2.Общая задача Коши. Функция Римана.

1.Функция Римана.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{xy} = f(x,y), \quad (x,y) \in D^+, & (1) \\ u(x,y) = \varphi(x,y), \quad (x,y) \in C, & (2) \\ \frac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \psi(x,y), \quad (x,y) \in C. & (3) \end{cases}$$

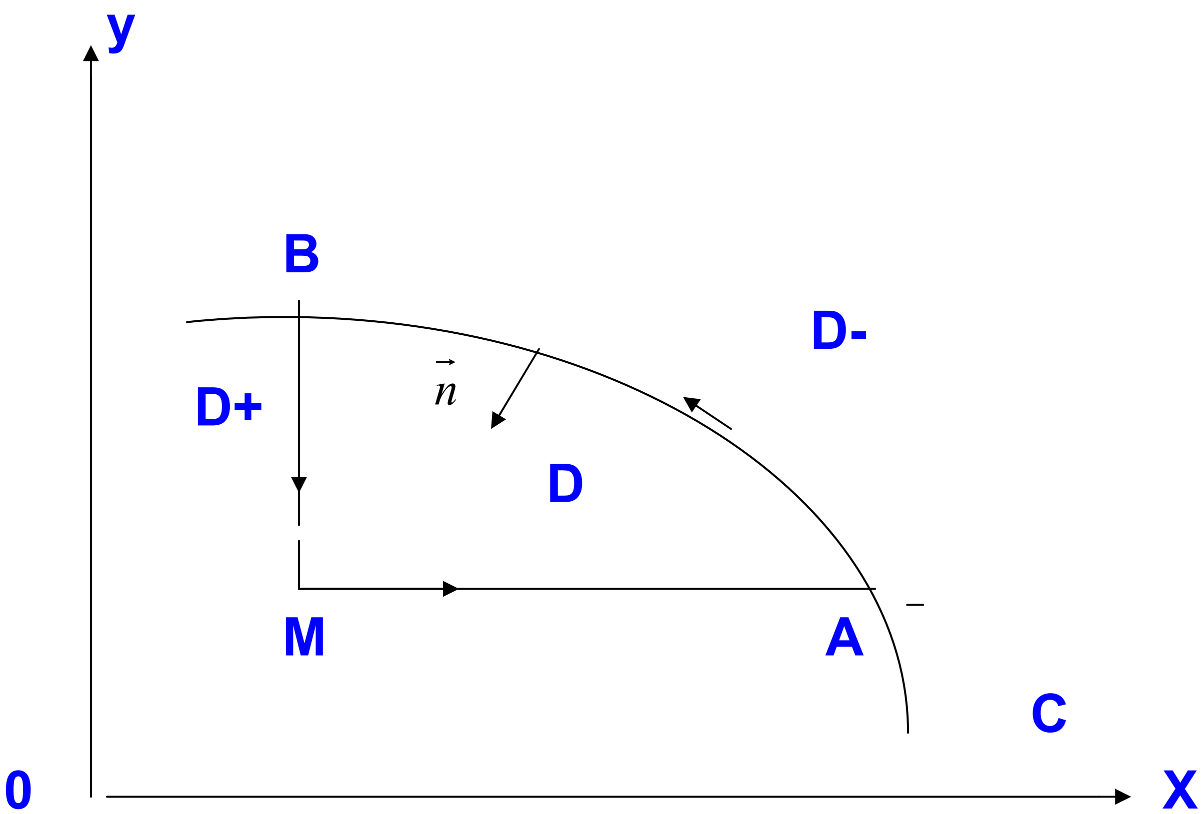
Кривая *C* – бесконечно гладкая кривая, делящая плоскость *(x,y)* на две криволинейные полуплоскости *D+* и *D-* и удовлетворяющая условиям:

а) кривая *C* не является характеристикой уравнения (1);

б) любая характеристика уравнения (1) пересекает кривую *C* только 1 раз.

в формуле (3) $\dfrac{\partial}{\partial n}$ - производная по нормали к кривой С, направленная внутрь области *D*+.

Построим формулу, выражающую решение задачи (1) – (3) в любой точке *M* области *D*+.



Рассмотрим выражение

$$Vu_{xy} - uV_{xy} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right\}, \tag{4}$$

где

$$P\left[u,V\right] = V_x u - Vu_x, \tag{5}$$

$$Q\left[u,V\right] = Vu_y - V_y u. \tag{6}$$

Формула Грина:

$$\int_D \left(Vu_{xy} - uV_{xy}\right)dxdy = \frac{1}{2}\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_\Gamma Pdx + Qdy,$$

где $\overline{D} = D \cup \Gamma.$

Рассмотрим интегралы вдоль характеристик *AM* и *BM*:

$$\int_M^A P dx = \int_M^A \left(V_x u - V u_x\right) dx = \left(Vu\right)_M - \left(Vu\right)_A + 2\int_M^A V_x u dx \qquad \textbf{(7)}$$

$$\int_B^M Q dy = \int_B^M \left(u_y V - u V_y\right) dy = \left(Vu\right)_M - \left(Vu\right)_B - 2\int_B^M u V_y dy \qquad \textbf{(8)}$$

(6)-(8) $\Rightarrow$

$$\int_D \left(V u_{xy} - u V_{xy}\right) dx dy = \left(Vu\right)_M - \frac{\left(Vu\right)_A + \left(Vu\right)_B}{2} + \frac{1}{2}\int_{AB} P dx + Q dy + \int_M^A V_x u dx - \int_B^M u V_y dy \qquad \textbf{(9)}$$

Пусть *u(x,y)*-решение задачи (1)-(3), а *V(x,y)*-решение задачи (10) с данными на характеристиках (задача Гурса):

$$V_{xy} = 0, \ (x, y) \in D,$$

$$V_x\big|_{AM} = 0, \ V_y\big|_{BM} = 0, \ V(M) = 1 \qquad \textbf{(10)}$$

Функция *V=1* в области *D* удовлетворяет всем условиям задачи (10) и представляет собой частный случай функции Римана.

Подставим *V*=1 в (9) $\Rightarrow$

$$\int\limits_D u_{xy}\,dxdy = u(M) - \frac{u(A)+u(B)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_{AB}\left(-u_x dx + u_y dy\right)$$

(1)-(3) $\Rightarrow$

$$u(M) = \frac{\varphi(A)+\varphi(B)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_{AB}\left(-u_x dx + u_y dy\right) + \int\limits_D f(x,y)\,dxdy \qquad \textbf{(11)}$$

На дуге *AB* известны выражения

$$u_x = u_\tau \cos\left(\widehat{\tau, x}\right) + u_n \cos\left(\widehat{n, x}\right), \quad u_y = u_\tau \sin\left(\widehat{\tau, x}\right) + u_n \sin\left(\widehat{n, x}\right)$$

Формула (11) даёт решение задачи (1)- (3) через входные данные.

Замечание. Из формулы (11) следует:

1) Теорема единственности решения задачи (1)-(3);
2) Теорема устойчивости решения задачи (1)-(3);
3) Теорема существования решения задачи (1)-(3) (при выполнении условия гладкости входных данных.

Рассмотрим более общую задачу:

$$L[u] \equiv u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), (x,y) \in D^+ \quad (12)$$

$$u(x,y) = \varphi(x,y), \ (x,y) \in C, \quad (13)$$

$$\tfrac{\partial u}{\partial n}(x,y) = \psi(x,y), \ (x,y) \in C. \quad (14)$$

Определение. Два дифференциальных оператора *L* и *K* называются сопряженными, если разность $VL[u]-uK[V]$ является разностью первых частных производных по *X* и *Y* от некоторых выражений *P* и *Q*:

$$VL[u]-uK[V] = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right), \quad (15)$$

Причем *P* не содержит производной *Uy*, а *Q* не содержит производной *Ux*.

Сопряженным к оператору *L* будет оператор *K*:

$$K[V] = V_{xy} - (aV)_x - (bV)_y + cV \qquad \textbf{(16)}$$

Для операторов *L* и *K* выполняется (15) при

$$P[u,V] = uV_x - u_xV - 2buV,\ Q[u,V] = Vu_y - V_yu + 2auV. \qquad \textbf{(17)}$$

Формула Грина:

$$\int_D \{VL[u] - uK[V]\}dxdy = \tfrac{1}{2}\int_D \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \tfrac{1}{2}\int_\Gamma Pdx + Qdy =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_M^A Pdx + \tfrac{1}{2}\int_{AB} Pdx + Qdy + \tfrac{1}{2}\int_B^M Qdy. \qquad \textbf{(18)}$$

Интегрируем по частям:

$$\int_M^A Pdx = u(M)V(M) - u(A)V(A) + 2\int_M^A P_1[V]udx,$$

$$\int_B^M Qdy = u(M)V(M) - u(B)V(B) - 2\int_B^M Q_1[V]udy, \qquad \textbf{(19)}$$

где

$$P_1[V] = V_x - bV, \quad Q_1[V] = V_y - aV. \qquad \textbf{(20)}$$

Рассмотрим задачу с данными на характеристиках (задачу Гурса):

$$K[V] = 0 \quad , \qquad (x, y) \in D,$$

$$P_1[V] = 0 \text{ на } AM \quad , Q_1[V] = 0 \text{ на } MB \quad , \left. V \right|_M = 1. \qquad \textbf{(21)}$$

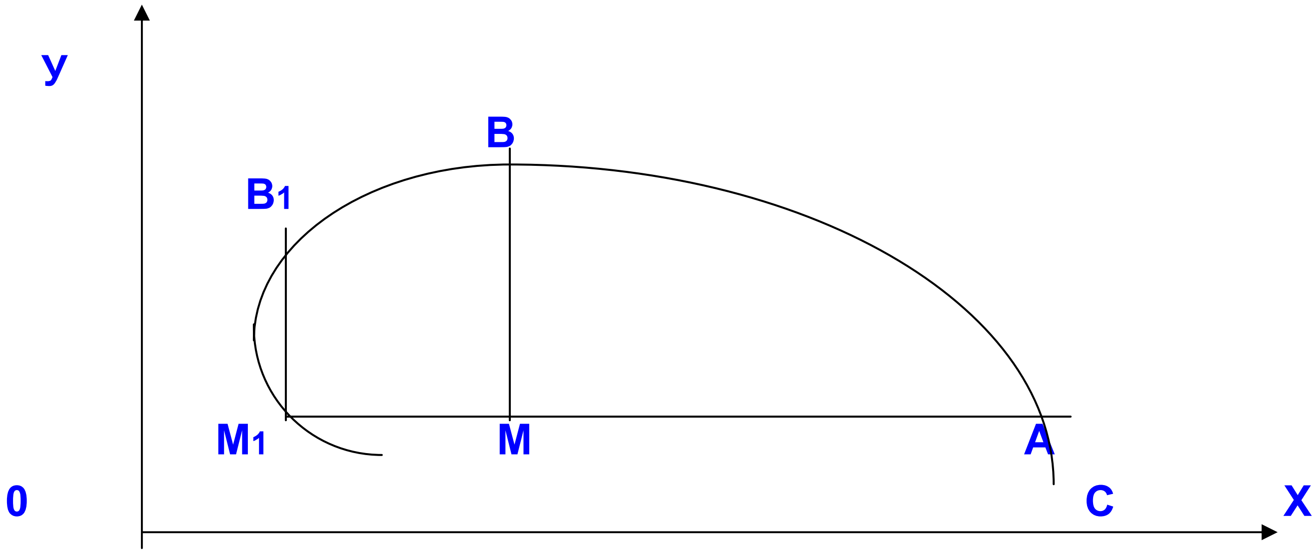
Можно показать, что решение задачи (21) всегда существует. Оно называется функцией Римана. Функция *$V(M,M_1)$* удовлетворяет по координатам точки *M_1* задаче (21) и зависит от точки *M* как от параметра.

$$(18)-(21),(12) \Rightarrow u(M) = \frac{(\varphi V)_A + (\varphi V)_B}{2} +$$

$$+ \int_D V(M, M_1) f(M_1) d\sigma_{M_1} - \frac{1}{2} \int_{AB} Pdx + Qdy. \qquad \textbf{(22)}$$

Интеграл по *AB* легко вычисляется, поскольку функции V, φ, ψ известны.

Замечание. Любая характеристика уравнения (12) должна пересекать кривую *C* не более одного раза.



Если характеристика пересекает кривую *C* в двух точках *A* и *M1*, то значение *u(M1)* не может быть задано произвольно, а определяется по формуле:

$$u(M_1) = \frac{u(A)V(A) + u(B_1)V(B_1)}{2} + \int\limits_{D_1} Vf dx dy - \frac{1}{2} \int\limits_{AB_1} P dx + Q dy \quad \mathbf{(23)}$$

с начальным значением, заданным на дуге *AB1* и функцией *f(x,y)*, заданной в области *D1* – криволинейном треугольнике *M1B1A*.

2. Физический смысл функции Римана.

Рассмотрим задачу:

$$L[u] = f, \ (x, y) \in D^+, \quad u\big|_C = 0, \quad u_n\big|_C = 0.$$

$$(22) \ \Rightarrow \ u(M) = \int_D V(M, Q) f(Q) d\sigma_Q \qquad (24)$$

Пусть $f_\varepsilon(M)$ **- локальная функция точки** ***M1*****:** $f_\varepsilon(M) = 0, M \notin S_{M_1}^\varepsilon,$

где $S_{M_1}^\varepsilon$ **- окрестность точки** ***M1*****.**

Условие нормировки:

$$\int_{S_{M_1}^\varepsilon} f_\varepsilon(Q) d\sigma_Q = 1, \quad \forall \varepsilon > 0. \qquad (25)$$

$$u_\varepsilon(M)=\int\limits_{S^\varepsilon_{M_1}} V(M,Q)f_\varepsilon(Q)d\sigma_Q=$$

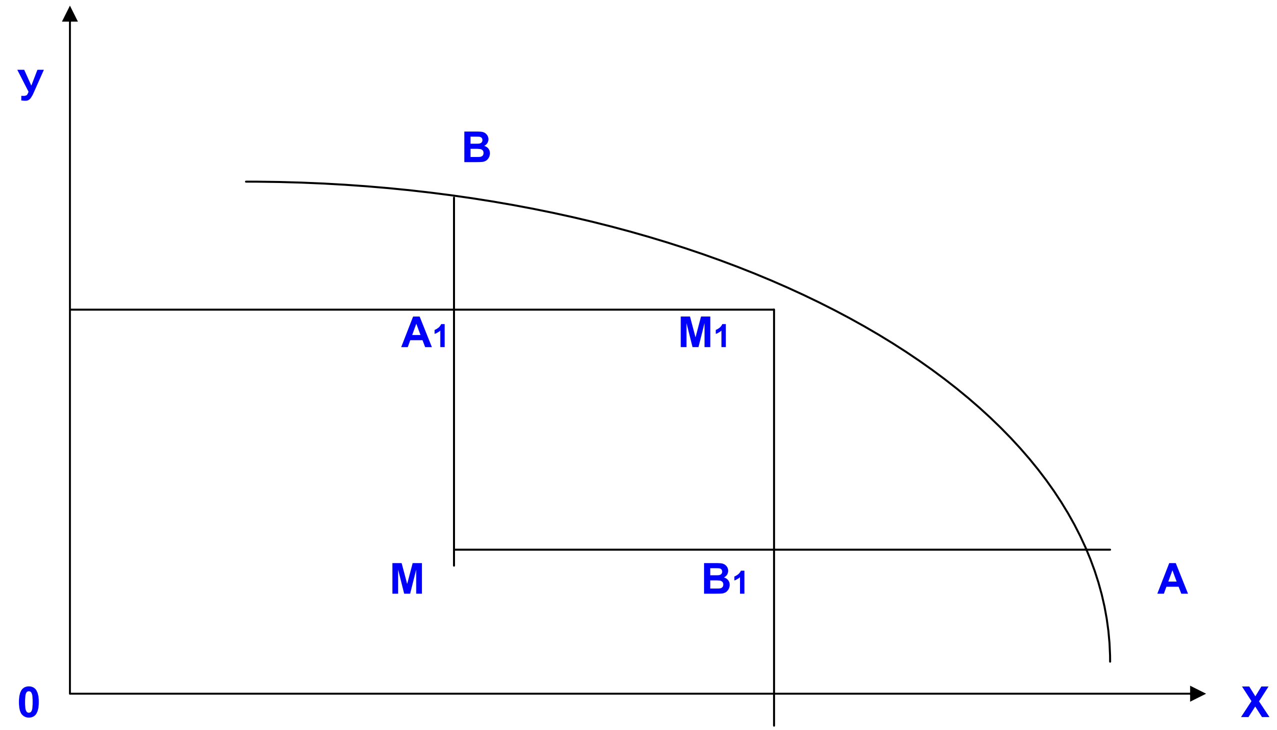
$$=V(M,M^*)\int\limits_{s^\varepsilon_{M_1}} f_\varepsilon(Q)d\sigma_Q=V(M,M^*),\quad M^*\in S^\varepsilon_{M_1}. \qquad (26)$$

$$(26)\ \Rightarrow\ u_0(M)=\lim_{\varepsilon\to 0}u_\varepsilon(M)=V(M,M_1)\ \Rightarrow$$

V(M,M₁)- **функция влияния единичного точечного импульса, приложенного в точке *M₁*.**

Рассмотрим функцию *U=U(M,M₁),* зависящую от точки *M₁* как от параметра и удовлетворяющую по координатам точки *M* следующей задаче Гурса:

$$\begin{cases} L\left[u\right]=0, & \\ u_x+bu=0 & \text{на}\quad M_1A_{1,} \\ u_y+au=0 & \text{на}\quad B_1M_{1,} \\ u\big|_{M_1}=1. & \end{cases} \qquad (27)$$



Задача (27) полностью определяет функцию *U* в четырехугольнике $MB_1M_1A_1$, образованном отрезками характеристик.

Применяя формулу Грина (18) в четырехугольнике $MB_1M_1A_1$ и учитывая формулы (21) и (27), получим:

$$(18),(21),(27) \Rightarrow$$

$$\int\limits_{MB_1M_1A_1} (VL[u]-uK[V])dxdy =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int\limits_{M}^{B_1} Pdx + \tfrac{1}{2}\int\limits_{A_1}^{M} Qdy + \tfrac{1}{2}\int\limits_{M_1}^{A_1} \left(uV_x - Vu_x - 2buV\right)dx + \qquad (28)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\int\limits_{B_1}^{M_1} \left(Vu_y - uV_y + 2auV\right)dy = \left(uV\right)_M - \left(uV\right)_{M_1} = 0.$$

Так как $V\big|_M = 1,\ u\big|_{M_1} = 1,$ **то** $u(M,M_1) = V(M,M_1).\ (29)$

Замечание. Напомним, что *$u=u(M,M_1)$*, где *M_1*-параметр, *$V=V(M,M_1)$*, где *M*-параметр.

3. Уравнения с постоянными коэффициентами.

1. Функция Римана для уравнения $u_{xy} + cu = 0.$

Так как оператор $L[u] \equiv u_{xy} + cu \equiv K[u]$ **- самосопряженный, то** $(21) \Rightarrow$

$$\begin{cases} V_{xy} + CV = 0 \quad (x, y) \in D, \\ V_x = 0 \quad (x, y) \in M_0A, \\ V_y = 0 \quad (x, y) \in BM_{0,} \\ V\big|_{M_0} = 1 \qquad\qquad \Rightarrow \end{cases} \qquad (30)$$

$$\begin{cases} V_{xy} + CV = 0 \quad (x, y) \in D, \\ V = 1 \quad (x, y) \in M_0A, \ (x, y) \in BM_0. \end{cases} \qquad (31)$$

Ищем функцию Римана в виде $V = V(z)$, где

$$z = \sqrt{(x - x_0)(y - y_0)}, \; M_0 = \{x_0, y_0\}, \; M = \{x, y\}.$$

$$(31) \;\Rightarrow \qquad V(0) = 1 \qquad (32)$$

$$V_x = V' \tfrac{y - y_0}{2z}, \; V_{xy} = \tfrac{1}{4} V'' + \tfrac{1}{4z} V' \;\Rightarrow\; V'' + \tfrac{1}{z} V' + 4CV = 0 \quad (33)$$

$$V(M, M_0) = V(x, y, x_0, y_0) = J_0\left(2\sqrt{C(x - x_0)(y - y_0)}\right) \quad (34)$$

2. Задача Коши для уравнения колебаний.

Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{zz} + au_t + bu_z + gu = 0, \quad -\infty < z < \infty, \; t > 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(z), \; u_t\big|_{t=0} = \psi(z), \; -\infty < z < \infty. \end{cases} \quad (35)$$

Замена:

$$u = Ue^{-\frac{a}{2}t + \frac{b}{2}z} \quad (36)$$

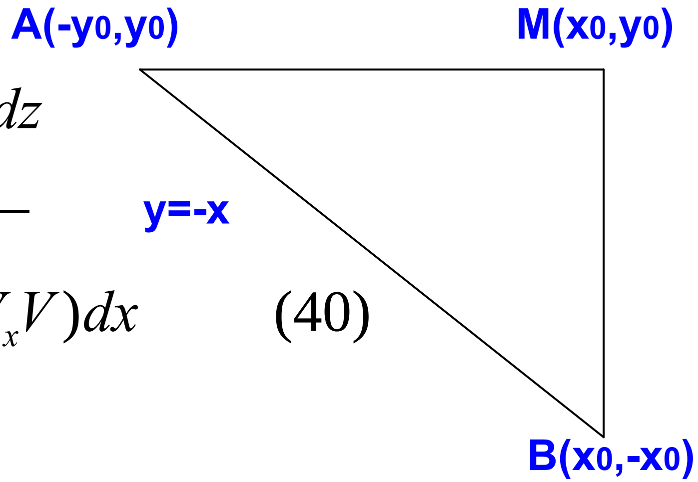
$$\begin{cases} U_{tt} - U_{zz} + CU = 0, \quad -\infty < z < \infty, \ t > 0, \\ U\big|_{t=0} = \varphi(z) e^{-\frac{b}{2}z} = \varphi_1(z), \\ U_t\big|_{t=0} = (\psi(z) + \frac{a}{2}\varphi(z)) e^{-\frac{b}{2}z} = \psi_1(z), \quad -\infty < z < \infty, \end{cases} \tag{37}$$

$$C = -\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} + g.$$

Перейдем к переменным *X* и *У*:

$$x = t + z, \ y = t - z \ \Rightarrow \ t = \frac{x+y}{2}, \ z = \frac{x-y}{2}. \tag{38}$$

$$\begin{cases} W_{xy} + \frac{C}{4} W = 0, \\ W\big|_{x+y=0} = \varphi_1(\frac{x-y}{2}), \\ (W_x + W_y)\big|_{x+y=0} = \psi_1(\frac{x-y}{2}) \end{cases} \tag{39}$$



$$t=0 \;\Rightarrow\; y=\text{-}x,\; dx=dz,\; dy=\text{-}dz$$

$$(22)\;\Rightarrow\; W(x_0,y_0)=\tfrac{\varphi_1(-y_0)+\varphi_1(x_0)}{2}-$$

$$-\tfrac{1}{2}\int\limits_{AB}(VW_y-WV_y)dy+(WV_x-W_xV)dx \qquad (40)$$

$$W_x=\tfrac{1}{2}(U_t+U_z),\quad W_y=\tfrac{1}{2}(U_t-U_z) \qquad (41)$$

$$(34),(40),(41)\;\Rightarrow\; U(z_0,t_0)=\tfrac{\varphi_1(z_0+t_0)+\varphi_1(z_0-t_0)}{2}+$$

$$+\tfrac{1}{2}\int\limits_{z_0-t_0}^{z_0+t_0}\left\{\psi_1(z)J_0\left(\sqrt{C}\;\sqrt{t_0^2-(z-z_0)^2}\right)-\varphi_1(z)\frac{J_1\left(\sqrt{C}\sqrt{t_0^2-(z-z_0)^2}\right)}{\sqrt{t_0^2-(z-z_0)^2}}\sqrt{C}\;t_0\right\}dz \quad (42)$$

При *C*=0 из (40) получаем формулу Даламбера:

$$U(z_0,t_0)=\tfrac{\varphi_1(z_0+t_0)+\varphi_1(z_0-t_0)}{2}+\tfrac{1}{2}\int\limits_{z_0-t_0}^{z_0+t_0}\psi_1(z)dz \qquad (43)$$