Задачи общего зачёта по линейной алгебре

1. Неоднородная система линейных алгебраических уравнений задана расширенной матрицей A. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти фундаментальную совокупность решений соответствующей однородной системы; найти размерность пространства решений соответствующей однородной системы; найти общее решение соответствующей однородной системы; найти частное решение неоднородной системы; найти общее решение неоднородной системы.

1.1. $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 7 \end{array}\right)$.

1.2. $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 8 & 5 & -8 \end{array}\right)$.

1.3. $A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right)$.

2. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3, x_4 по найденному базису.

2.1. $x_1 = (1, 0, 1)^T$, $x_2 = (5, 2, 3)^T$, $x_3 = (2, 1, 1)^T$, $x_4 = (4, 1, 3)^T$.

2.2. $x_1 = (1, 1, 1)^T$, $x_2 = (5, 3, 7)^T$, $x_3 = (5, 4, 6)^T$, $x_4 = (2, 1, 3)^T$.

2.3. $x_1 = (1, 0, 2)^T$, $x_2 = (3, 2, 8)^T$, $x_3 = (1, 1, 3)^T$, $x_4 = (2, -1, 3)^T$.

3. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; достроить найденный базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до базиса пространства $\mathbb{R}^3$.

3.1. $x_1 = (1, 0, 1)^T$, $x_2 = (5, 2, 3)^T$, $x_3 = (2, 1, 1)^T$, $x_4 = (4, 1, 3)^T$.

3.2. $x_1 = (1, 1, 1)^T$, $x_2 = (5, 3, 7)^T$, $x_3 = (5, 4, 6)^T$, $x_4 = (2, 1, 3)^T$.

3.3. $x_1 = (1, 0, 2)^T$, $x_2 = (3, 2, 8)^T$, $x_3 = (1, 1, 3)^T$, $x_4 = (2, -1, 3)^T$.

4. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3, x_4 по найденному базису.

4.1. $x_1(t) = 1 + t^2$, $x_2(t) = 5 + 2t + 3t^2$, $x_3(t) = 2 + t + t^2$, $x_4(t) = 4 + t + 3t^2$ при $t \in \mathbb{R}$.

4.2. $x_1(t) = 1 + t + t^2$, $x_2(t) = 5 + 3t + 7t^2$, $x_3(t) = 5 + 4t + 6t^2$, $x_4(t) = 2 + t + 3t^2$ при $t \in \mathbb{R}$.

4.3. $x_1(t) = 1 + 2t^2$, $x_2(t) = 3 + 2t + 8t^2$, $x_3(t) = 1 + t + 3t^2$, $x_4(t) = 2 - t + 3t^2$ при $t \in \mathbb{R}$.

5. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. **Используя метод Гаусса**, выполнить следующие задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; достроить найденный базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до базиса пространства $P_2(\mathbb{R})$.

5.1. $x_1(t) = 1 + t^2$, $x_2(t) = 5 + 2t + 3t^2$, $x_3(t) = 2 + t + t^2$, $x_4(t) = 4 + t + 3t^2$ при $t \in \mathbb{R}$.

5.2. $x_1(t) = 1 + t + t^2$, $x_2(t) = 5 + 3t + 7t^2$, $x_3(t) = 5 + 4t + 6t^2$, $x_4(t) = 2 + t + 3t^2$ при $t \in \mathbb{R}$.

5.3. $x_1(t) = 1 + 2t^2$, $x_2(t) = 3 + 2t + 8t^2$, $x_3(t) = 1 + t + 3t^2$, $x_4(t) = 2 - t + 3t^2$ при $t \in \mathbb{R}$.

6. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Заданы столбцы координат $[x_1]$, $[x_2]$, $[x_3]$, $[x]$ элементов x_1, x_2, x_3, x в базисе e. Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 образуют базис пространства L. Разложить элемент x по базису x_1, x_2, x_3.

6.1. $[x_1] = (-1, 0, 1)^T$, $[x_2] = (-1, 1, 1)^T$, $[x_3] = (-1, 1, 0)^T$, $[x] = (1, 1, 1)^T$.

6.2. $[x_1] = (-1, 1, -1)^T$, $[x_2] = (0, -1, 1)^T$, $[x_3] = (-1, 1, 0)^T$, $[x] = (1, 0, 2)^T$.

6.3. $[x_1] = (-1, 0, -1)^T$, $[x_2] = (0, -1, 0)^T$, $[x_3] = (-1, 2, 0)^T$, $[x] = (2, 0, -1)^T$.

7. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Заданы столбцы координат $[f_1]$, $[f_2]$, $[f_3]$, $[f_1']$, $[f_2']$, $[f_3']$ элементов f_1, f_2, f_3, f_1', f_2', f_3' в базисе e. Доказать, что: элементы f_1, f_2, f_3 образуют базис пространства L; элементы f_1', f_2', f_3' образуют базис пространства L. Найти: матрицу перехода от базиса f к базису f'; матрицу перехода от базиса f' к базису f. Задан столбец координат $[x](f)$ элемента x в базисе f. Найти столбец координат $[x](f')$ элемента x в базисе f'.

7.1. $[f_1] = (1, 2, 1)^T$, $[f_2] = (1, 1, 0)^T$, $[f_3] = (1, 1, 2)^T$, $[f_1'] = (0, -1, 1)^T$, $[f_2'] = (1, 0, 1)^T$, $[f_3'] = (0, -1, -1)^T$, $[x](f) = (1, 1, 1)^T$.

7.2. $[f_1] = (1, 1, 1)^T$, $[f_2] = (1, 2, 1)^T$, $[f_3] = (1, 1, 2)^T$, $[f_1'] = (-1, 0, -2)^T$, $[f_2'] = (0, -1, 1)^T$, $[f_3'] = (0, 1, 0)^T$, $[x](f) = (1, 0, 2)^T$.

7.3. $[f_1] = (2, 1, 1)^T$, $[f_2] = (1, 2, 1)^T$, $[f_3] = (1, 1, 1)^T$, $[f_1'] = (-3, -2, -2)^T$, $[f_2'] = (-1, -2, -1)^T$, $[f_3'] = (0, 3, 1)^T$, $[x](f) = (2, 0, -1)^T$.

8. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Заданы: матрица $[A](e)$ линейного оператора A в базисе e; матрица перехода $\alpha(e, e')$ от базиса e к базису e'. Найти матрицу $[A](e')$ оператора A в базисе e'.

8.1. $[A](e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha(e, e') = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8.2. $[A](e) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha(e, e') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8.3. $[A](e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha(e, e') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Задана матрица $[A]$ линейного оператора A в базисе e. **Используя метод Гаусса**, найти: базис ядра оператора A; размерность ядра оператора A.

9.1. $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

9.2. $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

9.3. $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

10. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Задана матрица $[A]$ линейного оператора A в базисе e. **Используя метод Гаусса**, найти: базис образа оператора A; размерность образа оператора A.

10.1. $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

10.2. $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

10.3. $[A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

11. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3. Задана матрица $[A]$ линейного оператора A в базисе e. Найти все собственные значения оператора A. Для каждого собственного значения найти: алгебраическую кратность собственного значения; базис собственного подпространства; геометрическую кратность собственного значения (размерность собственного подпространства); общий вид собственного вектора.

11.1. $[A] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11.2. $[A] = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11.3. $[A] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2, e_3, e_4. Задано выражение для квадратичной формы Q в базисе e. Найти матрицу квадратичной формы Q в базисе e. **Используя метод Лагранжа**, привести квадратичную форму Q к каноническому виду: найти матрицу квадратичной формы Q в каноническом базисе e'; найти матрицу перехода от базиса e к базису e'; найти матрицу перехода от базиса e' к базису e.

12.1. $Q(x) = (x^1)^2 + 2x^1x^2 + 2(x^2)^2 + x^3x^4$.

12.2. $Q(x) = x^1x^2 + 2(x^3)^2 - 4x^3x^4 + 2(x^4)^2$.

12.3. $Q(x) = (x^1)^2 + 4x^1x^2 - (x^2)^2 - x^3x^4$.

13. Рассматривается линейное вещественное пространство L с базисом e_1, e_2. Заданы выражения для билинейных форм F_1, F_2, F_3 в базисе e. Какие из этих билинейных форм можно принять за скалярное произведение в пространстве L? Какие из этих билинейных форм нельзя принять за скалярное произведение в пространстве L, но можно принять за псевдоскалярное произведение в пространстве L? Ответ обосновать.

13.1. $F_1(x, y) = 3x^1y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 + 2x^2y^2$, $F_2(x, y) = 2x^1y^1 + x^1y^2 - x^2y^1 + 3x^2y^2$, $F_3(x, y) = x^1y^1 + 3x^1y^2 + 3x^2y^1 + 4x^2y^2$.

13.2. $F_1(x, y) = x^1y^1 + x^1y^2 + x^2y^1 + 2x^2y^2$, $F_2(x, y) = 2x^1y^1 + 2x^1y^2 + 3x^2y^1 + 4x^2y^2$, $F_3(x, y) = x^1y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 + x^2y^2$.

13.3. $F_1(x, y) = 2x^1y^1 + x^1y^2 + x^2y^1 + x^2y^2$, $F_2(x, y) = 8x^1y^1 + 2x^1y^2 + x^2y^1 + x^2y^2$, $F_3(x, y) = 2x^1y^1 + 2x^1y^2 + 2x^2y^1 + x^2y^2$.

14. В линейном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ (скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2$) заданы элементы f_1, f_2. Доказать, что элементы f_1, f_2 образуют базис пространства $\mathbb{R}^2$. Найти ковариантный метрический тензор в базисе f.

14.1. $f_1 = (1, 1)^T$, $f_2 = (0, 1)^T$.

14.2. $f_1 = (-1, 1)^T$, $f_2 = (1, 0)^T$.
14.3. $f_1 = (1, 2)^T$, $f_2 = (2, 1)^T$.

15. В линейном евклидовом пространстве $P_1\big([0,1]\big)$ (пространство всех полиномов на сегменте $[0,1]$ степени не выше 1; скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)\,dt$) заданы элементы: $e_1(t) = 1$, $e_2(t) = t$ при $t \in [0,1]$. Доказать, что элементы e_1, e_2 образуют базис пространства $P_1\big([0,1]\big)$. Найти ковариантный метрический тензор в базисе e.

16. В линейном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ (скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3$) заданы элементы x_1, x_2, x_3. Доказать, что элементы x_1, x_2, x_3 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2, x_3 процесс Грама—Шмидта (без нормировки).
16.1. $x_1 = (1, 1, 1)^T$, $x_2 = (1, 0, 0)^T$, $x_3 = (0, 1, 0)^T$.
16.2. $x_1 = (1, 0, 1)^T$, $x_2 = (0, 0, 1)^T$, $x_3 = (1, 1, 0)^T$.
16.3. $x_1 = (1, 1, -1)^T$, $x_2 = (0, 1, 0)^T$, $x_3 = (0, 0, 1)^T$.

17. В линейном евклидовом пространстве $P_1\big([0,1]\big)$ (пространство всех полиномов на сегменте $[0,1]$ степени не выше 1; скалярное произведение определяется формулой $(x, y) = \int\limits_0^1 x(t)y(t)\,dt$) заданы элементы: $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$ при $t \in [0,1]$. Доказать, что элементы x_1, x_2 линейно независимы. Применить к последовательности x_1, x_2 процесс Грама—Шмидта (без нормировки).

18. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3, e_4. Заданы столбцы координат $[x_1]$, $[x_2]$, $[x]$ элементов x_1, x_2, x в базисе e. Найти: проекцию элемента x на подпространство $L(x_1, x_2)$, перпендикуляр элемента x к подпространству $L(x_1, x_2)$.
18.1. $[x_1] = (1, 0, 0, 1)^T$, $[x_2] = (1, 1, 0, 0)^T$, $[x] = (1, 0, 0, 0)^T$.
18.2. $[x_1] = (1, 0, 0, -1)^T$, $[x_2] = (1, 0, 2, 0)^T$, $[x] = (1, 0, 0, 0)^T$.
18.3. $[x_1] = (1, 1, 0, 1)^T$, $[x_2] = (1, 0, 0, 0)^T$, $[x] = (1, -1, 0, 0)^T$.

19. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3, e_4. Заданы столбцы координат $[x_1]$, $[x_2]$ элементов x_1, x_2 в базисе e. Найти найти матрицу оператора ортогонального проектирования P на подпространство $L(x_1, x_2)$ в базисе e.
19.1. $[x_1] = (1, 0, 0, 1)^T$, $[x_2] = (1, 1, 0, 0)^T$.
19.2. $[x_1] = (1, 0, 0, -1)^T$, $[x_2] = (1, 0, 2, 0)^T$.
19.3. $[x_1] = (1, 1, 0, 1)^T$, $[x_2] = (1, 0, 0, 0)^T$.

20. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Подпространство Q задано уравнением $x^1 - 2x^2 + 3x^3 = 0$. Найти базис ортогонального дополнения к подпространству Q. **Ответ обосновать**.

21. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Задана матрица линейного самосопряжённого оператора A в базисе e: $[A](e) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Найти: ортонормированный базис e' из собственных векторов оператора A; матрицу перехода от базиса e к базису e'; матрицу перехода от базиса e' к базису e; матрицу оператора A в базисе e'.

22. Рассматривается линейное евклидово пространство H с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Задана матрица симметричной билинейной формы A в базисе e: $[A](e) =$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Найти: ортонормированный базис e', в котором матрица билинейной формы A имеет диагональный вид; матрицу перехода от базиса e к базису e'; матрицу перехода от базиса e' к базису e; матрицу билинейной формы A в базисе e'.

23. Рассматривается аффинное евклидово двумерное пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Кривая второго порядка задана уравнением $2(x^1)^2 - 4x^1x^2 + 5(x^2)^2 + 8x^1 - 2x^2 + 9 = 0$. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования базиса и смещения начала отсчёта: найти уравнение кривой второго порядка в канонической системе координат; найти матрицу перехода от «старого» базиса к «новому»; найти матрицу перехода от «нового» базиса к «старому»; найти начало отсчёта канонической системы координат.

24. Рассматривается аффинное евклидово двумерное пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Кривая второго порядка задана уравнением $2(x^1)^2 - 4x^1x^2 + 5(x^2)^2 + 8x^1 - 2x^2 + 9 = 0$. **Используя ортогональные инварианты**, найти уравнение кривой второго порядка в канонической системе координат.