

1. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы первого рода. Приложения.

2.1. Найдите поверхностные интегралы I рода.

2.2.1. $\iint_S dS$, где поверхность $S: x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$.

2.2.2. $\iint_S (x + y + z)dS$, где поверхность $S: x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$.

2.2.3. $\iint_S (x + y + z)dS$, где поверхность $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cap z \geq 0$.

2.2.4. $\iint_S (x^2 + y^2)ds$, где S – граница тела $V = \{(x, y, z): \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$.

2.2.5. $\iint_S (x^2 + y^2 + z - \frac{1}{2})ds$, где S – часть параболоида $2z = 2 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$.

2.3. Найдите координаты центра масс части однородной сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \text{ с помощью поверхностного интеграла.}$$

2.4. Найдите момент инерции относительно оси Oz части конической поверхности

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ вырезанной цилиндром } x^2 + y^2 = 2x. \text{ Поверхностная плотность } \rho = x.$$

2.5. Найдите момент инерции относительно оси Oz части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$,

$$y \geq 0, \text{ вырезанной цилиндром } x^2 + y^2 = 2x. \text{ Поверхностная плотность } \rho = zy.$$

3. Поверхностные интегралы второго рода. Приложения.

3.1. Найдите поверхностные интегралы:

3.1.1. $\iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$, где S – верхняя сторона плоскости $x + y + z = 1$, $x \in [-1;1]$, $y \in [-1;1]$, то есть нормаль к плоскости составляет острый угол с осью Oz .

3.1.2. $\iint_S (y^2 + z^2)dxdy$, где S – часть внешней стороны цилиндрической

$$\text{поверхности } z = \sqrt{a^2 - x^2}, 0 \leq y \leq b$$

3.1.3. $\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)dxdy$, где S – часть внешней стороны конической

$$\text{поверхности } z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq c \text{ (внешняя нормаль образует тупой угол с осью } Oz).$$

3.1.4. $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где S – часть внутренней стороны гиперboloида

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \leq z \leq 3.$$

3.1.5. $\iint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где S – внешняя сторона сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

3.2. Найдите поток векторного поля \vec{F} через поверхность S в направлении внешней

нормали к S .

3.2.1. $\vec{F} = \{-x^3, -y^3, -z^3\}$, S - поверхность куба $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq a$, $0 \leq z \leq a$.

3.2.2. $\vec{F} = \{0, y^3, z\}$, S - часть параболоида $z = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 2$.

4. Формула Остроградского - Гаусса.

4.1. Найдите интегралы, используя формулу Остроградского-Гаусса:

4.1.1. $\iiint_S xdydz + yzdx + zxdy$, где S - внутренняя сторона эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

4.1.2. $\iiint_S x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где S - внешняя сторона поверхности тела

$$x^2 + y^2 \leq z \leq H.$$

4.1.3. $\iiint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, где S - внешняя сторона поверхности куба

$$x \in [-1; 1], y \in [-1; 1], z \in [-1; 1].$$

5. Формула Стокса.

5.1. Пользуясь формулой Стокса, вычислите интегралы:

5.1.1. $\int_{AB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz$, где AB есть отрезок винтовой линии

$$x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = \frac{h}{2\pi} \varphi \text{ от точки } A(a, 0, 0) \text{ до точки } B(a, 0, h).$$

5.1.2. $\oint_L y^2 dx + xudy + (x^2 + y^2) dz$, где L - замкнутый контур, образованный при

пересечении трех плоскостей $x = 0$, $y = 0$, $z = a$ с эллиптическим параболоидом $x^2 + y^2 = az$, причем $x \geq 0$, $y \geq 0$ ($a > 0$). Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0, 0, 2a)$.

5.1.3. $\oint_L xdx + xdy + z dz$, где L - окружность, образованная при пересечении сферы

$x^2 + y^2 + z^2 = 8$ и плоскости $x = z$. Обход окружности совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0, 0, 5)$.

5.1.4. $\oint_L (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$, где L - эллипс, образованный при

$$\text{пересечении цилиндрической поверхности } x^2 + y^2 = a^2 \text{ и плоскости } \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$$

($a > 0$, $h > 0$), пробегаемый против часовой стрелки, если смотреть из точки $(2a, 0, 0)$

5.2. Пользуясь формулой Стокса, найдите циркуляцию векторного поля

$\vec{F} = \{z^3, x^3, y^3\}$ вдоль контура, образованного при пересечении гиперболоида

$2x^2 + z^2 - y^2 = a^2$ и плоскости $x + y = 0$. Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(0, 2a, 0)$.

5.3. Найдите работу силового поля $\vec{F} = \{x + 3y + 2z, 2x + z, x - y\}$ вдоль замкнутого контура $MNPM$, где MNP – треугольник с вершинами в точках $M(1, 0, 0)$, $N(0, 1, 0)$, $P(0, 0, 1)$. Обход контура совершается против часовой стрелки, если смотреть из точки $(5, 5, 5)$.

6. Дифференциальные операции в скалярных и векторных полях. Оператор Гамильтона. Инвариантные определения дивергенции и ротора

6.1. Найдите угол между:

6.1.1. Градиентами функций $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ и $v = xy + yz + zx - 18x - 6z - y$ в точке $M(3, 5, 4)$.

6.1.2. Градиентами скалярного поля $u = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$ в точках

$M_1(1, 2, 2)$ и $M_2(-3, 1, 0)$.

6.2. Дифференциальные операции

6.2.1. Найдите $\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

6.2.2. Найдите $\text{div}\vec{r}$, $\text{div}(r\vec{r})$, $\text{div}(r^2\vec{r})$, $\text{div}(r^{-1}\vec{r})$, $\text{div}(r^{-2}\vec{r})$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

6.2.3. Найдите $\text{grad}(uv)$, $\text{grad}(u^2)$, $\text{grad} f(u)$, $\text{grad}(\sin u)$, $\text{grad}\frac{1}{u}$, где u, v – дифференцируемые скалярные поля.

6.2.4. Вычислите $\text{grad}(\vec{c}, \vec{r})$, где $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, \vec{c} – постоянный вектор.

6.2.5. Найдите $\text{div}(r\vec{c})$, $\text{div}(\vec{b}(\vec{r}, \vec{c}))$ где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. а векторы \vec{b}, \vec{c} – постоянные векторы.

6.2.6. Найдите $\text{rot}\vec{r}$, $\text{rot}(r\vec{r})$, $\text{rot}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

6.2.7. Применяя оператор Гамильтона, докажите, что $\text{div}(u\vec{a}) = (\text{grad} u \cdot \vec{a}) + u \text{div} \vec{a}$, где u – дифференцируемое скалярное поле, \vec{a} – дифференцируемое векторное поле.

6.2.8. Применяя оператор Гамильтона, докажите, что $\text{rot}(u\vec{a}) = [\text{grad} u \cdot \vec{a}] + u \text{rot} \vec{a}$, где u – дифференцируемое скалярное поле, \vec{a} – дифференцируемое векторное поле.

6.2.9. Докажите, что $\text{div}[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{b} \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \text{rot} \vec{b}$, где \vec{a} и \vec{b} – дифференцируемые векторные поля.

6.3. Повторные операции.

6.3.1. Докажите, что $\text{div}(u \text{grad} v) = (\text{grad} u \cdot \text{grad} v) + u \Delta v$, где u, v – дважды дифференцируемые скалярные поля; Δ – оператор Лапласа.

6.3.2. Применяя оператор Гамильтона, докажите, что $\text{rot}(\text{rot} \vec{a}) = \text{grad} \text{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}$ где \vec{a} – дважды дифференцируемое векторное поле; Δ – оператор Лапласа.

6.3.3. Вычислите $\text{rot} \text{grad} u$, где u – дважды дифференцируемое скалярное поле.

6.3.4. Вычислите $\text{div} \text{rot} \vec{a}$, где \vec{a} – дважды дифференцируемое векторное поле.

- 6.4. Вычислите дивергенцию электрического поля \vec{E} точечного заряда e , помещенного в точку (x_0, y_0, z_0) .
- 6.5. Вычислите ротор векторного поля $\vec{a} = x\mathbf{i} + \frac{y}{y^2 + z^2}\mathbf{j} - \frac{z}{y^2 + z^2}\mathbf{k}$ в точках, где $y^2 + z^2 \neq 0$ и циркуляцию этого поля вдоль окружности $L: \{y^2 + z^2 = 1, x = x_0\}$.
- 6.6. Найдите поток векторного поля $\vec{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$: а) через внешнюю сторону боковой поверхности конуса $x^2 + y^2 \leq z^2$ ($0 \leq z \leq h$); б) через внутреннюю сторону основания этого конуса.
- 6.7. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ в направлении внешней нормали к поверхности: а) через боковую поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leq a^2$ ($0 \leq z \leq h$); б) через полную поверхность этого цилиндра.
- 6.8. Найдите поток векторного поля $\vec{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ через сферу $x^2 + y^2 + z^2 = x$ в направлении внешней нормали к поверхности.

7. Потенциальные векторные поля.

- 7.1. Проверьте, что векторное поле \vec{a} является потенциальным и найдите его скалярный потенциал.
- 7.1.1. $\vec{a} = 2xyz\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$
- 7.1.2. $\vec{a} = \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$ ($x^2 + y^2 \neq 0$)
- 7.1.3. $\vec{a} = yz(2x + y + z)\mathbf{i} + xz(x + 2y + z)\mathbf{j} + xy(x + y + 2z)\mathbf{k}$
- 7.2. Убедитесь, что векторное поле $\vec{a} = \frac{2}{(y+z)^{1/2}}\mathbf{i} - \frac{x}{(y+z)^{3/2}}\mathbf{j} - \frac{y}{(y+z)^{3/2}}\mathbf{k}$ является потенциальным и найдите работу этого поля вдоль пути, соединяющего точки $M(1, 1, 3)$ и $N(2, 4, 5)$ и расположенного в октанте $x > 0, y > 0, z > 0$.

8. Соленоидальные векторные поля.

- 8.1. Проверьте, что векторное поле $\vec{a} = ye^{x^2}\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - (2xyze^{x^2} + z^2)\mathbf{k}$ является соленоидальным.
- 8.2. Разложите векторное поле $\vec{a} = (x + y)\mathbf{i} + (x - y)\mathbf{j} + (z + 1)\mathbf{k}$ на сумму потенциального и соленоидального полей.
- 8.3. Проверьте, что векторное поле $\vec{a} = \frac{x}{x^2 + y^2}\mathbf{i} + \frac{y}{x^2 + y^2}\mathbf{j}$ является соленоидальным и найдите его векторный потенциал.

9. Числовые ряды

- 9.1. Найдите сумму ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} x^k$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$;

д) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}$.

- 9.2. Пользуясь критерием Коши, докажите сходимость ряда:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{2^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}.$$

9.3. Пользуясь критерием Коши, докажите, что ряд расходится:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

9.4. Исследуйте ряды на сходимость:

$$9.4.1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n};$$

$$9.4.2. \sum_{n=1}^{\infty} \sin n;$$

$$9.4.3. \sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2 \sin \frac{1}{n^2 + n + 1}\right);$$

$$9.4.4. \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2);$$

$$9.4.5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}};$$

$$9.4.6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000^n}{n!};$$

$$9.4.7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n};$$

$$9.4.8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n};$$

$$9.4.9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}};$$

$$9.4.10. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \sin \frac{1}{n};$$

$$9.4.11. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(2 + \frac{1}{n}\right)^{-n};$$

$$9.4.12. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2};$$

$$9.4.13. \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos^2 \frac{n\pi}{3};$$

$$9.4.14. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n}{2 + \cos n}\right)^{2n - \ln n};$$

$$9.4.15. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p} \quad p > 1;$$

$$9.4.16. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}, \quad p \leq 1;$$

$$9.4.17. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n};$$

$$9.4.18. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)};$$

$$9.4.19. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^p \ln \frac{n-1}{n+1}.$$

9.5. Исследуйте ряды на сходимость и абсолютную сходимость:

$$9.5.1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n},$$

$$9.5.2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+1}};$$

$$9.5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p};$$

$$9.5.4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p};$$

$$9.5.5. \sum_{n=0}^{\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n}\right);$$

$$9.5.6. \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right);$$

$$9.5.7. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{\ln n};$$

$$9.5.8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}};$$

$$9.5.9. \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + k^2}).$$

+

10. . Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Признаки сходимости.

10.1. Найдите предел и исследуйте на равномерную сходимость функциональную последовательность на заданном промежутке:

10.1.1. $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$.

10.1.2. $f_n(x) = e^{-nx}$ а) $x \in (0, 1)$; б) $x \in [1, \infty)$.

10.1.3. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0; 1]$.

10.1.4. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, а) $x \in [1; +\infty)$; б) $x \in [0; 1]$.

10.1.5. $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$, $x \in [0; +\infty)$.

10.1.6. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^4x^4}$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

10.2. Определите область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$.

10.3. Определите области абсолютной и условной сходимости функциональных рядов:

10.3.1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^x}$.

10.3.2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k^x + (-1)^k}$

10.4. Исследуйте ряды на равномерную сходимость.

10.4.1. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-kx}$, $x \in (0; +\infty)$.

10.4.2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2kx)}{k\sqrt{k}}$, $x \in (-\infty; +\infty)$

10.4.3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}x}{1+k^4x^2}$, $x \in (-\infty; +\infty)$

10.4.4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + \sqrt{x}}$, $x \in [0; +\infty)$

10.4.5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$, $x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$.

10.5. Определите радиус и интервал сходимости степенных рядов.

10.5.1. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k^2} x^k$

10.5.2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$

$$10.5.3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$$

11. Дифференцирование и интегрирование функциональных последовательностей и рядов. Предельный переход. Непрерывность.

11.1. Укажите область определения функции $f(x)$ и исследуйте функцию на непрерывность:

$$11.1.1. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \text{ где } x \in [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon], 0 < \varepsilon < 2\pi.$$

$$11.1.2. f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x},$$

$$11.1.3. f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^x},$$

11.2. Докажите, что функция $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную на всей прямой $(-\infty; \infty)$.

11.3. Укажите область сходимости и найдите сумму степенного ряда:

$$11.3.1. \sum_{k=1}^{\infty} x^k,$$

$$11.3.2. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!},$$

$$11.3.3. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

$$11.3.4. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k},$$

$$11.3.5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k},$$

$$11.3.6. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

$$11.3.7. \sum_{k=1}^{\infty} kx^k.$$

11.4. Получите разложение в степенной ряд функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Найдите

сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$. Указание: сначала разложите в степенной ряд производную

$f(x) = \operatorname{arctg} x$, а потом примените почленное интегрирование.

12. Сходимость в среднем.

12.1. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x) = x^n \sqrt{1-x}$ сходится в каждой точке и в среднем на сегменте $[0; 1]$ к функции $f(x) = 0$.

12.2. Докажите, что функциональная последовательность $f_n(x) = nx^n \sqrt{1-x}$ сходится в каждой точке сегмента $[0; 1]$ к функции $f(x) = 0$ и не сходится в среднем на сегменте $[0; 1]$ к этой функции.

13. Несобственные интегралы.

13.1. Исследуйте сходимость интегралов:

$$13.1.1. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx;$$

$$13.1.2. \int_0^{+\infty} \frac{x^3 + 1}{x^4 + 1} dx;$$

$$13.1.3. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^3)}{x^3 \sqrt{x}} dx;$$

$$13.1.4. \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^3)}{x^4 \sqrt{x}} dx;$$

$$13.1.5. \int_1^{+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx;$$

$$13.1.6. \int_1^{+\infty} (\sqrt{x^3+1} - \sqrt{x^3-1}) dx;$$

$$13.1.7. \int_0^{+\infty} x \sin(x^3) dx.$$

13.2. Докажите, что следующие интегралы сходятся:

$$13.2.1. \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx;$$

$$13.2.2. \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, \quad n > -1.$$

13.3. Докажите, что следующие интегралы сходятся, и вычислите их:

$$13.3.1. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx;$$

$$13.3.2. \int_0^1 \ln x dx;$$

$$13.3.3. \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx;$$

$$13.3.4. \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x dx.$$

13.4. Исследуйте интегралы на сходимость и вычислите в случае сходимости.

$$13.4.1. \int_1^{+\infty} \sin(\ln x) dx;$$

$$13.4.2. \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x} dx;$$

$$13.4.3. \int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln x)}{x^2} dx.$$

13.5. Найдите, при каких значениях параметра p сходятся интегралы:

$$13.5.1. \int_0^1 \frac{dx}{x^p}, \quad p > 0;$$

$$13.5.2. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p};$$

$$13.5.3. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p};$$

$$13.5.4. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(ax) dx}{x^p}, \quad a > 0.$$

13.6. Определите, при каких значениях параметра p интегралы сходятся

абсолютно и при каких p – условно:

$$13.6.1. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx ;$$

$$13.6.2. \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx .$$

14. Несобственные интегралы, зависящие от параметра.

14.1. Исследуйте интегралы на равномерную сходимость в указанных промежутках изменения параметра p , используя определение равномерной сходимости несобственного интеграла.

$$14.1.1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}, p \in (1; +\infty). \int_0^1 \frac{dx}{x^p}, p \in (0; 1);$$

$$14.1.2. \int_0^{+\infty} e^{-px} \sin x dx, \text{ а) } p \in (0; +\infty), \text{ б) } p \in [a; +\infty), a > 0;$$

$$14.1.3. \int_0^{+\infty} e^{-px} dx \text{ а) } p \in (0; +\infty); \text{ б) } p \in [a; +\infty), a > 0.$$

14.2. Исследуйте интегралы на равномерную сходимость в указанных промежутках изменения параметра p , используя признаки равномерной сходимости интеграла.

$$14.2.1. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx, p \in [a; +\infty), a > 0;$$

$$14.2.2. \int_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{1-x}} dx, p \in [0; +\infty);$$

$$14.2.3. \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} e^{-px} dx, p \in [0; +\infty).$$

14.3. Докажите, что функция $f(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(px)}{1+x^2} dx$ непрерывна на промежутке $p \in (-\infty; +\infty)$.

14.4. Для каких значений p сходится интеграл $\int_0^1 x^p (\ln x)^2 dx$? Вычислите его, дифференцируя по параметру интеграл $\int_0^1 x^p dx$. Обоснуйте возможность применения этого метода.

14.5. Для каких значений q сходится интеграл $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \sin qxdx$? Вычислите его, дифференцируя по параметру интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos qxdx$. Обоснуйте возможность применения этого метода.

14.6. Вычислите:

$$14.6.1. \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx, \text{ дифференцируя по параметру интеграл } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2} dx ;$$

$$14.6.2. \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \text{ дважды дифференцируя по параметру интеграл } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2} dx .$$

$$14.6.3. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-px} dx, p > 0, \text{ дифференцируя по параметру.}$$

14.7. Укажите область сходимости следующих интегралов и выразите их через интегралы Эйлера:

14.7.1. $\int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t^2} dt$;

14.7.2. $\int_0^{+\infty} e^{-x^p} dx$;

14.7.3. $\int_0^1 (-\ln t)^p dt$;

14.7.4. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^q} dx$;

14.7.5. $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^q} dx$;

14.7.6. $\int_0^1 (1-x^p)^{\left(\frac{-1}{p}\right)} dx, p > 0$.

15. Ряды Фурье.

15.1. Найдите ряд Фурье функций $f(x)$, нарисуйте график суммы ряда Фурье:

15.1.1. $f(x) = \cos^2 x$;

15.1.2. $f(x) = 1, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), f(x) = -1, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right), f(x+2\pi) = f(x)$;

15.1.3. $f(x) = x, x \in [-\pi; \pi), f(x+2\pi) = f(x)$;

15.1.4. $f(x) = \frac{\pi}{2} + x, x \in [-\pi; 0), f(x) = \frac{\pi}{2} - x, x \in [0; \pi), f(x+2\pi) = f(x)$.

15.2. Найдите разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по косинусам кратных дуг и нарисуйте график суммы ряда Фурье:

15.2.1. $f(x) = x, x \in [0; \pi]$;

15.2.2. $f(x) = \sin x, x \in [0; \pi]$.

15.3. Найдите разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье по синусам кратных дуг и нарисуйте график суммы ряда Фурье:

15.3.1. $f(x) = 1, x \in [0; \pi]$;

15.3.2. $f(x) = x, x \in [0; \pi]$;

15.3.3. $f(x) = \cos x, x \in [0; \pi]$.

15.4. Пусть $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \varphi_k$ – ряд Фурье функции $f(x), x \in [0; \pi]$, по ортогональной

системе функций $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, x \in [0; \pi], n \geq 1$. Найдите $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2$ для

следующих функций:

15.4.1. $f(x) = x$;

15.4.2. $f(x) = x(\pi - x)$.

16. Интеграл Фурье.

16.1. Представьте интегралом Фурье функцию $f(x)$:

16.1.1. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$;

$$16.1.2. \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| < 1; \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

16.2. Найдите преобразование Фурье функций $f(x)$:

$$16.2.1. \quad f(x) = e^{-p|x|}, \quad p > 0;$$

$$16.2.2. \quad f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$16.2.3. \quad f(x) = e^{-p|x|} \sin \beta x, \quad p > 0;$$

$$16.2.4. \quad f(x) = 1, \quad x \in [-p; p], \quad f(x) = 0, \quad x \notin [-p; p].$$