановки точек Q и M:

$$G(Q,M) = G(M,Q).$$

§ 2. Внешние задачи

Пусть D_e — область, внешняя по отношению к конечной области D, ограниченной достаточно гладкой поверхностью S (кривой L). Рассмотрим внешнюю краевую задачу

$$\Delta u = -F(M), \quad M \in D_e, \tag{4.2.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + hu\Big|_P = f(P), \quad P \in S \ \ (P \in L), \quad h > 0, \tag{4.2.2}$$

u регулярна на бесконечности, (4.2.3)

где $\mathbf{n}$ — единичная внешняя по отношению к области D_e нормаль к поверхности S (кривой L).

Определение 4.2.1 *Будем называть классическим решением задачи (4.2.1-4.2.3) регулярную на бесконечности функцию $u(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую в области D_e и один раз непрерывно дифференцируемую в области $\overline{D_e}$, удовлетворяющую в классическом смысле уравнению (4.2.1) в области D_e и граничному условию (4.2.2).*

Если функция $F(M)$ финитна, непрерывна в области $\overline{D_e}$ и непрерывно дифференцируема в D_e, а функция $f(P)$ непрерывна на поверхности S (кривой L), то существует единственное классическое решение задачи (4.2.1-4.2.3).

Аналогично случаю внутренней задачи, решение задачи (4.2.1-4.2.3) можно получить с помощью функции Грина $G(M,Q)$:

$$\begin{cases} \Delta_Q G(Q,M) = -\delta(Q,M), \quad Q,\ M \in D_e, \\ \dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} + hG(P,M) = 0, \quad P \in S \ \ (P \in L), \quad M \in D_e, \\ G(Q,M) \text{ регулярна на бесконечности.} \end{cases} \tag{4.2.4}$$

Определение 4.2.2 *Функцией Грина внешней задачи Робена для оператора Лапласа будем называть функцию*

$$G(Q,M) = \frac{1}{4\pi r_{QM}} + v(Q,M),\ \ Q \in \overline{D_e},\ \ M \in D_e,$$

в трехмерном случае,

$$G(Q,M) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r_{QM}} + v(Q,M),\ \ Q \in \overline{D_e},\ \ M \in D_e,$$

в двумерном случае,

удовлетворяющую условиям:
1) $v(Q,M)$ — гармоническая функция координат точки $Q \in D_e$, непрерывно дифференцируема на $\overline{D_e}$ для каждой точки $M \in D_e$;
2) $\dfrac{\partial G(P,M)}{\partial n_P} + hG(P,M) = 0$ для каждой точки $M \in D_e$, где $P \in S$ в трехмерном случае и $P \in L$ в двумерном,
3)$G(Q,M)$ — регулярна на бесконечности.

Для любой точки $M \in D_e$ получаем

$$u(M) = \int\limits_S G(P,M)f(P)dS_P + \int\limits_{D_e} G(Q,M)F(Q)dV_Q \tag{4.2.5}$$

в трехмерном случае и

$$u(M) = \int\limits_L G(P,M)f(P)dl_P + \int\limits_{D_e} G(Q,M)F(Q)dS_Q. \tag{4.2.6}$$

Замечание 4.2.1 *В случае внешней трехмерной задачи функция $v(Q,M)$ регулярна на бесконечности, а в случае двумерной задачи эта функция имеет логарифмическую особенность на бесконечности.*

§ 3. Примеры решения задач

Пример 4.3.1. *Найдите распределение тепла в верхнем полупространстве, заполненном однородным веществом, создаваемое точечным источиком мощности q, помещенным в точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $z_0 > 0$, если на границе $z = 0$ происходит теплообмен по закону Ньютона со средой, имеющей нулевую температуру.*

Решение. Искомая температура $u(M,M_0)$, где $M(x,y,z)$, является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta_M u(M,M_0) = -q\cdot\delta(M,M_0),\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \ z>0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} - hu\Big|_{z=0} = 0,\ \ (x,y)\in\mathbb{R}^2, \\ u \rightrightarrows 0, \quad \text{при } r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to +\infty, \end{cases}$$

где $h = \dfrac{\lambda}{k} > 0$, λ — коэффициент теплообмена на границе, k — коэффициент теплопроводности вещества в области $z \geqslant 0$.

Искомая функция $u(M, M_0)$ имеет вид

$$u(M, M_0) = \frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} + v,$$

где v — гармоническая функция M, удовлетворяющая краевому условию

$$\frac{\partial v}{\partial z} - hv\Big|_{z=0} = -\frac{qz_0}{\Big((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2\Big)^{3/2}} + \\ + \frac{qh}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}},$$

и равномерно стремится к нулю на бесконечности. Будем искать функцию v в виде

$$v = \frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} + w(x-x_0, y-y_0, z+z_0),$$

где w — гармоническая функция, равномерно стремящаяся к нулю на бесконечности. Тогда

$$\frac{\partial w}{\partial z} - hw\Big|_{z=0} = \frac{2qh}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + z_0^2}}. \tag{4.3.1}$$

Фиксируем переменные x и y и рассмотрим функцию

$$g(z_0) = w(x-x_0, y-y_0, z_0),$$

которая будет представлять собой решение уравнения

$$g'(z_0) - hg(z_0) = \frac{2qh}{\sqrt{\rho^2 + z_0^2}}, \text{ где } \rho^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$g(z_0) = C_0 e^{hz_0} + 2qh \int\limits_{z_0^*}^{z_0} \frac{e^{h(z_0-\alpha)}}{\sqrt{\rho^2+\alpha^2}} d\alpha.$$

Итак, функция

$$w(x-x_0, y-y_0, z+z_0) = C_0 e^{h(z+z_0)} + \\ + 2qh \int\limits_{z_0^*}^{z+z_0} \frac{e^{h(z+z_0-\alpha)}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \alpha^2}} d\alpha$$

удовлетворяет краевому условию (4.3.1) при $z = 0$. Так как функция w должна равномерно стремиться к нулю при $z \to +\infty$, то положим $C_0 = 0$, $z_0^* = +\infty$. Остается показать, что функция

$$w(x - x_0, y - y_0, z + z_0) = -2qh \int\limits_{z+z_0}^{+\infty} \frac{e^{h(z+z_0-\alpha)}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + \alpha^2}} d\alpha =$$

$$= -2qh \int\limits_{z_0}^{+\infty} \frac{e^{h(z_0-\eta)}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+\eta)^2}} d\eta$$

является гармонической в области $z > 0$. Так как интегралы, получаемые двукратным дифференцированием подынтегрального выражения в w по переменным x, y и z, сходятся, то функция w является дважды непрерывно дифференцируемой, причем

$$\Delta_M w = -2qh \int\limits_{z_0}^{+\infty} e^{h(z_0-\eta)} \Delta_M \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+\eta)^2}} d\eta = 0,$$

так как при всех $\eta \geqslant z_0$ функция

$$\frac{1}{r_{MM'}} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+\eta)^2}},$$

где $M'(x_0, y_0, -\eta)$, является гармонической функцией $M(x, y, z)$.

Итак, гармоническая функция w, удовлетворяющая граничному условию (4.3.1) при $z = 0$ и равномерно стремящаяся к нулю на бесконечности, построена. Поскольку в силу теоремы единственности решения третьей краевой задачи при $h > 0$ других таких функций нет, то окончательно получаем

$$u(M, M_0) = \frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} +$$
$$+ \frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2}} -$$
$$- 2qh \int\limits_{z_0}^{+\infty} \frac{e^{h(z_0-\eta)}}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+\eta)^2}} d\eta \qquad (4.3.2)$$

Замечание 4.3.1 *Если положить* $q = \dfrac{1}{4\pi}$, *то выражение (4.3.2) будет представлять собой функцию Грина третьей краевой задачи в верхнем полупространстве.*

Задачи для самостоятельного решения.

Задача 4.3.2. *Найдите распределение тепла в шаре радиуса R, создаваемого точечным источником мощности q, помещенным в точку M_0 внутри шара, если на его поверхности происходит конвективный обмен теплом по закону Ньютона со средой, имеющей нулевую температуру.*

Задача 4.3.3. *Постройте функцию Грина оператора Лапласа в шаровом слое $a < r < b$, если на границе $r = a$ задано условие Дирихле, а на границе $r = b$ задано условие третьего рода* $\left.\dfrac{\partial G}{\partial r} + hG\right|_{r=b} = 0$, $h > 0$.

Задача 4.3.4. *Постройте функцию Грина оператора Лапласа в круге радиуса a, если на границе $r = a$ задано условие третьего рода* $\left.\dfrac{\partial G}{\partial r} + hG\right|_{r=a} = 0$, $h > 0$.

Задача 4.3.5. *Постройте функцию Грина оператора Лапласа в верхней полуплоскости, если на границе $y = 0$ задано условие третьего рода* $\left.\dfrac{\partial G}{\partial y} - hG\right|_{y=0} = 0$, $h > 0$.

Приложение А

ФОРМУЛЫ ГРИНА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

§ 1. Трехмерный случай. Внутренние области.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^3$ — конечная область, ограниченная достаточно гладкой замкнутой поверхностью S. Как известно [19], для любого вектора $\vec{A}$, компоненты которого непрерывно дифференцируемы внутри области D, справедлива формула Остроградского:

$$\int\limits_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \int\limits_D \operatorname{div} \vec{A} dV$$

Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор внешней по отношению к области D нормали к поверхности S.

Из формулы Остроградского может быть получена первая формула Грина для оператора Лапласа в ограниченной области D. Возьмем в качестве вектора $\vec{A}$ следующее выражение:

$$\vec{A} = v \nabla u,$$

где v и u — скалярные функции координат, такие что

$$v \in C(\overline{D}) \cap C^{(1)}(D), \quad u \in C^{(1)}(\overline{D}) \cap C^{(2)}(D).$$

При этом, учитывая, что

$$\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \, (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u,$$

где $\Delta = \operatorname{div} \nabla$ — оператор Лапласа, и

$$\vec{n} \cdot \nabla u = \frac{\partial u}{\partial n},$$

получаем *первую формулу Грина*:

$$\int\limits_D v \Delta u dV = \int\limits_S v \frac{\partial u}{\partial n} dS - \int\limits_D \nabla v \cdot \nabla u dV \tag{A.1.1}$$

Вторая формула Грина автоматически получается из первой, если взять

$$u, v \in C^{(1)}(\overline{D}) \cap C^{(2)}(D)$$

и рассмотреть разность интегралов по области D от выражений $v\Delta u$ и $u\Delta v$:

$$\int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)\, dV = \int\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS \qquad (\text{A.1.2})$$

Если область D ограничена несколькими замкнутыми поверхностями, то интеграл в левой части равенств (A.1.1) и (A.1.2) превращается в сумму интегралов по соответствующим поверхностям. При этом все нормали обязаны быть внешними по отношению к области D (см. рис. A.1.1).

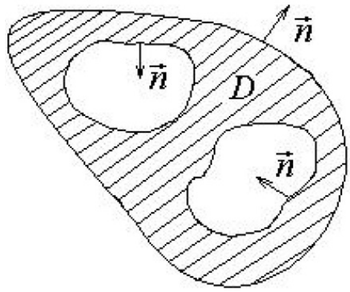

Рис. A.1.1.

Третья формула Грина может быть получена из второй, если в качестве функции v взять фундаментальное решение оператора Лапласа в трехмерном случае:

$$v(M, M_0) = \frac{1}{4\pi r_{MM_0}},$$

где r_{MM_0} — расстояние между точками M и M_0. Так как для фиксированной точки M_0 фундаментальное решение является гармонической функцией координат точки M при $M \neq M_0$, то в случае, когда $M \in D$, а $M_0 \notin \overline{D}$, из второй формулы Грина (A.1.2) сразу же получаем:

$$0 = \int\limits_S \left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right) dS_P - \int\limits_D \frac{\Delta u}{r_{MM_0}} dV_M. \qquad (\text{A.1.3})$$

В равенстве (A.1.3) точка P пробегает границу S области D, $\vec{n}_P$ представляет собой внешнюю нормаль к поверхности S в точке P, индекс P у элемента площади поверхности dS_P означает, что интегрирование производится по координатам точки P, а индекс M элемента объема dV_M, соответственно, означает, что интеграл берется по координатам точки M. Координаты точки M_0 играют роль параметров.

Если точка M_0 принадлежит области D, ее можно окружить сферой $\Sigma(M_0, \varepsilon)$ радиуса ε с центром в M_0. Радиус ε можно выбрать настолько малым, что шар $K(M_0, \varepsilon)$ с центром в M_0 и радиусом ε будет целиком лежать в области D. Рассмотрим вторую формулу Грина в области $D \setminus \overline{K(M_0, \varepsilon)}$. Так как в этой области функция $\dfrac{1}{r_{MM_0}}$ является гармонической, получаем:

$$\int\limits_S \left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right) dS_P +$$
$$+ \int\limits_{\Sigma(M_0,\varepsilon)} \left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right) dS_P = \int\limits_{D\setminus\overline{K(M_0,\varepsilon)}} \frac{\Delta u(M)}{r_{MM_0}} dV_M. \tag{A.1.4}$$

Рассмотрим подробнее интеграл по сфере $\Sigma(M_0, \varepsilon)$:

$$I(\varepsilon) = \int\limits_{\Sigma(M_0,\varepsilon)} \left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right) dS_P.$$

Здесь единичная нормаль $\vec{n}_P$ является внешней по отношению к области $D \setminus \overline{K(M_0, \varepsilon)}$, то есть она направлена внутрь $K(M_0, \varepsilon)$. Перейдем к сферическим координатам с центром в точке M_0. Тогда $\vec{n}_P = -\vec{e}_r$, и

$$I(\varepsilon) = \int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \left(-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + u\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\right)\Big|_{r=\varepsilon} \varepsilon^2 \sin\theta d\theta =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\pi} \left(\varepsilon \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=\varepsilon} + u|_{r=\varepsilon}\right) \sin\theta d\theta.$$

Используя теорему о среднем при вычислении интеграла $I(\varepsilon)$ и устремляя ε к нулю в равенстве (A.1.4), получаем:

$$4\pi u(M_0) = \int\limits_S \left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right) dS_P - \int\limits_D \frac{\Delta u(M)}{r_{MM_0}} dV_M, \tag{A.1.5}$$

так как
$$I(0) = -4\pi u(M_0).$$

Если точка M_0 принадлежит поверхности S области D, можно повторить все проведенные выше рассуждения с той лишь разницей, что теперь внутри D оказывается только часть шара $K(M_0, \varepsilon)$. Поверхность этой его внутренней по отношению к области D части при малых ε близка к полусфере. Поэтому в фомуле (A.1.5) нужно заменить множитель 4π на 2π. Таким образом, мы получаем *третью формулу Грина*:

$$\Omega(M_0)u(M_0) = \int\limits_S \left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right) dS_P - \int\limits_D \frac{\Delta u(M)}{r_{MM_0}} dV_M, \tag{A.1.6}$$

где

$$\Omega(M_0) = \begin{cases} 4\pi, \text{ если } M_0 \in D \\ 2\pi, \text{ если } M_0 \in S \\ 0, \text{ если } M_0 \notin \overline{D} \end{cases}$$

§ 2. Трехмерный случай. Внешние области

Пусть D_e — дополнение конечной области D с достаточно гладкой замкнутой поверхностью S до всего пространства $\mathbb{R}^3$. Для *регулярных* на бесконечности функций во внешней области D_e также можно получить три формулы Грина.

Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат находилось внутри области D. Окружим область D сферой $\Sigma(O,R)$ с центром в начале координат O и достаточно большим радиусом R. В конечной области $K(O,R)\setminus\overline{D}$, где $K(O,R)$ — шар с центром в начале координат и радиусом R, справедливы три формулы Грина:

1) Для любых $v \in C(\overline{D_e}) \cap C^{(1)}(D_e)$ и $u \in C^{(1)}(\overline{D_e}) \cap C^{(2)}(D_e)$

$$\int\limits_{K(O,R)\setminus\overline{D}} v\Delta u dV = \int\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n_P}dS + \int\limits_{\Sigma(O,R)} v\frac{\partial u}{\partial n}dS - \int\limits_{K(O,R)\setminus\overline{D}} \nabla v\cdot\nabla u dV, \tag{A.2.1}$$

где $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности $\Sigma(O,R)$. Переходя к сферическим координатам, получаем

$$I_1(R) = \int\limits_{\Sigma(O,R)} v\frac{\partial u}{\partial n}dS = R^2\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} v\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R}\sin\theta d\theta d\psi.$$

2) Для любых $v, u \in C^{(1)}(\overline{D_e}) \cap C^{(2)}(D_e)$

$$\begin{aligned}\int\limits_{K(O,R)\setminus\overline{D}} (v\Delta u - u\Delta v)\,dV = \int\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n_P} - u\frac{\partial v}{\partial n_P}\right)dS+ \\ + \int\limits_{\Sigma(O,R)} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS,\end{aligned} \tag{A.2.2}$$

где

$$I_2(R) = \int\limits_{\Sigma(O,R)} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)dS = R^2\int\limits_0^{2\pi} d\psi\int\limits_0^{\pi}\left(v\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial v}{\partial r}\right)\Big|_{r=R}\sin\theta d\theta.$$

3) Для любой функции $u \in C^{(1)}(\overline{D_e}) \cap C^{(2)}(D_e)$

$$\Omega(M_0)u(M_0) = \int\limits_S \left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right)dS_P +$$

$$+\int\limits_{\Sigma(O,R)}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right)dS_P-\int\limits_{K(O,R)\setminus\overline{D}}\frac{\Delta u(M)}{r_{MM_0}}dV_M, \tag{A.2.3}$$

где

$$\Omega(M_0)=\begin{cases}4\pi, \text{ если } M_0\in K(O,R)\setminus\overline{D},\\ 2\pi, \text{ если } M_0\in S \text{ или } M_0\in\Sigma(O,R),\\ 0, \text{ если } M_0\notin\overline{K(O,R)\setminus\overline{D}}.\end{cases}$$

Рассмотрим интеграл по сфере $\Sigma(O,R)$:

$$I_3(R)=\int\limits_{\Sigma(O,R)}\left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P}-u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right)dS_P.$$

В сферических координатах

$$r_{PM_0}\Big|_{P\in\Sigma(O,R)}=\sqrt{R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma},$$

$$\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\Bigg|_{P\in\Sigma(O,R)}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma}}\Bigg|_{r=R}=$$

$$=-\frac{R-r_0\cos\gamma}{\left(R^2+r_0^2-2Rr_0\cos\gamma\right)^{3/2}},$$

где (r_0,θ_0,ψ_0) — координаты точки M_0, (R,θ,ψ) — координаты точки $P\in\Sigma(O,R)$, и

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta_0+\sin\theta\sin\theta_0\cos(\psi-\psi_0)$$ (см. § 3 главы 2).

Таким образом,

$$I_3(R)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\left(\frac{R}{\sqrt{1+\left(\frac{r_0}{R}\right)^2-2\left(\frac{r_0}{R}\right)\cos\gamma}}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R}+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\left(\frac{r_0}{R}\right)\cos\gamma}{\left(1+\left(\frac{r_0}{R}\right)^2-2\left(\frac{r_0}{R}\right)\cos\gamma\right)^{3/2}}\cdot u\big|_{r=R}\right)\sin\theta d\theta d\psi.$$

В равенствах (A.2.1)-(A.2.3) нормаль $\vec{n}_P$ к поверхности S является внешней по отношению к области D_e, то есть она направлена внутрь D.

Если функции u и v являются регулярными на бесконечности (см. определение 2.2.1), то интегралы $I_1(R)$, $I_2(R)$, $I_3(R)$ по сфере $\Sigma(O,R)$ в равенствах (A.2.1)-(A.2.3) стремятся к нулю при $R \to +\infty$. В самом деле, для регулярных на бесконечности функций u и v существуют такие постоянные $A_1 > 0$ и $A_2 > 0$, что

$$|v|_{r=R} < \frac{A_1}{R}, \quad \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=R} < \frac{3A_1}{R^2}, \quad |u|_{r=R} < \frac{A_2}{R}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R} < \frac{3A_2}{R^2}.$$

Следовательно, для интеграла $I_1(R)$ в равенстве (A.2.1) получаем

$$|I_1(R)| = R^2 \left| \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} v \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} \sin\theta d\theta d\psi \right| < 4\pi \cdot \frac{3A_1A_2}{R} \to 0 \text{ при } R \to +\infty.$$

Интегралы $I_2(R)$ и $I_3(R)$ в равенствах (A.2.2)-(A.2.3) оцениваются аналогичным образом.

Итак, устремляя радиус R к бесконечности, для *регулярных* на бесконечности функций получаем три формулы Грина, аналогичные формулам для внутренних областей:

$$\int\limits_{D_e} v\Delta u dV_M = \int\limits_S v\frac{\partial u}{\partial n_P} dS_P - \int\limits_{D_e} \nabla v \cdot \nabla u dV_M, \tag{A.2.4}$$

$$\int\limits_{D_e} (v\Delta u - u\Delta v)\, dV_M = \int\limits_S \left(v\frac{\partial u}{\partial n_P} - u\frac{\partial v}{\partial n_P}\right) dS_P, \tag{A.2.5}$$

$$\begin{aligned} \Omega(M_0)u(M_0) = \int\limits_S \left(\frac{1}{r_{PM_0}}\frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P}\frac{1}{r_{PM_0}}\right) dS_P - \\ - \int\limits_{D_e} \frac{\Delta u(M)}{r_{MM_0}} dV_M, \end{aligned} \tag{A.2.6}$$

где

$$\Omega(M_0) = \begin{cases} 4\pi, & \text{если } M_0 \in D_e, \\ 2\pi, & \text{если } M_0 \in S, \\ 0, & \text{если } M_0 \notin \overline{D_e}. \end{cases}$$

§ 3. Двумерный случай. Внутренние области.

Пусть D — область на плоскости, ограниченная достаточно гладкой замкнутой кривой L.

Первая формула Грина в двумерном случае имеет вид

$$\int\limits_D v\Delta u dS = \oint\limits_L v\frac{\partial u}{\partial n} dl - \int\limits_D \nabla v \cdot \nabla u dS \tag{A.3.1}$$

для всех

$$v \in C(\overline{D}) \cap C^{(1)}(D), \quad u \in C^{(1)}(\overline{D}) \cap C^{(2)}(D).$$

Вторая формула Грина:

$$\int\limits_D (v\Delta u - u\Delta v)\, dS = \oint\limits_L \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dl \tag{A.3.2}$$

для всех

$$u, v \in C^{(1)}(\overline{D}) \cap C^{(2)}(D)$$

Третья формула Грина:

$$\begin{aligned} \Omega(M_0)u(M_0) = \oint\limits_L \left(\ln\frac{1}{r_{PM_0}} \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} - u(P)\frac{\partial}{\partial n_P} \ln\frac{1}{r_{PM_0}}\right) dl_P - \\ - \int\limits_D \Delta u(M) \ln\frac{1}{r_{MM_0}} dS_M, \end{aligned} \tag{A.3.3}$$

где

$$\Omega(M_0) = \begin{cases} 2\pi, \text{ если } M_0 \in D \\ \pi, \text{ если } M_0 \in L \\ 0, \text{ если } M_0 \notin \overline{D} \end{cases}$$

Доказываются эти формулы полностью аналогично тому, как это сделано в трехмерном случае.

§ 4. Двумерный случай. Внешние области.

Пусть D_e — дополнение конечной области D с достаточно гладкой замкнутой границей L до всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Для *регулярных на бесконечности гармонических вне некоторой ограниченной области* функций могут быть получены три формулы Грина в области D_e. В двумерном случае, в отличие от трехмерного, необходимо помимо регулярности (то есть ограниченности на бесконечности) требовать еще и гармоничности функций потому, что тогда их производные убывают на бесконечности как $\frac{1}{r^2}$ [9].

Выберем систему координат таким образом, чтобы начало координат O находилось внутри области D. Окружим область D окружностью C_R с центром в начале координат и достаточно большим радиусом R. Тогда в конечной области D_e^R, ограниченной кривой L и окружностью C_R, справедливы три формулы Грина.

Рассмотрим первую формулу Грина:

$$\int\limits_{D_e^R} v\Delta u dS = \oint\limits_L v\frac{\partial u}{\partial n} dl + \oint\limits_{C_R} v\frac{\partial u}{\partial n} dl - \int\limits_{D_e^R} \nabla v \cdot \nabla u dS, \tag{A.4.1}$$

для любых $v \in C(\overline{D_e}) \cap C^{(1)}(D_e)$, $u \in C^{(1)}(\overline{D_e}) \cap C^{(2)}(D_e)$, где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к границе области D_e^R.

В полярных координатах интеграл по окружности C_R имеет вид:

$$I_1(R) = \oint\limits_{C_R} v \frac{\partial u}{\partial n} dl = R \int\limits_0^{2\pi} v \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} d\psi.$$

Если функции u и v являются регулярными на бесконечности и гармоническими вне некоторой ограниченной области $D_0 \subset D_e$, то найдутся такие $A_1, A_2 > 0$, что

$$|u| < A_1, \quad |\nabla u| < \frac{2A_1}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right| < \frac{2A_1}{r^2}, \tag{A.4.2}$$

$$|v| < A_2, \quad |\nabla v| < \frac{2A_2}{r^2} \tag{A.4.3}$$

при $r \to +\infty$ [1]. Следовательно,

$$|I_1(R)| = R \left| \int\limits_0^{2\pi} v \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} d\psi \right| < \frac{4\pi A_1 A_2}{R} \to 0 \text{ при } R \to +\infty.$$

За счет оценок (A.4.2)-(A.4.3) интеграл

$$\int\limits_{D_e^R} \nabla v \cdot \nabla u dS$$

по области D_e^R в выражении (A.4.1) сходится при $R \to +\infty$. Таким образом, при $R \to +\infty$ получаем *первую формулу Грина* во внешней двумерной области D_e:

$$\int\limits_{D_e} v \Delta u dS = \oint\limits_L v \frac{\partial u}{\partial n} dl - \int\limits_{D_e} \nabla v \nabla u dS. \tag{A.4.4}$$

Вторая формула Грина

$$\int\limits_{D_e} (v\Delta u - u\Delta v)\, dS = \oint\limits_L \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) dl \tag{A.4.5}$$

автоматически получается из первой для любых гармонических вне некоторой ограниченной области $D_0 \subset D_e$ регулярных функций u и v, таких что $u, v \in C^{(1)}(\overline{D_e}) \cap C^{(2)}(D_e)$.

Получим третью формулу Грина в области D_e. В конечной области D_e^R третья формула Грина имеет место:

$$\begin{gathered}\Omega(M_0)u(M_0) = \oint\limits_{L} \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{M_0P}} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{M_0P}} \right\} dl_P + \\ + \oint\limits_{C_R} \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{M_0P}} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{M_0P}} \right\} dl_P - \\ - \int\limits_{D_e^R} \Delta u(M) \ln \frac{1}{r_{M_0M}} dS_M,\end{gathered} \tag{A.4.6}$$

где

$$\Omega(M_0) = \begin{cases} 2\pi, & M_0 \in D_e^R, \\ \pi, & M_0 \in L \cup C_R, \\ 0, & M_0 \notin \overline{D_e^R}. \end{cases}$$

Нормали $\vec{n}_P$ к кривым L и C_R являются внешними по отношению к области D_e^R. Рассмотрим интеграл

$$I_2(R) = \oint\limits_{C_R} \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{M_0P}} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{M_0P}} \right\} dl_P$$

по окружности C_R в формуле (A.4.6) при $R \to +\infty$. Перейдем к полярным координатам (r, ψ). Пусть точка M_0 имеет координаты (r_0, ψ_0). Тогда

$$\begin{gathered}\lim_{R\to+\infty} I_2(R) = \lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial u}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\psi - \psi_0)}} - \right. \\ \left. \left. - u \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\psi - \psi_0)}} \right\} \right|_{r=R} R d\psi =\end{gathered}$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int\limits_0^{2\pi} \left\{ O\left(\frac{1}{R}\ln\frac{1}{R}\right) + u(R,\psi)\left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right) \right\} d\psi = 2\pi u_\infty,$$

где $u_\infty = \lim\limits_{R\to+\infty} \dfrac{1}{2\pi R} \oint\limits_{C_R} u dl$ — среднее значение функции u по окружности бесконечно большого радиуса. В результате предельного перехода получаем третью формулу Грина в области D_e:

$$\Omega(M_0)u(M_0) - 2\pi u_\infty = \oint\limits_L \left\{ \frac{\partial u(P)}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{M_0P}} - u(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \ln \frac{1}{r_{M_0P}} \right\} dl_P - \\ - \int\limits_{D_e} \Delta u(M) \ln \frac{1}{r_{M_0M}} dS_M, \qquad \text{(A.4.7)}$$

где

$$\Omega(M_0) = \begin{cases} 2\pi, & M_0 \in D_e, \\ \pi, & M_0 \in L, \\ 0, & M_0 \notin \overline{D_e}. \end{cases}$$

Величина u_∞ для регулярной гармонической функции конечна и в общем случае не равна нулю. Обратите внимание, что в трехмерном случае такого слагаемого в третьей формуле Грина нет.

Приложение Б

СУММИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ РЯДОВ

1. Производящая функция полиномов Лежандра:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\alpha}}, \quad |t|<1. \tag{Б.0.8}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n} P_n(x) = -\ln \frac{1-xt+\sqrt{t^2-2tx+1}}{2}, \quad |t|<1 \tag{Б.0.9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{n+1}}{n+1} P_n(x) = \ln \frac{t-x+\sqrt{t^2-2tx+1}}{1-x}, \quad |t|<1 \tag{Б.0.10}$$

2. Суммирование некоторых тригонометрических рядов:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{in\psi} = \frac{1}{1-te^{i\psi}} = \frac{1-te^{-i\psi}}{1+t^2-2t\cos\psi} \tag{Б.0.11}$$

Из (Б.0.11) получаем:

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \cos n\psi = \frac{1-t\cos\psi}{1+t^2-2t\cos\psi}, \tag{Б.0.12}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \sin n\psi = \frac{t\sin\psi}{1+t^2-2t\cos\psi}. \tag{Б.0.13}$$

Интегрируя по переменной ψ соотношение (Б.0.13), приходим к равенству

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \cos n\psi}{n} = \int \frac{t\sin\psi}{1+t^2-2t\cos\psi} d\psi = \frac{1}{2}\ln(1+t^2-2t\cos\psi) + C$$

Положив $t=0$, находим постоянную интегрирования $C=0$, и окончательно получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n \cos n\psi}{n} = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2-2t\cos\psi) = \ln \frac{1}{\sqrt{1+t^2-2t\cos\psi}} \tag{Б.0.14}$$

Список литературы

1. А.Г. Свешников, А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов Лекции по математической физике. М: Изд-во Московского ун-та, 2004.
2. А.Н. Боголюбов, В.В. Кравцов Задачи по математической физике. М: Изд-во Московского ун-та, Изд-во «Наука», 1998.
3. В.С. Владимиров, В.В. Жаринов Уравнения математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
4. В.С. Владимиров Уравнения математической физики. М.: Наука, 1986.
5. Н.С. Кошляков, Э.Б. Глинер, М.М. Смирнов Уравнения в частных производных математической физики. М.: «Высшая школа», 1970.
6. Б.М. Будак, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов, Сборник задач по математической физике, М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.
7. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, Уравнения математической физики, М.: Изд-во МГУ, 1998.
8. Н.Н. Миролюбов, М.В. Костенко, М.Л. Левинштейн, Н.Н. Тиходеев, Методы расчета электростатических полей, М.: «Высшая школа», 1963.
9. Ф.М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т.1, М.: ИЛ, 1958.
10. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов, Теория функций комплексной переменной, М.: Наука, 2003.
11. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного переменного. Гостехиздат, 1951.
12. Е.В. Захаров, И.В. Дмитриева, С.И. Орлик, Уравнения математической физики. Сборник задач. МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики. Москва, 2009.
13. С.Г. Калашников, Электричество. М.: Физматлит, 2003.
14. А.Б. Васильева, Н.А. Тихонов Интегральные уравнения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
15. В.Т. Волков, А.Г. Ягола Интегральные уравнения. Вариационное исчисление. Курс лекций. — М.: КДУ, 2008.
16. И.Г. Петровский Лекции по теории интегральных уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
17. А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников Дифференциальные уравнения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
18. Г.А. Гринберг Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М.: Издательство Академии Наук СССР, Москва, Ленинград, 1948.
19. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк Основы математического анализа. Часть 2. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
20. И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Изд-во «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1965.

Учебное издание

Боголюбов Александр Николаевич
Левашова Наталия Тимуровна
Могилевский Илья Ефимович
Мухартова Юлия Вячеславовна
Шапкина Наталья Евгеньевна

ФУНКЦИЯ ГРИНА ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

Подписано в печать 6.09.2012
Объем 8,06 п.л. Тираж 100 экз.
Заказ №

Физический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, стр.2

Отпечатано в отделе оперативной печати
физического факультета