

I. Теоремы

1. Простые теоремы

1) Производная

1. Теорема о касательной к графику функции, дифференцируемой в данной точке.
2. Необходимое условие дифференцируемости (связь непрерывности и дифференцируемости функции). Показать на примере, что обратное утверждение неверно.
3. Теоремы о дифференцируемости и формулах производных суммы, разности, произведения и отношения функций («правила дифференцирования»).
4. Теорема об инвариантности формы первого дифференциала.
5. Теорема о формуле Лейбница.

2) Интеграл

6. Основная теорема интегрального исчисления (о первообразных функции). Верно ли аналогичное утверждение для объединения непересекающихся интервалов?
7. Теорема о замене переменной в неопределённом интеграле.
8. Теорема об интегрировании по частям для неопределённого интеграла.
9. Критерий интегрируемости в терминах интегралов Дарбу.
10. Критерий интегрируемости в терминах сумм Дарбу.
11. Интегрируемость непрерывных функций.
12. Интегрируемость монотонных функций.
13. Аддитивность интеграла по промежуткам.
14. Утверждение о знаке интеграла знакоопределённой функции.
15. Утверждение об интегрируемости модуля интегрируемой функции. Оценка $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.
16. Формулы среднего значения.
17. Теорема об интеграле с переменным верхним пределом.
18. Формула Ньютона—Лейбница.

3) Последовательности

19. Теорема о стягивающихся сегментах (отрезках). В каком месте её доказательство не проходит для стягивающихся интервалов?
20. Теорема Больцано—Вейерштрасса.
21. Эквивалентность двух определений предельной точки последовательности.
22. Теорема о существовании верхнего и нижнего пределов ограниченной последовательности.
23. Критерий Коши сходимости последовательности

2. Сложные теоремы

1) Производная

- 24. Теорема о производной обратной функции.
- 25. Теорема о производной сложной функции.
- 26. Теорема о производных параметрически заданных функций (для 1-ой и 2-ой производных).

2) Интеграл

- 27. Утверждение об интегрируемости рациональных функций в элементарных функциях.
- 28. Свойства сумм Дарбу. Лемма Дарбу.
- 29. Теорема об интегрируемости некоторых разрывных функций.

3) Последовательности

- 30. Эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне.
- 31. Критерий Коши существования предела функции.

II. Образцы теоретических вопросов

1) Производная

- 1. Вывести формулу для производной функции $y = \arcsin x$, используя теорему о производной обратной функции.
- 2. Рассмотрим семейство функций

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ |x|^\alpha \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \end{cases}$$

при всех $\alpha \in \mathbb{R}$. При каких значениях α указанные функции непрерывны? дифференцируемы всюду? имеют производную, являющуюся всюду непрерывной функцией?

- 3. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x(1+x)^{-\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \end{cases}$$

имеет производную в точке $x = 0$, и найти её значение.

2) Интеграл

4. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_a^{a+x} \sin t \, dt}{x}.$$

5. Найти производную

$$\frac{d}{dx} \int_{5+\cos x^2}^{10+\sin e^x} t^{\sin t^2} \, dt.$$

6. Доказать, что функция

$$y = \begin{cases} \ln x, & x \in (0; 1], \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

не интегрируема по Риману на отрезке $[0; 1]$.

7. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) \, dx,$$

то функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$?

8. Привести пример такой интегрируемой по Риману на отрезке $[a; b]$ функции, что функция

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, dt$$

определена всюду на $[a; b]$, но не является всюду дифференцируемой на $(a; b)$.

9. Привести пример такой всюду дифференцируемой на интервале $(-10; 10)$ функции $F(x)$, что её производная $F'(x)$ не интегрируема по Риману на отрезке $[-1; 1]$.

10. Построить хотя бы одну обобщённую первообразную функции $f(x) = [x]$ на интервале $(-1; 2)$.

11. Пусть ни одна из функций $u(x)$, $v(x)$ не интегрируема на отрезке $[a; b]$. Что можно сказать об интегрируемости их суммы?

12. Вычислить непосредственным предельным переходом интеграл $\int_0^1 e^x \, dx$ (выбрав некоторую последовательность разбиений и соответствующих им интегральных сумм).

13. Используя понятие интеграла, вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}},$$

где $\alpha \geq 0$.

14. Вывести рекуррентную формулу для интеграла

$$K_m = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^m}.$$

15. Вычислить интеграл

$$\int_0^\pi \operatorname{arctg} \cos x \, dx.$$

16. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $\int_a^b |f(x)| \, dx = 0$. Доказать $f(x) \equiv 0$ на $[a; b]$.

3) Последовательности

17. Доказать, что возрастающая ограниченная сверху последовательность имеет предел.

18. Привести пример ограниченной последовательности, у которой множества значений её членов не совпадает с её верхним пределом.

19. Найти все предельные точки последовательности $x_n = \left(1 + (-1)^n \frac{1}{n}\right)^n$.

20. Привести пример последовательности, множеством предельных точек которой является вся числовая прямая.

21. Доказать сходимость и вычислить предел последовательности $\{x_n\}$, где

$$x_1 = \sqrt{a}, \quad x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \dots, \quad x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}}_n,$$

если $a > 0$.

22. Доказать сходимость и найти предел последовательности $\{x_n\}$, если $x_1 = b > 0$,

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad a > 0.$$

23. Доказать, что всякая фундаментальная последовательность ограничена.

24. Доказать, что последовательность $\{(-1)^n\}$ расходится.