Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 8. Линейные евклидовы и линейные псевдоевклидовы пространства

8.1. Линейные евклидовы пространства

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: $F\colon L^2 \implies \mathbb{K}$, $\overline{F(y,x)} = F(x,y)$ при x, $y \in L$. Пусть $x \in L$. Тогда $\overline{F(x,x)} = F(x,x)$. Следовательно, $F(x,x) \in \mathbb{R}$.

Пусть: $F\colon L \implies \mathbb{R}$, $F(\lambda x) = |\lambda|\, F(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда: $F(\theta) = F(0\theta) = |0|\, F(\theta) = 0F(\theta) = 0$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Пусть $F\colon L^2 \implies \mathbb{K}$. Далее часто будем писать (x,y) вместо $F(x,y)$. Пусть:
1. $\overline{(y,x)} = (x,y)$ при x, $y \in L$;
2. $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$ при x, y_1, $y_2 \in L$;
3. $(x, \lambda y) = \lambda(x,y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$;
4. $(x,x) > 0$ при: $x \in L$, $x \neq \theta$.

Будем говорить, что: F — скалярное произведение в пространстве L, (L,F) — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть F — скалярное произведение в пространстве L.

Пусть x_1, x_2, $y \in L$. Тогда: $(x_1 + x_2, y) = \overline{(y, x_1 + x_2)} = \overline{(y,x_1) + (y,x_2)} = \overline{(y,x_1)} + \overline{(y,x_2)} = (x_1,y) + (x_2,y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$. Тогда: $(\lambda x, y) = \overline{(y, \lambda x)} = \overline{\lambda (y,x)} = \overline{\lambda} \cdot \overline{(y,x)} = \overline{\lambda}(x,y)$.

Очевидно, F — положительная эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L.

2. Пусть F — положительная эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Очевидно, F — скалярное произведение в пространстве L.

Утверждение (неравенство Коши–Буняковского)**.** *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; x, $y \in H$.*

1. *Пусть x, y — линейно зависимые векторы. Тогда $\bigl|(x,y)\bigr| = \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$.*
2. *Пусть x, y — линейно независимые векторы. Тогда $\bigl|(x,y)\bigr| < \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$.*

Доказательство.

1. Пусть $x = \theta$. Тогда (x,y), $(x,x) = 0$. Следовательно: $\bigl|(x,y)\bigr| = 0$, $\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} = 0$. Тогда $\bigl|(x,y)\bigr| = \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$.

Пусть $x \neq \theta$. Тогда x — линейно независимый вектор. Так как x, y — линейно зависимые векторы, то $y \in L(x)$. Тогда существует число $\lambda \in \mathbb{K}$, удовлетворяющее условию $y = \lambda x$. Следовательно:

$$\bigl|(x,y)\bigr| = \bigl|(x,\lambda x)\bigr| = \bigl|\lambda(x,x)\bigr| = |\lambda| \cdot \bigl|(x,x)\bigr| = |\lambda|\,(x,x);$$

$$\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} = \sqrt{(x,x)}\sqrt{(\lambda x,\lambda x)} = \sqrt{(x,x)}\sqrt{|\lambda|^2\,(x,x)} = \sqrt{(x,x)}\sqrt{|\lambda|^2}\sqrt{(x,x)} = \\ = |\lambda|\,(x,x).$$

Тогда $\bigl|(x,y)\bigr| = \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$.

2. Так как x, y — линейно независимые векторы, то x, $y \neq \theta$. Тогда (x,x), $(y,y) > 0$.

Пусть $(x,y) = 0$. Тогда: $\bigl|(x,y)\bigr| = 0$, $\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} > 0$. Следовательно, $\bigl|(x,y)\bigr| < \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$.

Пусть $(x,y) \neq 0$. Пусть: $t \in \mathbb{R}$, $\lambda = \frac{\overline{(x,y)}}{|(x,y)|}t$. Так как x, y — линейно независимые векторы, то $x + \lambda y \neq \theta$. Тогда:

$$(x+\lambda y, x+\lambda y) > 0,$$
$$(x,x) + (x,\lambda y) + (\lambda y,x) + (\lambda y,\lambda y) > 0,$$
$$(x,x) + \lambda(x,y) + \overline{\lambda}(y,x) + \overline{\lambda}\lambda(y,y) > 0,$$
$$(x,x) + \lambda(x,y) + \overline{\lambda}\cdot\overline{(x,y)} + \overline{\lambda}\lambda(y,y) > 0,$$
$$(x,x) + 2\bigl|(x,y)\bigr|t + (y,y)t^2 > 0.$$

Так как $(y,y) \neq 0$, то, в силу произвольности выбора $t \in \mathbb{R}$, получаем, что:

$$4\bigl|(x,y)\bigr|^2 - 4(x,x)(y,y) < 0,$$
$$\sqrt{\bigl|(x,y)\bigr|^2} < \sqrt{(x,x)(y,y)},$$
$$\bigl|(x,y)\bigr| < \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}. \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$. Пусть $x \in H$. Обозначим, $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$. Тогда $\|x\| \in \mathbb{R}$. Будем говорить, что $\|x\|$ — норма вектора x. Очевидно: $\|x\| = \sqrt{(x,x)} \geqslant 0$, $\|x\|^2 = \Bigl(\sqrt{(x,x)}\Bigr)^2 = (x,x)$.

Докажем утверждения:

1. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$;
2. $\|x\| > 0$ при: $x \in H$, $x \neq \theta$;
3. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ при x, $y \in H$ (неравенство треугольника).

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$. Тогда:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x,\lambda x)} = \sqrt{|\lambda|^2\,(x,x)} = \sqrt{|\lambda|^2}\sqrt{(x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|\,.$$

Пусть: $x \in H$, $x \neq \theta$. Тогда:

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} > 0.$$

Пусть x, $y \in H$. Тогда:

$$\|x+y\| = \sqrt{(x+y,x+y)} = \sqrt{(x,x) + 2\operatorname{Re}\bigl((x,y)\bigr) + (y,y)} \leqslant \sqrt{(x,x) + 2\bigl|(x,y)\bigr| + (y,y)} \leqslant \\ \leqslant \sqrt{(x,x) + 2\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)} + (y,y)} = \sqrt{\|x\|^2 + 2\,\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2} = \sqrt{\bigl(\|x\| + \|y\|\bigr)^2} = \\ = \|x\| + \|y\|\,.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть x, $y \in H$. Будем писать $x \perp y$, если $(x, y) = 0$.

Пусть: x, $y \in H$, $x \perp y$. Тогда $(x, y) = 0$. Следовательно: $(y, x) = \overline{(x, y)} = \overline{0} = 0$. Тогда $y \perp x$.

2. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in H$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — ортогональная последовательность векторов, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — нормированная последовательность векторов, если: $\|x_k\| = 1$ при $k = \overline{1, r}$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — ортонормированная последовательность векторов, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$; $\|x_k\| = 1$ при $k = \overline{1, r}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ — ортогональные векторы пространства H, $x_1, \ldots, x_r \neq \theta$. Докажем, что $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $C^1, \ldots, C^r \in \mathbb{K}$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} C^m x_m = \theta$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда:

$$\Big(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} C^m x_m\Big) = (x_k, \theta),$$
$$\sum_{m=\overline{1,r}} C^m (x_k, x_m) = 0,$$
$$C^k (x_k, x_k) = 0,$$
$$C^k = 0.$$

Итак, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

3. Пусть: $x \in H$, $Q \subseteq H$. Будем писать $x \perp Q$, если $\forall u \in Q (x \perp u)$.

4. Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq H$. Будем писать $Q_1 \perp Q_2$, если $\forall x_1 \in Q_1 \forall x_2 \in Q_2 (x_1 \perp x_2)$.

Пусть: Q_1, $Q_2 \subseteq H$, $Q_1 \perp Q_2$. Очевидно, $Q_2 \perp Q_1$.

5. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq H$. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональная последовательность множеств, если: $Q_k \perp Q_m$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональные подпространства пространства H. Докажем, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} x_m = \theta$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда:

$$\Big(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} x_m\Big) = (x_k, \theta),$$
$$\sum_{m=\overline{1,r}} (x_k, x_m) = 0,$$
$$(x_k, x_k) = 0,$$
$$x_k = \theta.$$

Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

6. Пусть $Q \subseteq H$. Обозначим, $Q^\perp = \{x \colon x \in H \wedge x \perp Q\}$. Будем говорить, что $Q^\perp$ — ортогональное дополнение множества Q.

Пусть $Q \subseteq H$. Очевидно: $Q^\perp \subseteq H$, $Q^\perp \perp Q$.

Пусть: Q_1, $Q_2 \subseteq H$, $Q_1 \perp Q_2$. Очевидно, $Q_1 \subseteq Q_2^\perp$.

Пусть $Q \subseteq H$. Тогда $Q^\perp \perp Q$. Следовательно, $Q \perp Q^\perp$. Тогда $Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$.

Пусть $Q \subseteq H$. Докажем, что $Q^\perp$ — подпространство пространства H.

Очевидно: $Q^\perp \subseteq H$, $\theta \in Q^\perp$. Пусть x_1, $x_2 \in Q^\perp$. Тогда: x_1, $x_2 \in H$, x_1, $x_2 \perp Q$. Пусть $u \in Q$. Тогда: x_1, $x_2 \in H$, (x_1, u), $(x_2, u) = 0$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in H$, $(x_1 + x_2, u) = (x_1, u) + (x_2, u) = 0$. Тогда: $x_1 + x_2 \in H$, $x_1 + x_2 \perp Q$. Следовательно, $x_1 + x_2 \in Q^\perp$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q^\perp$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $x \perp Q$. Пусть $u \in Q$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $(x, u) = 0$. Следовательно: $\lambda x \in H$, $(\lambda x, u) = \overline{\lambda}(x, u) = 0$. Тогда: $\lambda x \in H$, $\lambda x \perp Q$. Следовательно, $\lambda x \in Q^\perp$. Итак, $Q^\perp$ — подпространство пространства H.

Пусть: Q_1, $Q_2 \subseteq H$, $Q_1 \perp Q_2$, $Q_1 + Q_2 = H$. Докажем, что $Q_1 = Q_2^\perp$.

Очевидно, $Q_1 \subseteq Q_2^\perp$. Пусть $x \in Q_2^\perp$. Тогда: $x \in H$, $x \perp Q_2$. Так как: $x \in H$, $Q_1 + Q_2 = H$, то существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Так как: $x \perp Q_2$, $x_2 \in Q_2$, то $(x, x_2) = 0$. Так как: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $Q_1 \perp Q_2$, то $(x_1, x_2) = 0$. Тогда:

$$0 = (x, x_2) = (x_1 + x_2, x_2) = (x_1, x_2) + (x_2, x_2) = (x_2, x_2).$$

Следовательно, $x_2 = \theta$. Тогда: $x = x_1 + x_2 = x_1 \in Q_1$. Следовательно, $Q_2^\perp \subseteq Q_1$. Так как $Q_1 \subseteq Q_2^\perp$, то $Q_1 = Q_2^\perp$.

Пусть: $Q \subseteq H$, $Q + Q^\perp = H$. Тогда: $Q^\perp \perp Q$, $Q + Q^\perp = H$. Следовательно: $Q \perp Q^\perp$, $Q + Q^\perp = H$. Тогда $Q = (Q^\perp)^\perp$.

7. Пусть Q — подпространство пространства H. Пусть $x \in H$. Будем говорить, что x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q, если: $x_1 \in Q$, $x - x_1 \perp Q$.

Пусть: $x \in H$, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Будем говорить, что $x - x_1$ перпендикуляр вектора x к подпространству Q.

Пусть: $x \in H$, x_1', x_1'' — ортогональные проекции вектора x на подпространство Q. Тогда: x_1', $x_1'' \in Q$, $x - x_1'$, $x - x_1'' \perp Q$. Следовательно:

$$(x_1' - x_1'', x_1' - x_1'') = \big(x_1' - x_1'', (x - x_1'') - (x - x_1')\big) = 0.$$

Тогда $x_1' - x_1'' = \theta$. Следовательно, $x_1' = x_1''$.

Пусть: $x \in H$, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q, $y \in H$, y_1 — ортогональная проекция вектора y на подпространство Q. Тогда: x_1, $y_1 \in Q$, $x - x_1$, $y - y_1 \perp Q$. Следовательно: $x_1 + y_1 \in Q$, $(x + y) - (x_1 + y_1) = (x - x_1) + (y - y_1) \perp Q$. Тогда $x_1 + y_1$ — ортогональная проекция вектора $x + y$ на подпространство Q.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x_1 \in Q$, $x - x_1 \perp Q$. Следовательно: $\lambda x \in Q$, $\lambda x - \lambda x_1 = \lambda(x - x_1) \perp Q$. Тогда λx_1 — ортогональная проекция вектора λx на подпространство Q.

Пусть $x \in Q$. Тогда: $x \in Q$, $x - x = \theta \perp Q$. Следовательно, x — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q.

Пусть: $x \in H$, $x \perp Q$. Тогда: $\theta \in Q$, $x - \theta = x \perp Q$. Следовательно, θ — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q.

Пусть: $x \in H$, x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Тогда: $x_1 \in Q$, $x - x_1 \perp Q$. Следовательно: $x - x_1 \in H$, $x - x_1 \perp Q$, $x - (x - x_1) = x_1 \in Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$. Тогда: $x - x_1 \in Q^\perp$, $x - (x - x_1) \perp Q^\perp$. Следовательно, $x - x_1$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство $Q^\perp$.

8. Пусть Q — подпространство пространства H. Будем говорить, что подпространство Q допускает ортогональное проектирование, если $\forall x \in H \exists x_1 (x_1 \in Q \wedge x - x_1 \perp Q)$.

Пусть: Q — подпространство пространства H, Q допускает ортогональное проектирование. Пусть $x \in H$. Пусть x_1 — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Обозначим, $P_Q(x) = x_1$. Очевидно, $P_Q \colon H \implies Q$. Будем говорить, что P_Q — оператор ортогонального проектирования на подпространство Q.

Очевидно: $P_Q \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $\mathrm{R}(P_Q) \subseteq Q$, $P_Q x = x$ при $x \in Q$.

Пусть $x \in H$. Тогда: $(P_Q P_Q)x = P_Q\big(P_Q x\big) = P_Q x$. Следовательно, $P_Q P_Q = P_Q$. Пусть $x \in Q$. Тогда: $x \in H$, $x = P_Q x$. Следовательно, $x \in \mathrm{R}(P_Q)$. Тогда $Q \subseteq \mathrm{R}(P_Q)$. Так как $\mathrm{R}(P_Q) \subseteq Q$, то $\mathrm{R}(P_Q) = Q$. Итак: $P_Q \in \mathrm{Lin}(H, H)$, $P_Q P_Q = P_Q$, $\mathrm{R}(P_Q) = Q$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — ортогональные подпространства пространства H, $Q_1, \ldots, Q_r$ допускают ортогональное проектирование.*

1. *Пусть $Q_1 + \cdots + Q_r = H$. Тогда $P_{Q_1} + \cdots + P_{Q_r} = I$.*
2. *Пусть $P_{Q_1} + \cdots + P_{Q_r} = I$. Тогда $Q_1 + \cdots + Q_r = H$.*

Доказательство.

1. Пусть $x \in H$. Так как $Q_1 + \cdots + Q_r = H$, то существуют векторы $x_1, \ldots, x_r$, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x = x_1 + \cdots + x_r$. Тогда:

$$\Big(\sum_{k=\overline{1,r}} P_{Q_k}\Big)x = \Big(\sum_{k=\overline{1,r}} P_{Q_k}\Big) \sum_{m=\overline{1,r}} x_m = \sum_{k,m=\overline{1,r}} P_{Q_k} x_m = \sum_{k=\overline{1,r}} x_k = x = Ix.$$

Следовательно, $P_{Q_1} + \cdots + P_{Q_r} = I$.

2. Очевидно, $Q_1 + \cdots + Q_r \subseteq H$. Пусть $x \in H$. Тогда:

$$x = Ix = (P_{Q_1} + \cdots + P_{Q_r})x = P_{Q_1}x + \cdots + P_{Q_r}x \in Q_1 + \cdots + Q_r.$$

Следовательно, $H \subseteq Q_1 + \cdots + Q_r$. Так как $Q_1 + \cdots + Q_r \subseteq H$, то $Q_1 + \cdots + Q_r = H$. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства H, Q допускает ортогональное проектирование. Тогда: $Q^\perp$ допускает ортогональное проектирование, $P_Q + P_{Q^\perp} = I$, $Q + Q^\perp = H$, $Q = (Q^\perp)^\perp$.*

Доказательство. Пусть $x \in H$. Тогда $P_Q x$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Следовательно, $x - P_Q x$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство $Q^\perp$. Тогда подпространство $Q^\perp$ допускает ортогональное проектирование.

Пусть $x \in H$. Тогда $x - P_Q x$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство $Q^\perp$. Следовательно, $P_{Q^\perp}(x) = x - P_Q x$. Тогда $P_Q x + P_{Q^\perp}(x) = Ix$. Следовательно, $P_Q + P_{Q^\perp} = I$. Тогда $Q + Q^\perp = H$. Следовательно, $Q = (Q^\perp)^\perp$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

1. Пусть e — базис пространства H. Обозначим: $g_{k,m}(e) = (e_k, e_m)$ при k, $m = \overline{1,N}$. Тогда: $g(e) \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $g(e)$ — эрмитова матрица, $\Delta_k\big(g(e)\big) > 0$ при $k = \overline{1,N}$. Очевидно: $g_{k,k}(e) = (e_k, e_k) = \|e_k\|^2$ при $k = \overline{1,N}$.

Пусть e, e' — базисы пространства H. Тогда: $g_{k',m'}(e') = g_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')$ при k', $m' = \overline{1,N}$; $g(e') = \overline{\alpha(e, e')^T} g(e) \alpha(e, e')$. Будем говорить, что g — ковариантный метрический тензор пространства H.

Пусть e — базис пространства H. Пусть e — ортогональный базис. Тогда $g(e)$ — диагональная матрица.

Пусть $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис.

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда $g(e) = \tilde{I}$.

Пусть $g(e) = \tilde{I}$. Тогда e — ортонормированный базис.

Пусть: $x,\ y \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$. Тогда:

$$(x, y) = g_{k,m}(e)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^m.$$

Пусть e — ортогональный базис. Тогда:

$$(x, y) = \sum_{k=\overline{1,N}} g_{k,k}(e)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k = \sum_{k=\overline{1,N}} (e_k, e_k)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k = \sum_{k=\overline{1,N}} \|e_k\|^2\,\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k.$$

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда:

$$(x, y) = \sum_{k=\overline{1,N}} \overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k.$$

Пусть e, e' — ортонормированные базисы пространства H. Тогда:

$$g(e') = \overline{\alpha(e, e')^T} g(e)\alpha(e, e'),$$
$$\tilde{I} = \overline{\alpha(e, e')^T}\tilde{I}\alpha(e, e'),$$
$$\tilde{I} = \overline{\alpha(e, e')^T}\alpha(e, e').$$

Следовательно: $\det\bigl(\alpha(e, e')\bigr) \neq 0$, $\alpha(e, e')^{-1} = \overline{\alpha(e, e')^T}$. Тогда $\alpha(e, e')\overline{\alpha(e, e')^T} = \tilde{I}$. Следовательно, $\alpha(e, e')$ — унитарная матрица.

Пусть: e — ортонормированный базис пространства H, $e'_1, \ldots, e'_N \in H$, $\alpha(e, e')$ — унитарная матрица. Тогда: e' — базис пространства H, $g(e') = \overline{\alpha(e, e')^T} g(e)\alpha(e, e') = \overline{\alpha(e, e')^T}\tilde{I}\alpha(e, e') = \overline{\alpha(e, e')^T}\alpha(e, e') = \tilde{I}$. Следовательно, e' — ортонормированный базис пространства H.

Согласно теореме Лагранжа, так как скалярное произведение есть эрмитова полуторалинейная форма, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства H, $g(e')$ — диагональная матрица. Тогда e' — ортогональный базис. Обозначим: $e''_k = \frac{1}{\|e'_k\|} e'_k$ при $k = \overline{1, N}$. Тогда e'' — ортонормированный базис.

2. Пусть e — базис пространства H. Обозначим: $g^{k,m}(e) = \bigl(g(e)^{-1}\bigr)^{k,m}$ при $k,\ m = \overline{1, N}$. Очевидно: $g(e)^{-1} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $g(e)^{-1}$ — эрмитова матрица, $\det\bigl(g(e)\bigr) > 0$.

Пусть e, e' — базисы пространства H. Тогда:

$$g(e')^{-1} = \Bigl(\overline{\alpha(e, e')^T} g(e)\alpha(e, e')\Bigr)^{-1} = g(e')^{-1} = \alpha(e', e)g(e)^{-1}\overline{\alpha(e', e)^T}.$$

Следовательно: $g^{k',m'}(e') = g^{k,m}(e)\alpha^{k'}_k(e', e)\overline{\alpha^{m'}_m(e, e')}$ при $k',\ m' = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $\bigl\{g(e)^{-1}\bigr\}_e$ — контравариантный метрический тензор пространства H.

Пусть e — базис пространства H. Пусть e — ортогональный базис. Тогда: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e) = \frac{1}{g_{k,k}(e)} = \frac{1}{(e_k, e_k)} = \frac{1}{\|e_k\|^2}$ при $k = \overline{1, N}$.

Пусть $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис.

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда $g(e)^{-1} = \tilde{I}$.

Пусть $g(e)^{-1} = \tilde{I}$. Тогда e — ортонормированный базис.

Пусть: $x \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$. Пусть $m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(e_m, x) = (e_m, \tilde{x}^n e_n) = (e_m, e_n)\tilde{x}^n = g_{m,n}(e)\tilde{x}^n.$$

Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$g^{k,m}(e)g_{m,n}(e)\tilde{x}^n = g^{k,m}(e)(e_m, x),$$

$$\delta^k_n \tilde{x}^n = g^{k,m}(e)(e_m, x),$$
$$\tilde{x}^k = g^{k,m}(e)(e_m, x).$$

Следовательно:

$$x = \tilde{x}^k e_k = g^{k,m}(e)(e_m, x)e_k.$$

Пусть e — ортогональный базис. Тогда:

$$\tilde{x}^k = \frac{(e_k, x)}{g_{k,k}(e)} = \frac{(e_k, x)}{(e_k, e_k)} = \frac{(e_k, x)}{\|e_k\|^2}, \quad k = \overline{1, N};$$
$$x = \sum_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k, x)}{g_{k,k}(e)} e_k = \sum_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k, x)}{(e_k, e_k)} e_k = \sum_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k, x)}{\|e_k\|^2} e_k.$$

Пусть e — ортонормированный базис. Тогда:

$$\tilde{x}^k = (e_k, x), \quad k = \overline{1, N};$$
$$x = \sum_{k=\overline{1,N}} (e_k, x)e_k.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства H, $\dim(Q) = 0$. Очевидно: Q допускает ортогональное проектирование, $P_Q x = \theta$ при $x \in H$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства H, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N_1$, G — ковариантный метрический тензор подпространства Q, e — базис подпространства Q. Тогда: Q допускает ортогональное проектирование, $P_Q x = G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha$ при $x \in H$.*

Доказательство. Пусть $x \in H$. Обозначим, $x_1 = G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha$. Тогда $x_1 \in Q$. Пусть $u \in Q$. Тогда:

$$(x - x_1, u) = (x, u) - (x_1, u) = (x, u) - \big(G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha, u\big) = (x, u) - \overline{G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)}(e_\alpha, u) =$$
$$= (x, u) - G^{\beta,\alpha}(x, e_\beta)(e_\alpha, u) = (x, u) - \big(x, G^{\beta,\alpha}(e_\alpha, u)e_\beta\big) = (x, u) - (x, u) = 0.$$

Следовательно, $x - x_1 \perp Q$. Итак: $x_1 \in Q$, $x - x_1 \perp Q$. Тогда подпространство Q допускает ортогональное проектирование.

Пусть $x \in H$. Тогда $G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha$ — ортогональная проекция вектора x на подпространство Q. Следовательно, $P_Q x = G^{\alpha,\beta}(e_\beta, x)e_\alpha$. □

Теорема (процесс ортогонализации Грама—Шмидта)**.** *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное евклидово пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in H$, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$.*

Существуют векторы $y_1, \ldots, y_r$, удовлетворяющие условиям: $y_1, \ldots, y_k$ — ортогональный базис подпространства $L(x_1, \ldots, x_k)$ при $k = \overline{1, r}$; $y_1 = \lambda_1 x_1$, $y_k = \lambda_k \Big(x_k - \sum_{m=\overline{1,k-1}} \frac{(y_m, x_k)}{(y_m, y_m)} y_m\Big)$ при $k = \overline{2, r}$.

Доказательство. Пусть $r = 1$. Обозначим, $y_1 = \lambda_1 x_1$. Очевидно, y_1 — искомая последовательность векторов.

Пусть: $r_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $r = r_0$. Докажем, что утверждение справедливо при $r = r_0 + 1$. Очевидно, существуют векторы $y_1, \dots, y_{r_0}$, удовлетворяющие условиям: $y_1, \dots, y_k$ — ортогональный базис подпространства $L(x_1, \dots, x_k)$ при $k = \overline{1, r_0}$; $y_1 = \lambda_1 x_1$, $y_k = \lambda_k\Big(x_k - \sum\limits_{m=\overline{1,k-1}} \frac{(y_m,x_k)}{(y_m,y_m)} y_m\Big)$ при $k = \overline{2, r_0}$. Обозначим, $y_{r_0+1} = \lambda_{r_0+1}\Big(x_{r_0+1} - \sum\limits_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m,x_{r_0+1})}{(y_m,y_m)} y_m\Big)$. Так как $y_1, \dots, y_{r_0} \in L(x_1, \dots, x_{r_0})$, то $y_{r_0+1} \in L(x_1, \dots, x_{r_0+1})$. Пусть $k = \overline{1, r_0}$. Так как $y_1, \dots, y_{r_0}$ — ортогональные векторы, то:

$$(y_k, y_{r_0+1}) = \bigg(y_k, \lambda_{r_0+1}\Big(x_{r_0+1} - \sum_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m\Big)\bigg) =$$

$$= \lambda_{r_0+1}\Big((y_k, x_{r_0+1}) - \frac{(y_k, x_{r_0+1})}{(y_k, y_k)}(y_k, y_k)\Big) = 0.$$

Предположим, что $y_{r_0+1} = \theta$. Так как: $\lambda_{r_0+1} \neq 0$, $y_1, \dots, y_{r_0} \in L(x_1, \dots, x_{r_0})$, то:

$$\lambda_{r_0+1}\Big(x_{r_0+1} - \sum_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m\Big) = \theta,$$

$$x_{r_0+1} - \sum_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m = \theta,$$

$$x_{r_0+1} = \sum_{m=\overline{1,r_0}} \frac{(y_m, x_{r_0+1})}{(y_m, y_m)} y_m,$$

$$x_{r_0+1} \in L(x_1, \dots, x_{r_0}).$$

Тогда $x_1, \dots, x_{r_0+1}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит условию). Итак, $y_{r_0+1} \neq \theta$.

Очевидно: $y_1, \dots, y_{r_0+1} \in L(x_1, \dots, x_{r_0+1})$, $y_1, \dots, y_{r_0+1}$ — ортогональные векторы, $y_1, \dots, y_{r_0+1} \neq \theta$. Так как $x_1, \dots, x_{r_0+1}$ — линейно независимые векторы, то $\dim\big(L(x_1, \dots, x_{r_0+1})\big) = r_0 + 1$. Тогда $y_1, \dots, y_{r_0+1}$ — ортогональный базис подпространства $L(x_1, \dots, x_{r_0+1})$. Очевидно, $y_1, \dots, y_{r_0+1}$ — искомая последовательность векторов. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H *— линейное евклидово пространство над полем* $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_r \in H$, $x_1, \dots, x_r$ *— линейно независимые векторы,* $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{K}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$.

Пусть: $y_1, \dots, y_r \in H$, $y_1, \dots, y_r \neq \theta$, $y_1 = \lambda_1 x_1$, $y_k = \lambda_k\Big(x_k - \sum\limits_{m=\overline{1,k-1}} \frac{(y_m,x_k)}{(y_m,y_m)} y_m\Big)$ *при* $k = \overline{2, r}$.

Пусть: $z_1, \dots, z_r \in H$, $z_1, \dots, z_r \neq \theta$, $z_1 = \lambda_1 x_1$, $z_k = \lambda_k\Big(x_k - \sum\limits_{m=\overline{1,k-1}} \frac{(z_m,x_k)}{(z_m,z_m)} z_m\Big)$ *при* $k = \overline{2, r}$.

Тогда: $y_1 = z_1, \dots, y_r = z_r$.

8.2. Линейные псевдоевклидовы пространства

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$. Пусть F — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L,

$\det\bigl([F](e)\bigr) \neq 0$ при: e — базис пространства L. Будем говорить, что: F — псевдоскалярное произведение в пространстве L, (L, F) — линейное псевдоевклидово пространство над полем $\mathbb{K}$. Далее часто будем писать (x, y) вместо $F(x, y)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное псевдоевклидово пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $x \in H$. Будем говорить, что x — изотропный вектор, если $(x, x) = 0$. Будем говорить, что x — неизотропный вектор, если $(x, x) \neq 0$.

2. Пусть $Q \subseteq H$. Будем говорить, что Q — изотропное множество, если $\forall x\bigl(x \in Q \wedge x \neq \theta \implies (x, x) = 0\bigr)$. Будем говорить, что Q — неизотропное множество, если $\forall x\bigl(x \in Q \wedge x \neq \theta \implies (x, x) \neq 0\bigr)$.

3. Пусть x, $y \in H$. Будем писать $x \perp y$, если $(x, y) = 0$.

Пусть: x, $y \in H$, $x \perp y$. Тогда $(x, y) = 0$. Следовательно: $(y, x) = \overline{(x, y)} = \overline{0} = 0$. Тогда $y \perp x$.

4. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in H$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — псевдоортогональная последовательность векторов, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — нормированная последовательность векторов, если: $(x_k, x_k) = \pm 1$ при $k = \overline{1, r}$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — псевдоортонормированная последовательность векторов, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$; $(x_k, x_k) = \pm 1$ при $k = \overline{1, r}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ — псевдоортогональные векторы пространства H, $x_1, \ldots, x_r$ — неизотропные векторы. Докажем, что $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $C^1, \ldots, C^r \in \mathbb{K}$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} C^m x_m = \theta$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда:

$$\Bigl(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} C^m x_m\Bigr) = (x_k, \theta),$$
$$\sum_{m=\overline{1,r}} C^m (x_k, x_m) = 0,$$
$$C^k (x_k, x_k) = 0,$$
$$C^k = 0.$$

Итак, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

5. Пусть: $x \in H$, $Q \subseteq H$. Будем писать $x \perp Q$, если $\forall u \in Q(x \perp u)$.

6. Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq H$. Будем писать $Q_1 \perp Q_2$, если $\forall x_1 \in Q_1 \forall x_2 \in Q_2 (x_1 \perp x_2)$.

Пусть: Q_1, $Q_2 \subseteq H$, $Q_1 \perp Q_2$. Очевидно, $Q_2 \perp Q_1$.

7. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq H$. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — псевдоортогональная последовательность множеств, если: $Q_k \perp Q_m$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — псевдоортогональные подпространства пространства H, $Q_1, \ldots, Q_r$ — неизотропные подпространства. Докажем, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $\sum\limits_{m=\overline{1,r}} x_m = \theta$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда:

$$\Bigl(x_k, \sum_{m=\overline{1,r}} x_m\Bigr) = (x_k, \theta),$$
$$\sum_{m=\overline{1,r}} (x_k, x_m) = 0,$$
$$(x_k, x_k) = 0,$$

$$x_k = \theta.$$

Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

8. Пусть $Q \subseteq H$. Обозначим, $Q^\perp = \{x\colon x \in H \wedge x \perp Q\}$. Будем говорить, что $Q^\perp$ — псевдоортогональное дополнение множества Q.

Пусть $Q \subseteq H$. Очевидно: $Q^\perp \subseteq H$, $Q^\perp \perp Q$.

Пусть: Q_1, $Q_2 \subseteq H$, $Q_1 \perp Q_2$. Очевидно, $Q_1 \subseteq Q_2^\perp$.

Пусть $Q \subseteq H$. Тогда $Q^\perp \perp Q$. Следовательно, $Q \perp Q^\perp$. Тогда $Q \subseteq (Q^\perp)^\perp$.

Пусть $Q \subseteq H$. Докажем, что $Q^\perp$ — подпространство пространства H.

Очевидно: $Q^\perp \subseteq H$, $\theta \in Q^\perp$. Пусть x_1, $x_2 \in Q^\perp$. Тогда: x_1, $x_2 \in H$, x_1, $x_2 \perp Q$. Пусть $u \in Q$. Тогда: x_1, $x_2 \in H$, (x_1, u), $(x_2, u) = 0$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in H$, $(x_1 + x_2, u) = (x_1, u) + (x_2, u) = 0$. Тогда: $x_1 + x_2 \in H$, $x_1 + x_2 \perp Q$. Следовательно, $x_1 + x_2 \in Q^\perp$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q^\perp$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $x \perp Q$. Пусть $u \in Q$. Тогда: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in H$, $(x, u) = 0$. Следовательно: $\lambda x \in H$, $(\lambda x, u) = \overline{\lambda}(x, u) = 0$. Тогда: $\lambda x \in H$, $\lambda x \perp Q$. Следовательно, $\lambda x \in Q^\perp$. Итак, $Q^\perp$ — подпространство пространства H.

Пусть: Q_1, $Q_2 \subseteq H$, $Q_1 \perp Q_2$, $Q_1 + Q_2 = H$, Q_2 — неизотропное множество. Докажем, что $Q_1 = Q_2^\perp$.

Очевидно, $Q_1 \subseteq Q_2^\perp$. Пусть $x \in Q_2^\perp$. Тогда: $x \in H$, $x \perp Q_2$. Так как: $x \in H$, $Q_1 + Q_2 = H$, то существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Так как: $x \perp Q_2$, $x_2 \in Q_2$, то $(x, x_2) = 0$. Так как: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $Q_1 \perp Q_2$, то $(x_1, x_2) = 0$. Тогда:

$$0 = (x, x_2) = (x_1 + x_2, x_2) = (x_1, x_2) + (x_2, x_2) = (x_2, x_2).$$

Следовательно, $x_2 = \theta$. Тогда: $x = x_1 + x_2 = x_1 \in Q_1$. Следовательно, $Q_2^\perp \subseteq Q_1$. Так как $Q_1 \subseteq Q_2^\perp$, то $Q_1 = Q_2^\perp$.

Пусть: $Q \subseteq H$, $Q + Q^\perp = H$, $Q^\perp$ — неизотропное множество. Тогда: $Q^\perp \perp Q$, $Q + Q^\perp = H$, $Q^\perp$ — неизотропное множество. Следовательно: $Q \perp Q^\perp$, $Q + Q^\perp = H$, $Q^\perp$ — неизотропное множество. Тогда $Q = (Q^\perp)^\perp$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}\}$; H — линейное псевдоевклидово пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = N$.

1. Пусть e — базис пространства H. Обозначим: $g_{k,m}(e) = (e_k, e_m)$ при k, $m = \overline{1, N}$. Тогда: $g(e) \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $g(e)$ — эрмитова матрица, $\det\bigl(g(e)\bigr) \neq 0$. Очевидно: $g_{k,k}(e) = (e_k, e_k)$ при $k = \overline{1, N}$.

Пусть e, e' — базисы пространства H. Тогда: $g_{k',m'}(e') = g_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')$ при k', $m' = \overline{1, N}$; $g(e') = \overline{\alpha(e, e')^T} g(e)\alpha(e, e')$. Будем говорить, что g — ковариантный метрический тензор пространства H.

Пусть e — базис пространства H. Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда $g(e)$ — диагональная матрица.

Пусть $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — псевдоортогональный базис. Так как $\det\bigl(g(e)\bigr) \neq 0$, то $e_1, \ldots, e_N$ — неизотропные векторы.

Пусть e — псевдоортонормированный базис. Тогда: $g(e)$ — диагональная матрица, $g_{k,k}(e) = \pm 1$ при $k = \overline{1, N}$.

Пусть: $g(e)$ — диагональная матрица, $g_{k,k}(e) = \pm 1$ при $k = \overline{1, N}$. Тогда e — псевдоортонормированный базис.

Пусть: x, $y \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$. Тогда:

$$(x, y) = g_{k,m}(e)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^m.$$

Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда:

$$(x, y) = \sum_{k=\overline{1,N}} g_{k,k}(e)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k = \sum_{k=\overline{1,N}} (e_k, e_k)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{y}^k.$$

Согласно теореме Лагранжа, так как псевдоскалярное произведение есть эрмитова полуторалинейная форма, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства H, $g(e')$ — диагональная матрица. Тогда e' — псевдоортогональный базис.

2. Пусть e — базис пространства H. Обозначим: $g^{k,m}(e) = \big(g(e)^{-1}\big)^{k,m}$ при k, $m = \overline{1,N}$. Очевидно: $g(e)^{-1} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $g(e)^{-1}$ — эрмитова матрица, $\det\big(g(e)\big) \neq 0$.

Пусть e, e' — базисы пространства H. Тогда:

$$g(e')^{-1} = \big(\overline{\alpha(e,e')^T} g(e)\alpha(e,e')\big)^{-1} = g(e')^{-1} = \alpha(e',e)g(e)^{-1}\overline{\alpha(e',e)^T}.$$

Следовательно: $g^{k',m'}(e') = g^{k,m}(e)\alpha_k^{k'}(e',e)\overline{\alpha_m^{m'}(e,e')}$ при k', $m' = \overline{1,N}$. Будем говорить, что $\big\{g(e)^{-1}\big\}_e$ — контравариантный метрический тензор пространства H.

Пусть e — базис пространства H. Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e) = \frac{1}{g_{k,k}(e)} = \frac{1}{(e_k,e_k)}$ при $k = \overline{1,N}$.

Пусть $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица. Тогда e — псевдоортогональный базис.

Пусть e — псевдоортонормированный базис. Тогда: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e) = \pm 1$ при $k = \overline{1,N}$.

Пусть: $g(e)^{-1}$ — диагональная матрица, $g^{k,k}(e) = \pm 1$ при $k = \overline{1,N}$. Тогда e — псевдоортонормированный базис.

Пусть: $x \in H$, $\tilde{x} = [x](e)$. Пусть $m = \overline{1,N}$. Тогда:

$$(e_m, x) = (e_m, \tilde{x}^n e_n) = (e_m, e_n)\tilde{x}^n = g_{m,n}(e)\tilde{x}^n.$$

Пусть $k = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\begin{aligned} g^{k,m}(e)g_{m,n}(e)\tilde{x}^n &= g^{k,m}(e)(e_m, x), \\ \delta_n^k \tilde{x}^n &= g^{k,m}(e)(e_m, x), \\ \tilde{x}^k &= g^{k,m}(e)(e_m, x). \end{aligned}$$

Следовательно:

$$x = \tilde{x}^k e_k = g^{k,m}(e)(e_m, x)e_k.$$

Пусть e — псевдоортогональный базис. Тогда:

$$\tilde{x}^k = \frac{(e_k, x)}{g_{k,k}(e)} = \frac{(e_k, x)}{(e_k, e_k)};$$

$$x = \sum_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k, x)}{g_{k,k}(e)} e_k = \sum_{k=\overline{1,N}} \frac{(e_k, x)}{(e_k, e_k)} e_k.$$

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[4] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[5] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.