2. Математические модели теории нелинейных волн.

1. Метод характеристик.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}\ , \quad -\infty < x < \infty\ , t > 0 \qquad (1)$$

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at) \qquad (2)$$

Уравнение переноса:

$$u_t^{(1)} + a u_x^{(1)} = 0\ , \quad u^{(1)}(x,t) = f_1(x - at) \qquad (3)$$

$$u_t^{(2)} - a u_x^{(2)} = 0\ , \quad u^{(2)}(x,t) = f_2(x + at) \qquad (4)$$

Квазилинейное уравнение переноса:

$$u_t + F(u) u_x = 0 \qquad (5)$$

Задача Коши:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0\,, \quad -\infty < x < \infty\,, t > 0, & (6) \\ u(x,0) = u_0(x), \ -\infty < x < \infty\,, & (7) \end{cases}$$

$$u(x,t) = f\,(x - u(x,t)t)$$

$$\begin{aligned} u_x &= (1 - u_x t)\, f'(\xi)\,, \\ u_t &= (-u - u_t t)\, f'(\xi) \end{aligned} \qquad \xi = x - ut. \qquad (8)$$

(6),(8) =>

$$-t(u_t + uu_x)\, f'(\xi) = 0,$$

где $f\,(\xi)$ **- любая дифференцируемая функция.**

Решение задачи (6), (7) определяется из неявного уравнения

$$u(x,t) = u_0(x - u(x,t)t)$$

Метод характеристик:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u(x,t)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = u(x,t) \qquad (9)$$

$x = x(t)$ - **решение уравнения (9) =>**

$$\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_t + u_x \frac{dx}{dt} = u_t + u\,u_x\Big|_{x=x(t)} = 0 \;\Rightarrow$$

$u(x(t),t)$ **константа на кривой** $x = x(t)$ => $x = x(t) -$

прямая линия на плоскости (x,t) **с наклоном**

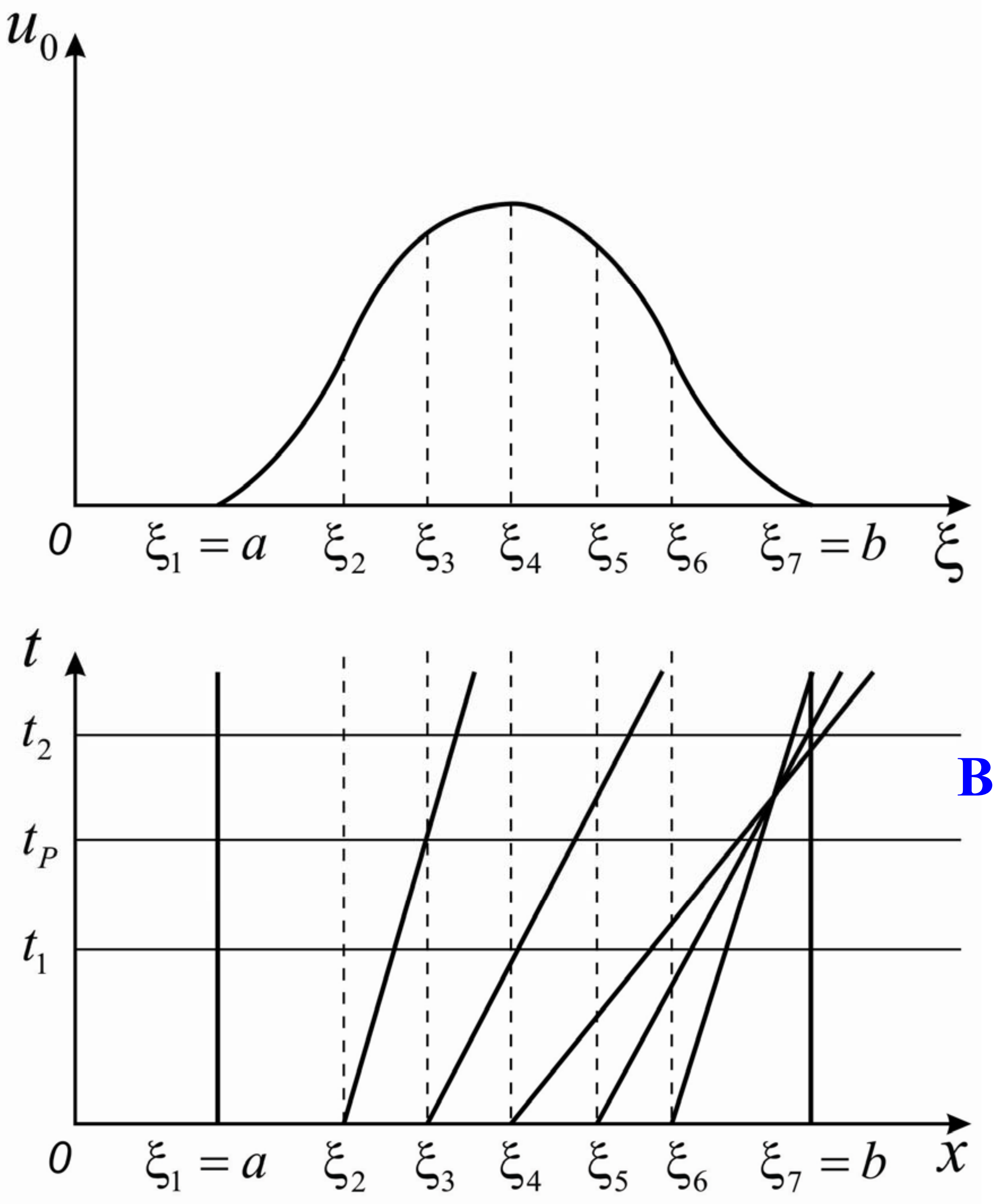
$$u(x(t),t) = u(x(0),0) = u_0(x(0)),$$

определяемым начальной функцией $\boldsymbol{u_0(\xi)}$ **,** $\boldsymbol{\xi = x(0)}$**.**

Уравнение прямой:

$$\frac{t}{1} = \frac{x-\xi}{u_0(\xi)}$$

Мы получили однопараметрическое семейство прямых, зависящих от параметра ξ, на которых решение *u(x,t)* уравнения (6) оказывается постоянным. Это позволяет по начальной функции $u_0(\xi)$ определить функцию *u(x,t)* в любой момент времени *t*.



Выберем точку

$$\xi_k \in [a,b]$$

и построим соответствующую ей характеристику

$$\Gamma_{\xi_k} : x = \xi_k + t u_0(\xi_k)$$

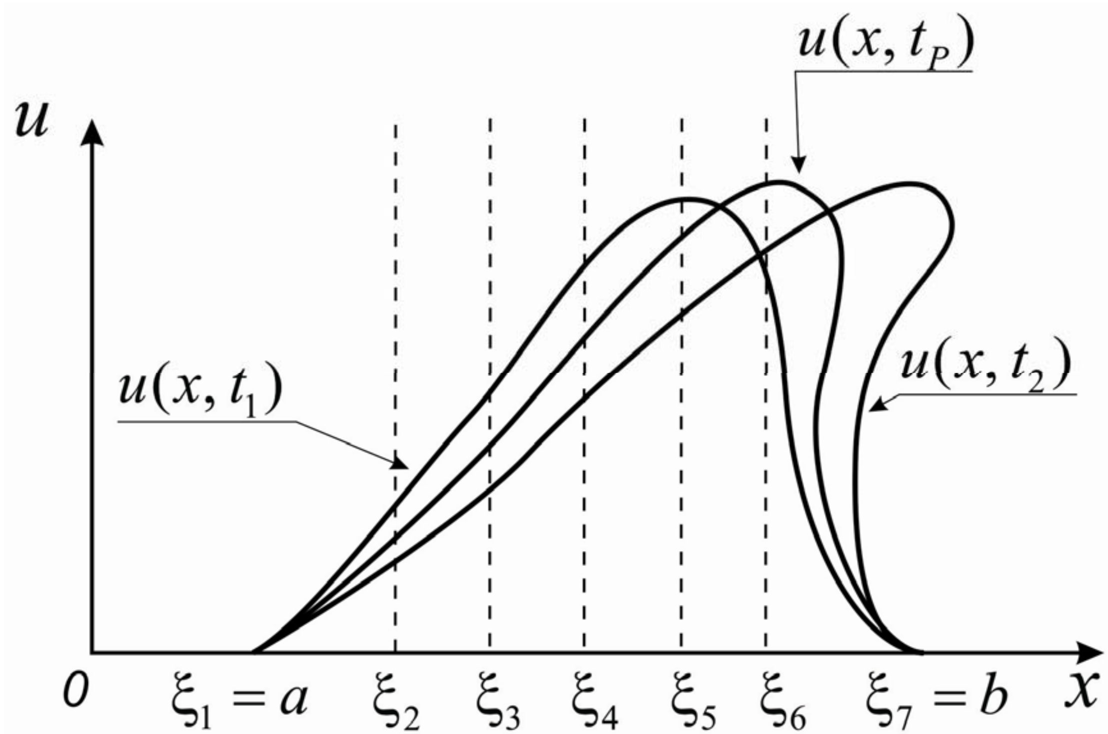
с углом наклона

$$tg\varphi = 1/u_0(\xi_k).$$

Всюду на характеристике

$$u_{\Gamma_{\xi_k}} = u_0(\xi_k).$$

Точка (x_k, t_1) – точка пересечения прямой $t=t_1$ с характеристикой $\Gamma_{\xi k}$.



Скорость переноса начального значения $u_0(\xi_k)$ вдоль характеристики Γ_{ξ_k} зависит от решения, профиль $u_0(x)$ искажается – дисперсия бегущей волны. При $t \geq t_p$ характеристики пересекаются, профиль неоднозначный – опрокидывание волн.

2. Обобщенное решение . Условие на разрыве.

Обобщенное решение: функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (6) в обобщенном смысле, если для любого прямоугольника $\Pi_{xt}=\{(x,t): x_1<x<x_2,\ 0<t_1<t<t_2\}$ и любой бесконечно дифференцированной в Π_{xt} функции $\psi(x,t)$ справедливо интегральной тождество:

$$\int\limits_{\Pi_{xt}}\left\{u\psi_t+\frac{1}{2}u^2\psi_x\right\}dxdt=0 \qquad (10)$$

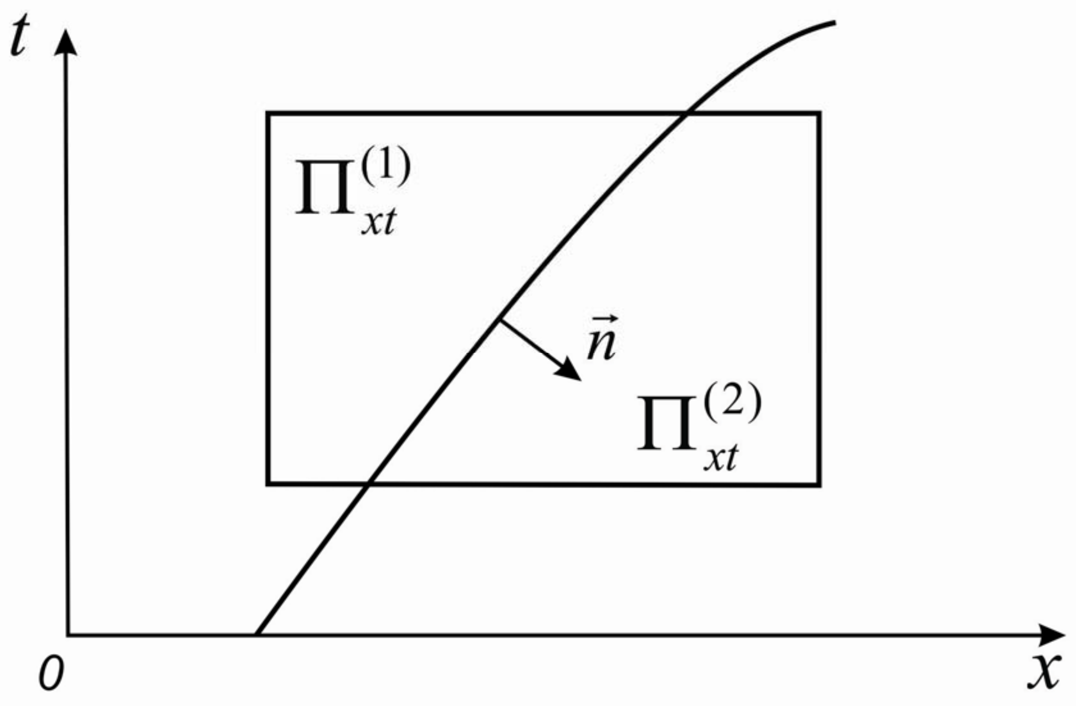
Если $u\in C^{(1)}$, то обобщенное решение (10) удовлетворяет уравнению (6) в обычном смысле: проинтегрируем (10) по частям.

$$\int\limits_{\Pi_{xt}}\{u_t+uu_x\}\psi\, dxdt=0 \qquad (11)$$

В силу произвольности Π_{xt} и ψ из (11) получим (6).

Пусть ***u(x,t)*** **– разрывное решение, имеющее единственный разрыв на кривой** $S=\{(x,t): x=s(t)\}$**.**

Пусть $u(x,t)\in C^{(1)}$ **при** $(x,t)\in \Pi_{x,t}^{(\ell)}$, $\ell=1,2$ **.**



Функция ***u(x,t)*** **в областях** $\Pi_{x,t}^{(\ell)}$, $\ell=1,2$ **удовлетворяет уравнению (6).**

Проинтегрируем (10) по частям в области $\Pi_{x,t}^{(1)}$:

$$\int\limits_{\Pi_{xt}^{(1)}} \left\{ u\psi_t + (1/2)u^2\psi_x \right\} dxdt = \qquad (12)$$

$$= \int\limits_S \left\{ \psi \cos(\hat{nt})u^- + (1/2)\psi \cos(\hat{nx})(u^-)^2 \right\} ds$$

и в области $\Pi_{x,t}^{(2)}$:

$$\int\limits_{\Pi_{xt}^{(2)}} \left\{ u\psi_t + (1/2)u^2\psi_x \right\} dxdt = \qquad (13)$$

$$= -\int\limits_S \left\{ \psi \cos(\hat{nt})u^+ + (1/2)\psi \cos(\hat{nx})(u^+)^2 \right\} ds,$$

где $\vec{n} = \left\{ \cos(\hat{nx}), \cos(\hat{nt}) \right\}$, u^+, u^- **- предельные значения** $\boldsymbol{u(x,t)}$ **на кривой** $\boldsymbol{S}$ **при стремлении к ней справа и слева.**

Сложим (12) и (13):

$$\int_S \psi \left\{ \cos(\widehat{nt})\left[u\right] + \cos(\widehat{nx})\left[\frac{u^2}{2}\right] \right\} ds = 0, \tag{14}$$

где $\left[u\right] = u^+ - u^-$ **. В силу произвольности** $\psi(x, y)$ **из (14) =>**

$$\cos(\widehat{nt})\left[u\right] + \cos(\widehat{nx})\left[\frac{u^2}{2}\right]\Bigg|_S = 0. \tag{15}$$

Так как

$$\cos(\widehat{nt}) = \frac{-\dot{s}(t)}{\sqrt{1 + \dot{s}^2(t)}}, \quad \cos(\widehat{nx}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{s}^2(t)}}, \tag{16}$$

то (15), (16) =>

$$\dot{s}(t) = \frac{u^+ + u^-}{2}, \qquad (17)$$

где $V_p = \dot{s}(t)$ **- скорость распространения разрыва.**

Формула (17) называется формулой Гюгонио – Ренкина или формулой условий на разрыве.

Формула (17) позволяет определить скорость распространения разрыва по значениям $u^{\pm}$ **, но не дает ответа на вопрос о положении разрыва** $x=s(t)$**.**

Построение разрыва:

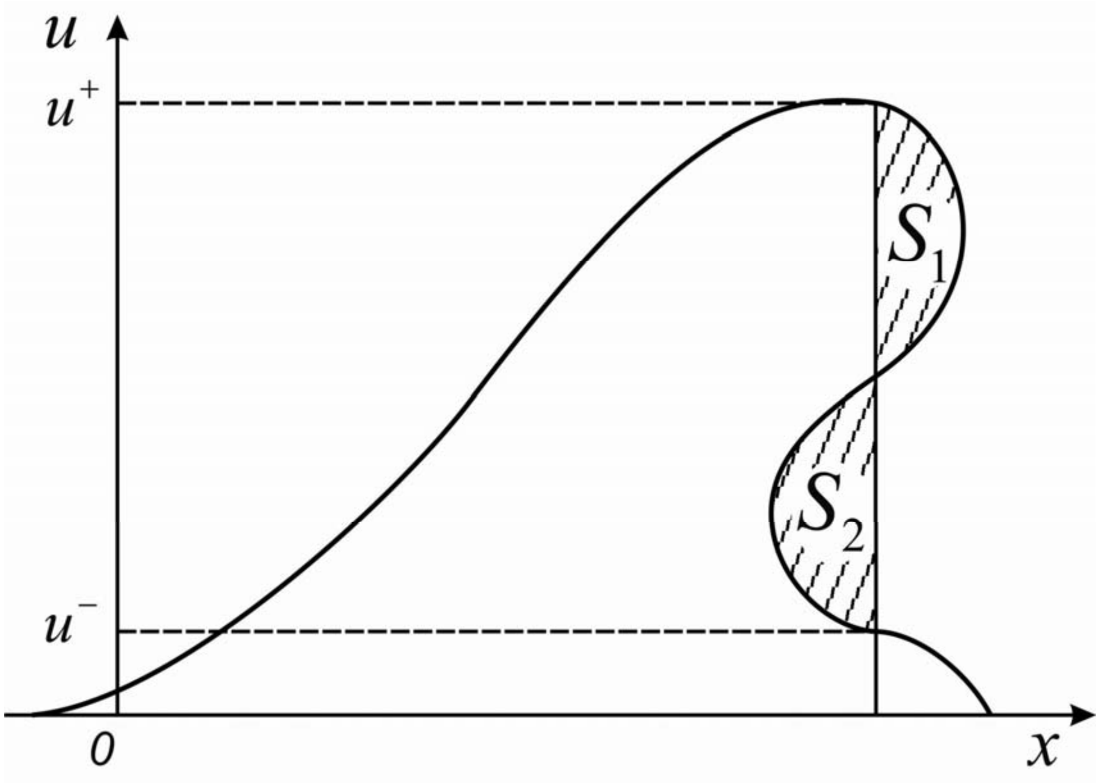
(6) =>

$$\frac{\partial}{\partial t}u+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{+\infty}udx=0\,, \quad I=\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}u_0(x)dx,$$

предполагая, что $u\to 0$ **при** $x\to\pm\infty$.

Площадь $\boldsymbol{I}$ **под кривой** $\boldsymbol{u=u(x,t)}$ **оказывается инвариантной во времени (интегралом движения).**



Разрыв ***x=s(t)*** **нужно построить так, чтобы** ***I(u),*** **отвечающий разрывному решению, был равен** ***I(u_0)*** **для начальной функции** $\boldsymbol{u_0}$ **.**

В результате из неоднозначного непрерывного решения получается разрывное, но уже однозначное решение, являющиеся обобщенным решением уравнения (6). Условие на разрыве при этом выполняется автоматически.

3. Уравнение Кортевега – де Фриза и законы сохранения.

Функция $\eta(x,t)$ **, описывающая процесс распространения длинных волн на поверхности воды, приближенно удовлетворяет уравнению**

$$\eta_t + c_0\left(1 + \frac{3}{2h_0}\eta\right)\eta_x + \frac{h_0^2}{6}c_0\eta_{xxx} = 0\,, \qquad (18а)$$

где h_0 **- глубина жидкости,** $c_0 = \sqrt{gh_0}$ **- скорость длинных волн на мелкой воде.**

Уравнение (18а) называется уравнением Кортевега - де Фриза.

Из (18а) с помощью линейной замены переменных получим:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0\,, \qquad (18б)$$

(18б) – канонический вид уравнениея Кортевега - де Фриза.

Уравнение (18б) обладает бесконечным числом интегралов движения (законов сохранения):

$$I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x,t)dx,$$

и т.д., что означает, что это уравнение обладает глубокой внутренней симметрией, которая выделяет его среди других нелинейных уравнений.

4. Схема метода обратной задачи.

1. Прямая и обратная задачи рассеяния.

Определение. **Функция *f(x,t)* называется быстроубывающей, если**

$$\max_{0\le t\le T}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1+|x|\right)|f(x,t)|\,dx<\infty. \qquad (19)$$

С уравнением Кортевега–де Фриза тесно связано стационарное уравнение Шредингера (20):

$$\psi_{xx}+(\lambda-u(x,t))\psi=0 \qquad (20)$$

с потенциалом *u(x,t)*, зависящим от *t* как от параметра.

Рассмотрим для уравнения (20) две задачи:

а) Нахождение квантовомеханических уровней энергии связанных состояний.

Найти такие значения λ, при которых уравнение (20) имеет нетривиальные решения $\psi(x,t) \in L_2(\mathbb{R}^1)$. Здесь $\psi(x,t)$ – -нормированные на единицу волновые функции.

Эта задача имеет решение только при $\lambda < 0$.

При $x \to \infty$ решения имеют асимптотику:

$$\psi_m(x,t) \sim C_m(t) e^{-æ_m x},$$

где $\psi_m(x,t)$ - собственная функция, нормированная на 1, $\lambda_m = -æ_m^2$ – собственное значение,

$$C_m(t) = \lim_{x \to \infty} \psi_m(x,t) e^{æ_m x} \qquad (21)$$

б) Задача рассеяния плоской волны единичной амплитуды на потенциале *u(x,t)*.

Найти при $\lambda \geq 0$ ограниченные решения уравнения (20) с заданным характером асимптотического поведения при $x \to \pm\infty$ (временная зависимость $e^{-i\omega t}$ волна движется справа налево):

$$\psi(x,t) \sim e^{-ikx} + b(k,t)e^{ikx}, \quad x \to +\infty,$$
$$\psi(x,t) \sim a(k,t)e^{-ikx}, \quad x \to -\infty,$$

где $k^2 = \lambda$, а подлежащие определению функции $a(k,t)$ и $b(k,t)$ - коэффициенты прохождения и отражения, причем

$$|a(k,t)|^2 + |b(k,t)|^2 = 1.$$

Совокупность решений задач а) и б) $\{\text{æ}_m, C_m\}$, $\{a(k,t), b(k,t)\}$ называются данными рассеяния.

Прямая задача рассеяния: определение для заданного потенциала данных рассеяния.

Обратная задача рассеяния: определение по заданным данным рассеяния соответствующего потенциала.

Данных рассеяния достаточно для однозначного определения потенциала.

Схема решения обратной задачи рассеяния.

а) По данным рассеяния строится функция *B(x;t)*– ядро уравнения Гельфанда – Левитана:

$$B(x;t) = \sum_{m=1}^{n} C_m^2(t) e^{-æ_m x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} b(k,t) e^{ikx} dk \qquad (22)$$

б) Ищется решение линейного интегрального уравнения Гельфанда – Левитана:

$$K(x,y;t)+B(x+y;t)+\int_x^{\infty}B(y+z;t)K(x,z;t)dz=0 \quad (23)$$

в) Решив уравнение (23) и найдя *K(x,y;t)*, по формуле (24)

$$u(x,t)=-2\frac{d}{dx}K(x,x;t) \quad (24)$$

определяем функцию *u(x,t)*, которая и является искомым потенциалом, то есть решением обратной задачи рассеяния.

2. Решение задачи Коши.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \qquad (25)$$

Решение *u(x,t)* задачи Коши (25) назовём быстроубывающим, если функция *u(x,t)* и все её производные по *x* до третьего порядка являются быстроубывающими функциями.

Теорема1.

Если потенциал *u(x,t)* в (20) является быстроубывающим решением уравнения Кортевега – де Фриза, то собственные значения $\lambda_m = -æ_m^2$ **не зависят от времени *t*.**

Теорема 2.

Если потенциал *u(x,t)* в (20) является быстроубывающим решением уравнения Кортевега – де Фриза, то данные рассеяния $C_m(t), b(k,t)$ **и** $a(k,t)$ **зависят от времени следующим образом:**

$$C_m(t) = C_m(0)\exp(4\text{æ}_m^3 t), \quad \text{æ}_m^2 = -\lambda_m,$$

$$b(k,t) = b(k,0)\exp(i\,8k^3 t), \quad k^2 = \lambda > 0, \tag{26}$$

$$a(k,t) = a(k,0)$$

Зная данные рассеяния для $u_0(x) \equiv u(x,0)$ **, можно по формулам (26) найти данные рассеяния для *u(x,t)* и затем, построив и решив уравнение Гельфанда – Левитана, определить функцию *u(x,t)*.**

Схема построения быстроубывающих решений задачи Коши:

а) Рассматриваем стационарное уравнение Шредингера с потенциалом $u_0(x)$:

$$\psi_{xx} + (\lambda - u_0(x))\psi = 0 \tag{27}$$

и определяем данные рассеяния $\{æ_m, C_m(0)\}$ и $\{a(k,0), b(k,0)\}$.

б) По формулам (26) определяем $C_m(t)$ и $b(k,t)$ и строим ядро уравнения Гельфанда - Левитана (23):

$$B(x;t) = \sum_{m=1}^{n} C_m^2(0)\exp(8æ_m^3 t - æ_m x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} b(k,0)\exp(i8k^3 t + ikx)dk \tag{28}$$

в) Решив уравнение Гельфанда – Левитана (23) с ядром (28), по формуле (24) определяем решение *u(x,t)* задачи Коши (25) для уравнения Кортевега – де Фриза.

5. Солитонные решения.

Рассмотрим решение задачи Коши (25) при

$$u_0(x) = -\frac{2}{ch^2 x} \tag{29}$$

Данные рассеяния для уравнения (20) с потенциалом (29)

$$\psi_{xx} + \left(\lambda + \frac{2}{ch^2 x}\right)\psi = 0 \tag{30}$$

имеют вид: *b(k,0)=0*, существует только одно собственное значение $\lambda_1 = -1 = -æ_1^2,\ C_1(0) = \sqrt{2}$ **.**

Ядро уравнения Гельфанда – Левитана имеет вид

$$B(x;t) = 2e^{8t - x} \tag{31}$$

Рассмотрим уравнение Гельфанда – Левитана с ядром (31):

$$K(x,y;t)+2e^{8t-x-y}+2e^{2t-y}\int_x^{\infty}K(x,z;t)e^{-z}dz=0 \qquad (32)$$

и будем искать его решение в виде

$$K(x,y;t)=L(x;t)e^{-y}. \qquad (33)$$

Получим

$$L(x;t)=-\frac{2e^{x}}{1+e^{2x-8t}} \qquad (34)$$

Следовательно,

$$K(x,y;t)=-\frac{2e^{x-y}}{1+e^{2x-8t}} \qquad (35)$$

и по формуле (24) получим решение задачи Коши (25) с начальной функцией (29):

$$u(x,t)=-2\frac{d}{dx}\left\{-\frac{2}{1+e^{2x-8t}}\right\}=-\frac{2}{ch^2(x-4t)}. \qquad (36)$$

Решение (36) является частным случаем более общего решения уравнения Кортевега – де Фриза

$$u(x,t) = -\frac{1}{2}\alpha^2 \frac{1}{ch^2\left\{\frac{1}{2}\alpha(x-x_0)-\frac{\alpha^3}{2}t\right\}}, \qquad (37)$$

соответствующее значение параметров $\alpha = 2,\ x_0 = 0$ **.**

Решения уравнения Кортевега – де Фриза вида (37) получили название солитонов. Они описывают бегущие волны неизменной формы, имеющие скорость, прямо пропорциональную амплитуде решения.

Будем называть солитонами такие решения нелинейных уравнений , которые имеют вид бегущих уединенных волн, взаимодействующих таким образом, что после взаимодействия они сохраняют неизменной свою форму, получая лишь приращения в фазах.