Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 7. Метод Лагранжа, закон инерции, критерий Сильвестра

7.1. Метод Лагранжа

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Обозначим:

$$\mu_*(\tilde{A}) = \big\{k_0 \colon k_0 = \overline{1, N} \wedge \forall k = \overline{1, N}(k \neq k_0 \implies \tilde{A}_{k_0,k} = 0 \wedge \tilde{A}_{k,k_0} = 0)\big\}.$$

Пусть $\tilde{A}$ — эрмитова (симметричная) матрица. Тогда:

$$\mu_*(\tilde{A}) = \big\{k_0 \colon k_0 = \overline{1, N} \wedge \forall k = \overline{1, N}(k \neq k_0 \implies \tilde{A}_{k_0,k} = 0)\big\},$$
$$\mu_*(\tilde{A}) = \big\{k_0 \colon k_0 = \overline{1, N} \wedge \forall k = \overline{1, N}(k \neq k_0 \implies \tilde{A}_{k,k_0} = 0)\big\}.$$

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L.*

1. Пусть: e — базис пространства L, $k_0 = \overline{1, N}$, $[A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0$. Тогда существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$.

2. Пусть: e — базис пространства L, k_0, $m_0 = \overline{1, N}$, $[A]_{k_0,k_0}(e)$, $[A]_{m_0,m_0}(e) = 0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$. Тогда существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$.

3. Пусть: e — базис пространства L, k_0, $m_0 = \overline{1, N}$, $[A]_{k_0,k_0}(e)$, $[A]_{m_0,m_0}(e) = 0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$. Тогда существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$.

4. Пусть: e — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \neq \{1, \ldots, N\}$. Тогда существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subset \mu_*\big([A](e')\big)$.

Доказательство.

1. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Пусть $x \in L$. Обозначим, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$A(x, x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,m} \overline{\tilde{x}^k} \tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0} \overline{\tilde{x}^{k_0}} \tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \tilde{A}_{k_0,m} \overline{\tilde{x}^{k_0}} \tilde{x}^m + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \tilde{A}_{k,k_0} \overline{\tilde{x}^k} \tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \tilde{A}_{k,m} \overline{\tilde{x}^k} \tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0} \left(\overline{\tilde{x}^{k_0}} \tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}} \overline{\tilde{x}^{k_0}} \tilde{x}^m + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k,k_0}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}} \overline{\tilde{x}^k} \tilde{x}^{k_0} \right) + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \tilde{A}_{k,m} \overline{\tilde{x}^k} \tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\left(\overline{\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\right)}\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m\right) - \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}\tilde{A}_{k_0,k_0}}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\right)}\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m\right) + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \left(\tilde{A}_{k,m} - \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\right)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m.$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{x}}^{k_0} = \tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m,$$

$$\tilde{\tilde{x}}^j = \tilde{x}^j, \quad j = \overline{1,N},\, j \neq k_0.$$

Тогда $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^N$. Обозначим:

$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k_0} = \tilde{A}_{k_0,k_0},$$

$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,m} = 0, \quad m = \overline{1,N},\, m \neq k_0;$$

$$\tilde{\tilde{A}}_{k,k_0} = 0, \quad k = \overline{1,N},\, k \neq k_0;$$

$$\tilde{\tilde{A}}_{k,m} = \tilde{A}_{k,m} - \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}, \quad k,\, m = \overline{1,N},\, k,\, m \neq k_0.$$

Тогда: $\tilde{\tilde{A}} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{\tilde{A}}$ — эрмитова матрица, $A(x,x) = \sum\limits_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\overline{\tilde{\tilde{x}}^k}\tilde{\tilde{x}}^m$, $k_0 \in \mu_*(\tilde{\tilde{A}})$, $\mu_*(\tilde{A}) \subseteq \mu_*(\tilde{\tilde{A}})$.

Обозначим:

$$\beta^{k_0}_{k_0} = 1,$$

$$\beta^{k_0}_m = \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}, \quad m = \overline{1,N},\, m \neq k_0;$$

$$\beta^j_m = \delta^j_m, \quad j = \overline{1,N},\, j \neq k_0,\, m = \overline{1,N}.$$

Тогда: $\beta \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(\beta) = 1 \neq 0$, $\tilde{\tilde{x}} = \beta\tilde{x}$. Обозначим: $e'_{k'} = (\beta^{-1})^k_{k'}e_k$ при $k' = \overline{1,N}$. Тогда: e' — базис пространства L, $\alpha(e,e') = \beta^{-1}$. Следовательно, $\alpha(e',e) = \beta$. Тогда: $[x](e') = \alpha(e',e)[x](e) = \beta\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$. Следовательно: $A(x,x) = \sum\limits_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\overline{[x]^k(e')}[x]^m(e')$ при $x \in L$. Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — эрмитова матрица, то $[A](e') = \tilde{\tilde{A}}$. Тогда: $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$.

2. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Так как: $\tilde{A}_{k_0,k_0} = 0$, $\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$, то $k_0 \neq m_0$. Так как $\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$, то $k_0,\, m_0 \notin \mu_*(\tilde{A})$. Пусть $x \in L$. Обозначим:

$$\tilde{x} = [x](e),$$

$$I_1(x) = \tilde{A}_{k_0,k_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{k_0} + \tilde{A}_{k_0,m_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{m_0} + \tilde{A}_{m_0,k_0}\overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^{k_0} + \tilde{A}_{m_0,m_0}\overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^{m_0},$$

$$I_2(x) = \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k_0,m}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^m + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{m_0,m}\overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^m,$$

$$I_3(x) = \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,k_0}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m_0}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^{m_0},$$

$$I_4(x) = \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m.$$

Тогда:

$$A(x,x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) + I_4(x),$$

$$I_1(x) = \tilde{A}_{k_0,m_0}\overline{\tilde{x}^{k_0}}\tilde{x}^{m_0} + \overline{\tilde{A}_{k_0,m_0}}\cdot\overline{\tilde{x}^{m_0}}\tilde{x}^{k_0}.$$

Очевидно, существует столбец $\tilde{\tilde{x}}$, удовлетворяющий условиям:

$$\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^N,$$

$$\tilde{x}^{k_0} = \frac{\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right),$$

$$\tilde{x}^{m_0} = \tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0},$$

$$\tilde{x}^j = \tilde{\tilde{x}}^j, \quad j = \overline{1,N},\ j \notin \{k_0, m_0\}.$$

Тогда:

$$I_1(x) = \left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\left(\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}} - \overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\right)\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right) + \left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\left(\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}} + \overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\right)\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right) =$$

$$= 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}}\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|\overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\tilde{\tilde{x}}^{m_0},$$

$$I_2(x) = \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \frac{\tilde{A}_{m_0,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}\left(\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}} - \overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\right)\tilde{\tilde{x}}^m + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{m_0,m}\left(\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}} + \overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\right)\tilde{\tilde{x}}^m =$$

$$= \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \left(\tilde{A}_{m_0,m} + \frac{\tilde{A}_{m_0,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}\right)\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k_0}}\tilde{\tilde{x}}^m + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \left(\tilde{A}_{m_0,m} - \frac{\tilde{A}_{m_0,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}\right)\overline{\tilde{\tilde{x}}^{m_0}}\tilde{\tilde{x}}^m,$$

$$I_3(x) = \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}\overline{\tilde{\tilde{x}}^k}\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right) + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m_0}\overline{\tilde{\tilde{x}}^k}\left(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \left(\tilde{A}_{k,m_0} + \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}\right)\overline{\tilde{\tilde{x}}^k}\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \left(\tilde{A}_{k,m_0} - \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}\right)\overline{\tilde{\tilde{x}}^k}\tilde{\tilde{x}}^{m_0},$$

$$I_4(x) = \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{\tilde{x}}^k}\tilde{\tilde{x}}^m.$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k_0} = 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|,$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,m_0} = 0,$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{m_0,k_0} = 0,$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{m_0,m_0} = -2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|,$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,m} = \tilde{A}_{m_0,m} + \frac{\tilde{A}_{m_0,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{m_0,m} = \tilde{A}_{m_0,m} - \frac{\tilde{A}_{m_0,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k,k_0} = \tilde{A}_{k,m_0} + \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}, \quad k = \overline{1,N},\, k \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k,m_0} = \tilde{A}_{k,m_0} - \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}, \quad k = \overline{1,N},\, k \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k,m} = \tilde{A}_{k,m}, \quad k,\, m = \overline{1,N},\, k,\, m \notin \{k_0, m_0\}.$$

Тогда: $\tilde{\tilde{A}} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{\tilde{A}}$ — эрмитова матрица, $A(x,x) = \sum\limits_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\overline{\tilde{\tilde{x}}^k}\tilde{\tilde{x}}^m$, $\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k_0} = 2\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right| \neq 0$, $\mu_*(\tilde{A}) \subseteq \mu_*(\tilde{\tilde{A}})$.

Обозначим:

$$\beta^{k_0}_{k_0} = \frac{\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|},$$
$$\beta^{k_0}_{m_0} = -\frac{\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|},$$
$$\beta^{k_0}_{m} = 0, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\},$$
$$\beta^{m_0}_{k_0} = 1,$$
$$\beta^{m_0}_{m_0} = 1,$$
$$\beta^{m_0}_{m} = 0, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\},$$
$$\beta^{j}_{m} = \delta^{j}_{m}, \quad j = \overline{1,N},\, j \notin \{k_0, m_0\},\, m = \overline{1,N}.$$

Тогда: $\beta \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(\beta) = 2\frac{\tilde{A}_{k_0,m_0}}{\left|\tilde{A}_{k_0,m_0}\right|}\operatorname{sgn}(m_0 - k_0) \neq 0$, $\tilde{x} = \beta\tilde{\tilde{x}}$. Следовательно, $\tilde{\tilde{x}} = \beta^{-1}\tilde{x}$. Обозначим: $e'_{k'} = \beta^{k}_{k'}e_k$ при $k' = \overline{1,N}$. Тогда: e' — базис пространства L, $\alpha(e,e') = \beta$. Следовательно, $\alpha(e',e) = \beta^{-1}$. Тогда: $[x](e') = \alpha(e',e)[x](e) = \beta^{-1}\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$. Следовательно: $A(x,x) = \sum\limits_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\overline{[x]^k(e')}[x]^m(e')$ при $x \in L$. Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — эрмитова матрица, то $[A](e') = \tilde{\tilde{A}}$. Тогда: $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$.

3. Очевидно, существуют векторы $e'_1, \dots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$. Так как $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$, то существуют векторы $e''_1, \dots, e''_N$, удовлетворяющие условиям: e'' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e')\big) \subseteq \mu_*\big([A](e'')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e'')\big)$. Так как $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, то: e'' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e'')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e'')\big)$.

4. Так как $\mu_*\big([A](e)\big) \neq \{1, \dots, N\}$, то $\exists k_0 = \overline{1,N}\Big(k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)\Big)$. Пусть $\exists k_0 = \overline{1,N}\Big(k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big) \wedge [A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0\Big)$. Выберем число k_0, удовлетворяющее условиям: $k_0 = \overline{1,N}$, $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0$. Так как $[A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0$, то существуют векторы $e'_1, \dots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$. Так как $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, то: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subset \mu_*\big([A](e')\big)$.

Пусть $\forall k_0 = \overline{1,N}\Big(k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big) \implies [A]_{k_0,k_0}(e) = 0\Big)$. Выберем число k_0, удовлетворяющее условиям: $k_0 = \overline{1,N}$, $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$. Тогда $[A]_{k_0,k_0}(e) = 0$. Так как: $[A](e)$ — эрмитова матрица, $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, то существует число m_0, удовлетворяющее условиям: $m_0 = \overline{1,N}$, $m_0 \neq k_0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$. Тогда $m_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$. Следовательно, $[A]_{m_0,m_0}(e) = 0$. Так как: $[A]_{k_0,k_0}(e) = 0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$, то существуют векторы $e'_1, \dots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$. Так как $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, то: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subset \mu_*\big([A](e')\big)$. □

Теорема (метод Лагранжа). *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Тогда существуют векторы $e_1, \dots, e_N$, удовлетворяющие условиям: e — базис пространства L, $[A](e)$ — диагональная матрица.*

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — симметричная билинейная форма в пространстве L.*

1. Пусть: e — базис пространства L, $k_0 = \overline{1,N}$, $[A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0$. Тогда существуют векторы $e'_1, \dots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$.

2. Пусть: e — базис пространства L, k_0, $m_0 = \overline{1,N}$, $[A]_{k_0,k_0}(e)$, $[A]_{m_0,m_0}(e) = 0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$. Тогда существуют векторы $e'_1, \dots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$.

3. Пусть: e — базис пространства L, k_0, $m_0 = \overline{1,N}$, $[A]_{k_0,k_0}(e)$, $[A]_{m_0,m_0}(e) = 0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$. Тогда существуют векторы $e'_1, \dots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$.

4. Пусть: e — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \neq \{1, \dots, N\}$. Тогда существуют векторы $e'_1, \dots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subset \mu_*\big([A](e')\big)$.

Доказательство.

1. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Пусть $x \in L$. Обозначим, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$A(x,x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^k\tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \tilde{A}_{k_0,m}\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^m + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \tilde{A}_{k,k_0}\tilde{x}^k\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^k\tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\left(\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^m + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k,k_0}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\tilde{x}^{k_0}\right) + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^k\tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\left(\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\right)\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m\right) - \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\tilde{x}^m\right) +$$

$$+ \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^k\tilde{x}^m =$$

$$= \tilde{A}_{k_0,k_0}\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,k}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^k\right)\left(\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m\right) + \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0}} \left(\tilde{A}_{k,m} - \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\right)\tilde{x}^k\tilde{x}^m.$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{x}}^{k_0} = \tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0}} \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}\tilde{x}^m,$$

$$\tilde{\tilde{x}}^j = \tilde{x}^j, \quad j = \overline{1,N},\ j \neq k_0.$$

Тогда $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^N$. Обозначим:

$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k_0} = \tilde{A}_{k_0,k_0},$$

$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,m} = 0, \quad m = \overline{1,N},\ m \neq k_0;$$

$$\tilde{\tilde{A}}_{k,k_0} = 0, \quad k = \overline{1,N},\ k \neq k_0;$$

$$\tilde{\tilde{A}}_{k,m} = \tilde{A}_{k,m} - \frac{\tilde{A}_{k,k_0}\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}, \quad k,\ m = \overline{1,N},\ k,\ m \neq k_0.$$

Тогда: $\tilde{\tilde{A}} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{\tilde{A}}$ — симметричная матрица, $A(x,x) = \sum\limits_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\tilde{\tilde{x}}^k\tilde{\tilde{x}}^m$, $k_0 \in \mu_*(\tilde{\tilde{A}})$, $\mu_*(\tilde{A}) \subseteq \mu_*(\tilde{\tilde{A}})$.

Обозначим:

$$\beta^{k_0}_{k_0} = 1,$$

$$\beta^{k_0}_m = \frac{\tilde{A}_{k_0,m}}{\tilde{A}_{k_0,k_0}}, \quad m = \overline{1,N},\ m \neq k_0;$$

$$\beta^j_m = \delta^j_m, \quad j = \overline{1,N},\ j \neq k_0,\ m = \overline{1,N}.$$

Тогда: $\beta \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(\beta) = 1 \neq 0$, $\tilde{\tilde{x}} = \beta\tilde{x}$. Обозначим: $e'_{k'} = (\beta^{-1})^k_{k'}e_k$ при $k' = \overline{1,N}$. Тогда: e' — базис пространства L, $\alpha(e,e') = \beta^{-1}$. Следовательно, $\alpha(e',e) = \beta$. Тогда: $[x](e') = \alpha(e',e)[x](e) = \beta\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$. Следовательно: $A(x,x) = \sum\limits_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m}[x]^k(e')[x]^m(e')$ при $x \in L$. Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — симметричная матрица, то $[A](e') = \tilde{\tilde{A}}$. Тогда: $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$.

2. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Так как: $\tilde{A}_{k_0,k_0} = 0$, $\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$, то $k_0 \neq m_0$. Так как $\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$, то k_0, $m_0 \notin \mu_*(\tilde{A})$. Пусть $x \in L$. Обозначим:

$$\begin{gathered}
\tilde{x} = [x](e),\\
I_1(x) = \tilde{A}_{k_0,k_0}\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^{k_0} + \tilde{A}_{k_0,m_0}\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^{m_0} + \tilde{A}_{m_0,k_0}\tilde{x}^{m_0}\tilde{x}^{k_0} + \tilde{A}_{m_0,m_0}\tilde{x}^{m_0}\tilde{x}^{m_0},\\
I_2(x) = \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k_0,m}\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^{m} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{m_0,m}\tilde{x}^{m_0}\tilde{x}^{m},\\
I_3(x) = \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,k_0}\tilde{x}^{k}\tilde{x}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m_0}\tilde{x}^{k}\tilde{x}^{m_0},\\
I_4(x) = \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^{k}\tilde{x}^{m}.
\end{gathered}$$

Тогда:

$$\begin{gathered}
A(x,x) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{x}^{k}\tilde{x}^{m} = I_1(x) + I_2(x) + I_3(x) + I_4(x),\\
I_1(x) = \tilde{A}_{k_0,m_0}\tilde{x}^{k_0}\tilde{x}^{m_0} + \tilde{A}_{k_0,m_0}\tilde{x}^{m_0}\tilde{x}^{k_0}.
\end{gathered}$$

Очевидно, существует столбец $\tilde{\tilde{x}}$, удовлетворяющий условиям:

$$\begin{gathered}
\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^N,\\
\tilde{x}^{k_0} = \tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0},\\
\tilde{x}^{m_0} = \tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0},\\
\tilde{x}^{j} = \tilde{\tilde{x}}^{j}, \quad j = \overline{1,N},\, j \notin \{k_0, m_0\}.
\end{gathered}$$

Тогда:

$$\begin{gathered}
I_1(x) = \tilde{A}_{k_0,m_0}\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big)\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big) + \tilde{A}_{k_0,m_0}\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big)\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big) =\\
= 2\tilde{A}_{k_0,m_0}\tilde{\tilde{x}}^{k_0}\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - 2\tilde{A}_{k_0,m_0}\tilde{\tilde{x}}^{m_0}\tilde{\tilde{x}}^{m_0},\\
I_2(x) = \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k_0,m}\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big)\tilde{\tilde{x}}^{m} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{m_0,m}\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big)\tilde{\tilde{x}}^{m} =\\
= \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \big(\tilde{A}_{m_0,m} + \tilde{A}_{k_0,m}\big)\tilde{\tilde{x}}^{k_0}\tilde{\tilde{x}}^{m} + \sum_{\substack{m=\overline{1,N},\\ m\neq k_0,m_0}} \big(\tilde{A}_{m_0,m} - \tilde{A}_{k_0,m}\big)\tilde{\tilde{x}}^{m_0}\tilde{\tilde{x}}^{m},\\
I_3(x) = \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,k_0}\tilde{\tilde{x}}^{k}\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} - \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big) + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m_0}\tilde{\tilde{x}}^{k}\Big(\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \tilde{\tilde{x}}^{m_0}\Big) =\\
= \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \big(\tilde{A}_{k,m_0} + \tilde{A}_{k,k_0}\big)\tilde{\tilde{x}}^{k}\tilde{\tilde{x}}^{k_0} + \sum_{\substack{k=\overline{1,N},\\ k\neq k_0,m_0}} \big(\tilde{A}_{k,m_0} - \tilde{A}_{k,k_0}\big)\tilde{\tilde{x}}^{k}\tilde{\tilde{x}}^{m_0},\\
I_4(x) = \sum_{\substack{k,m=\overline{1,N},\\ k,m\neq k_0,m_0}} \tilde{A}_{k,m}\tilde{\tilde{x}}^{k}\tilde{\tilde{x}}^{m}.
\end{gathered}$$

Обозначим:

$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k_0} = 2\tilde{A}_{k_0,m_0},$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,m_0} = 0,$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{m_0,k_0} = 0,$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{m_0,m_0} = -2\tilde{A}_{k_0,m_0},$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k_0,m} = \tilde{A}_{m_0,m} + \tilde{A}_{k_0,m}, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{m_0,m} = \tilde{A}_{m_0,m} - \tilde{A}_{k_0,m}, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k,k_0} = \tilde{A}_{k,m_0} + \tilde{A}_{k,k_0}, \quad k = \overline{1,N},\, k \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k,m_0} = \tilde{A}_{k,m_0} - \tilde{A}_{k,k_0}, \quad k = \overline{1,N},\, k \notin \{k_0, m_0\};$$
$$\tilde{\tilde{A}}_{k,m} = \tilde{A}_{k,m}, \quad k,\, m = \overline{1,N},\, k,\, m \notin \{k_0, m_0\}.$$

Тогда: $\tilde{\tilde{A}} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{\tilde{A}}$ — симметричная матрица, $A(x,x) = \sum\limits_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m}\tilde{\tilde{x}}^k\tilde{\tilde{x}}^m$, $\tilde{\tilde{A}}_{k_0,k_0} = 2\tilde{A}_{k_0,m_0} \neq 0$, $\mu_*(\tilde{A}) \subseteq \mu_*(\tilde{\tilde{A}})$.

Обозначим:

$$\beta^{k_0}_{k_0} = 1,$$
$$\beta^{k_0}_{m_0} = -1,$$
$$\beta^{k_0}_{m} = 0, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\},$$
$$\beta^{m_0}_{k_0} = 1,$$
$$\beta^{m_0}_{m_0} = 1,$$
$$\beta^{m_0}_{m} = 0, \quad m = \overline{1,N},\, m \notin \{k_0, m_0\},$$
$$\beta^{j}_{m} = \delta^j_m, \quad j = \overline{1,N},\, j \notin \{k_0, m_0\},\, m = \overline{1,N}.$$

Тогда: $\beta \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\det(\beta) = 2\operatorname{sgn}(m_0 - k_0) \neq 0$, $\tilde{x} = \beta\tilde{\tilde{x}}$. Следовательно, $\tilde{\tilde{x}} = \beta^{-1}\tilde{x}$. Обозначим: $e'_{k'} = \beta^k_{k'}e_k$ при $k' = \overline{1,N}$. Тогда: e' — базис пространства L, $\alpha(e,e') = \beta$. Следовательно, $\alpha(e',e) = \beta^{-1}$. Тогда: $[x](e') = \alpha(e',e)[x](e) = \beta^{-1}\tilde{x} = \tilde{\tilde{x}}$. Следовательно: $A(x,x) = \sum\limits_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{\tilde{A}}_{k,m}[x]^k(e')[x]^m(e')$ при $x \in L$. Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — симметричная матрица, то $[A](e') = \tilde{\tilde{A}}$. Тогда: $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$.

3. Очевидно, существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$. Так как $[A]_{k_0,k_0}(e') \neq 0$, то существуют векторы $e''_1, \ldots, e''_N$, удовлетворяющие условиям: e'' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e')\big) \subseteq \mu_*\big([A](e'')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e'')\big)$. Так как $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, то: e'' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e'')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e'')\big)$.

4. Так как $\mu_*\big([A](e)\big) \neq \{1, \ldots, N\}$, то $\exists k_0 = \overline{1,N}\Big(k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)\Big)$. Пусть $\exists k_0 = \overline{1,N}\Big(k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big) \wedge [A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0\Big)$. Выберем число k_0, удовлетворяющее условиям: $k_0 = \overline{1,N}$, $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, $[A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0$. Так как $[A]_{k_0,k_0}(e) \neq 0$, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$. Так как $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, то: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subset \mu_*\big([A](e')\big)$.

Пусть $\forall k_0 = \overline{1,N}\Big(k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big) \implies [A]_{k_0,k_0}(e) = 0\Big)$. Выберем число k_0, удовлетворяющее условиям: $k_0 = \overline{1,N}$, $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$. Тогда $[A]_{k_0,k_0}(e) = 0$. Так как: $[A](e)$ — симметричная матрица, $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, то существует число m_0, удовлетворяющее условиям: $m_0 = \overline{1,N}$, $m_0 \neq k_0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$. Тогда $m_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$. Следовательно, $[A]_{m_0,m_0}(e) = 0$. Так как: $[A]_{k_0,k_0}(e) = 0$, $[A]_{k_0,m_0}(e) \neq 0$, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subseteq \mu_*\big([A](e')\big)$, $k_0 \in \mu_*\big([A](e')\big)$. Так как $k_0 \notin \mu_*\big([A](e)\big)$, то: e' — базис пространства L, $\mu_*\big([A](e)\big) \subset \mu_*\big([A](e')\big)$. □

Теорема (метод Лагранжа). *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — симметричная билинейная форма в пространстве L. Тогда существуют векторы $e_1, \ldots, e_N$, удовлетворяющие условиям: e — базис пространства L, $[A](e)$ — диагональная матрица.*

7.2. Закон инерции

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; A — полуторалинейная форма в пространстве L, Q — подпространство пространства L, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(Q) = N_1$, e — базис подпространства Q. Пусть: $x \in L$, $\forall k = \overline{1,N_1}\big(A(e_k, x) = 0\big)$. Докажем, что $\forall u \in Q\big(A(u, x) = 0\big)$.

Пусть $u \in Q$. Обозначим, $\tilde{u} = [u](e)$. Тогда:

$$A(u, x) = A(\tilde{u}^k e_k, x) = \overline{\tilde{u}^k} A(e_k, x) = 0.$$

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; A — полуторалинейная форма в пространстве L, Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, $\dim(Q_1) < \dim(Q_2)$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$. Тогда существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in Q_2$, $x \neq \theta$, $\forall u \in Q_1\big(A(u, x) = 0\big)$.*

Доказательство. Обозначим: $N_1 = \dim(Q_1)$, $N_2 = \dim(Q_2)$. Тогда: N_1, $N_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, $N_1 < N_2$, $N_2 \neq +\infty$. Следовательно: $N_1 \in \mathbb{Z}_+$, $N_2 \in \mathbb{N}$. Так как $N_2 \in \mathbb{N}$, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_{N_2}$, удовлетворяющие условию: e' — базис подпространства Q_2.

Пусть $N_1 = 0$. Тогда $Q_1 = \{\theta\}$. Очевидно: $e'_1 \in Q_2$, $e'_1 \neq \theta$, $A(u, e'_1) = A(\theta, e'_1) = 0$ при $u \in Q_1$.

Пусть $N_1 \neq 0$. Тогда $N_1 \in \mathbb{N}$. Следовательно, существуют векторы $e_1, \ldots, e_{N_1}$, удовлетворяющие условию: e — базис подпространства Q_1.

Пусть: $x \in Q_2$, $x \neq \theta$, $\forall u \in Q_1\big(A(u, x) = 0\big)$. Обозначим, $\tilde{x} = [x](e')$. Так как: $x \in Q_2$, $x \neq \theta$, то: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_2}$, $\tilde{x} \neq \tilde{\theta}_2$. Так как $\forall u \in Q_1\big(A(u, x) = 0\big)$, то:

$$A(e_k, x) = 0, \quad k = \overline{1, N_1};$$
$$A(e_k, \tilde{x}^{k'} e'_{k'}) = 0, \quad k = \overline{1, N_1};$$
$$A(e_k, e'_{k'}) \tilde{x}^{k'} = 0, \quad k = \overline{1, N_1}.$$

Так как $N_1 < N_2$, то существует столбец $\tilde{x}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_2}$, $\tilde{x} \neq \tilde{\theta}_2$, $\forall k = \overline{1,N_1}\big(A(e_k, e'_{k'})\tilde{x}^{k'} = 0\big)$. Обозначим, $x = \tilde{x}^{k'} e'_{k'}$. Так как: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_2}$, $\tilde{x} \neq \tilde{\theta}_2$, то: $x \in Q_2$, $x \neq \theta$. Так как $\forall k = \overline{1,N_1}\big(A(e_k, e'_{k'})\tilde{x}^{k'} = 0\big)$, то:

$$A(e_k, \tilde{x}^{k'} e'_{k'}) = 0, \quad k = \overline{1, N_1};$$
$$A(e_k, x) = 0, \quad k = \overline{1, N_1};$$
$$A(u, x) = 0, \quad u \in Q_1. \quad \square$$

Теорема (закон инерции для эрмитовых полуторалинейных форм)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L*.*

Пусть: e *— базис пространства* L*,* $[A](e)$ *— диагональная матрица,* p_1 *— количество положительных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e)$*,* n_1 *— количество отрицательных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e)$*.*

Пусть: e' *— базис пространства* L*,* $[A](e')$ *— диагональная матрица,* p_2 *— количество положительных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e')$*,* n_2 *— количество отрицательных элементов на главной диагонали матрицы* $[A](e')$*. Тогда:* $p_1 = p_2$*,* $n_1 = n_2$*.*

Доказательство. Очевидно, p_1, n_1, p_2, $n_2 = \overline{0,N}$. Без ограничения общности можно считать, что: $[A]_{k,k}(e) > 0$ при $k = \overline{1,p_1}$; $[A]_{k,k}(e) < 0$ при $k = \overline{p_1+1, p_1+n_1}$; $[A]_{k',k'}(e') > 0$ при $k' = \overline{1,p_2}$; $[A]_{k',k'}(e') < 0$ при $k' = \overline{p_2+1, p_2+n_2}$. Тогда: $[A]_{k,k}(e) = 0$ при $k = \overline{p_1+n_1+1, N}$; $[A]_{k',k'}(e') = 0$ при $k' = \overline{p_2+n_2+1, N}$. Обозначим: $\tilde{A} = [A](e)$, $\tilde{\tilde{A}} = [A](e')$. Предположим, что $p_1 < p_2$. Тогда: $p_1 = \overline{0, N-1}$, $p_2 = \overline{1,N}$.

Предположим, что $p_1 = 0$. Обозначим, $\tilde{x} = [e'_1](e)$. Тогда:

$$A(e'_1, e'_1) = \sum_{k,m=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,m} \overline{\tilde{x}^k} \tilde{x}^m = \sum_{k=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,k} \left|\tilde{x}^k\right|^2 \leqslant 0.$$

Очевидно: $A(e'_1, e'_1) = \tilde{\tilde{A}}_{1,1} > 0$ (что противоречит утверждению: $A(e'_1, e'_1) \leqslant 0$). Итак, $p_1 \neq 0$. Тогда $p_1 = \overline{1, N-1}$.

Очевидно: $\dim\bigl(L(e_1, \ldots, e_{p_1})\bigr) = p_1$, $\dim\bigl(L(e'_1, \ldots, e'_{p_2})\bigr) = p_2$. Так как $p_1 < p_2$, то существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in L(e'_1, \ldots, e'_{p_2})$, $x \neq \theta$, $\forall u \in L(e_1, \ldots, e_{p_1})\bigl(A(u,x) = 0\bigr)$. Обозначим, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда:

$$A(x,x) = A\Bigl(\sum_{k=\overline{1,N}} \tilde{x}^k e_k, x\Bigr) = \sum_{k=\overline{1,N}} A(e_k, x)\overline{\tilde{x}^k} = \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} A(e_k, x)\overline{\tilde{x}^k} =$$

$$= \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} A\Bigl(e_k, \sum_{m=\overline{1,N}} \tilde{x}^m e_m\Bigr)\overline{\tilde{x}^k} = \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} \sum_{m=\overline{1,N}} A(e_k, e_m)\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m = \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} \sum_{m=\overline{1,N}} \tilde{A}_{k,m}\overline{\tilde{x}^k}\tilde{x}^m =$$

$$= \sum_{k=\overline{p_1+1,N}} \tilde{A}_{k,k} \left|\tilde{x}^k\right|^2 \leqslant 0.$$

Обозначим, $\tilde{\tilde{x}} = [x](e'_1, \ldots, e'_{p_2})$. Так как: $x \in L(e'_1, \ldots, e'_{p_2})$, $x \neq \theta$, то: $\tilde{\tilde{x}} \in \mathbb{K}^{p_2}$, $\tilde{\tilde{x}} \neq \tilde{\theta}_2$. Тогда:

$$A(x,x) = A\Bigl(\sum_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{k'} e'_{k'}, \sum_{m'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{x}}^{m'} e'_{m'}\Bigr) = \sum_{k',m'=\overline{1,p_2}} A(e'_{k'}, e'_{m'})\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k'}}\tilde{\tilde{x}}^{m'} = \sum_{k',m'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{A}}_{k',m'}\overline{\tilde{\tilde{x}}^{k'}}\tilde{\tilde{x}}^{m'} =$$

$$= \sum_{k'=\overline{1,p_2}} \tilde{\tilde{A}}_{k',k'} \left|\tilde{\tilde{x}}^{k'}\right|^2 > 0$$

(что противоречит утверждению: $A(x,x) \leqslant 0$). Итак, $p_2 \leqslant p_1$.

Аналогично получаем, что $p_1 \leqslant p_2$. Тогда $p_1 = p_2$. Аналогично получаем, что $n_1 = n_2$. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть: e — базис пространства L, $[A](e)$ — диагональная матрица, p — количество положительных элементов на главной диагонали матрицы $[A](e)$, n — количество отрицательных элементов на главной диагонали матрицы $[A](e)$. Будем говорить, что (p,n) — сигнатура формы A.

7.3. Критерий Сильвестра

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L.

Пусть: $A > 0$, e — базис пространства L. Пусть $k = \overline{1, N}$. Так как $e_k \neq \theta$, то: $[A]_{k,k}(e) = A(e_k, e_k) > 0$.

Пусть e, e' — базисы пространства L. Тогда:

$$\det\bigl([A](e')\bigr) = \det\bigl(\overline{\alpha(e, e')^T}[A](e)\alpha(e, e')\bigr) = \Bigl|\det\bigl(\alpha(e, e')\bigr)\Bigr|^2 \det\bigl([A](e)\bigr).$$

Следовательно, $\operatorname{sgn}\Bigl(\det\bigl([A](e')\bigr)\Bigr) = \operatorname{sgn}\Bigl(\det\bigl([A](e)\bigr)\Bigr)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$, $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L, e *— базис пространства* L, $A(x, x) > 0$ *при:* $x \in L(e_1, \dots, e_{N-1})$, $x \neq \theta$. *Тогда существуют векторы* $e'_1, \dots, e'_N$, *удовлетворяющие условиям:* e' *— базис пространства* L, $e'_k = e_k$ *при* $k = \overline{1, N-1}$*;* $N \in \mu_*\bigl([A](e')\bigr)$.

Доказательство. Очевидно: $\dim\bigl(L(e_1, \dots, e_{N-1})\bigr) = N - 1$, $\dim(L) = N$. Так как $N - 1 < N$, то существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in L$, $x \neq \theta$, $\forall u \in L(e_1, \dots, e_{N-1})\bigl(A(u, x) = 0\bigr)$. Предположим, что $e_1, \dots, e_{N-1}$, x — линейно зависимые векторы. Так как $e_1, \dots, e_{N-1}$ — линейно независимые векторы, то $x \in L(e_1, \dots, e_{N-1})$. Тогда $A(x, x) = 0$. Так как: $x \in L(e_1, \dots, e_{N-1})$, $x \neq \theta$, то $A(x, x) > 0$ (что противоречит утверждению: $A(x, x) = 0$). Итак, $e_1, \dots, e_{N-1}$, x — линейно независимые векторы.

Обозначим: $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N-1}$; $e'_N = x$. Тогда: $e'_1, \dots, e'_N$ — линейно независимые векторы пространства L, $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N-1}$; $A(e'_k, e'_N) = 0$ при $k = \overline{1, N-1}$. Так как: $e'_1, \dots, e'_N$ — линейно независимые векторы пространства L, $\dim(L) = N$, то e' — базис пространства L. Пусть $k = \overline{1, N-1}$. Тогда: $[A]_{k,N}(e') = A(e'_k, e'_N) = 0$. Так как $[A](e')$ — эрмитова матрица, то $N \in \mu_*\bigl([A](e')\bigr)$. □

Теорема (критерий Сильвестра)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$*;* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L, e *— базис пространства* L, $\tilde{A} = [A](e)$.

1. Справедливо утверждение: $A > 0$ *тогда и только тогда, когда* $\forall k = \overline{1, N}\bigl(\Delta_k(\tilde{A}) > 0\bigr)$.

2. Справедливо утверждение: $A < 0$ *тогда и только тогда, когда* $\forall k = \overline{1, N}\Bigl(\operatorname{sgn}\bigl(\Delta_k(\tilde{A})\bigr) = (-1)^k\Bigr)$.

3. Пусть: $\det(\tilde{A}) \neq 0$, $\neg(A > 0)$, $\neg(A < 0)$. *Тогда* A *— знакопеременная форма.*

Доказательство.

1. **Пусть** $A > 0$**. Докажем, что:** $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ **при** $k = \overline{1, N}$**.**

Пусть $N = 1$. Так как $A > 0$, то $\tilde{A}_{1,1} > 0$. Тогда:

$$\Delta_1(\tilde{A}) = \det(\tilde{A}) = \tilde{A}_{1,1} > 0.$$

Пусть: $N_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $N = N_0$. Докажем, что утверждение справедливо при $N = N_0 + 1$. Так как: $A(x, x) > 0$ при: $x \in L(e_1, \dots, e_{N_0})$, $x \neq \theta$, то: $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ при $k = \overline{1, N_0}$. Так как A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, то существуют векторы $e'_1, \dots, e'_{N_0+1}$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L,

$[A](e')$ — диагональная матрица. Обозначим, $\tilde{\tilde{A}} = [A](e')$. Так как $A > 0$, то: $\tilde{\tilde{A}}_{k,k} > 0$ при $k = \overline{1, N_0+1}$. Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — диагональная матрица, то: $\det(\tilde{\tilde{A}}) = \tilde{\tilde{A}}_{1,1} \cdots \tilde{\tilde{A}}_{N_0+1,N_0+1} > 0$. Тогда $\det(\tilde{A}) > 0$. Следовательно: $\Delta_{N_0+1}(\tilde{A}) = \det(\tilde{A}) > 0$.

Пусть: $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ **при** $k = \overline{1, N}$**. Докажем, что** $A > 0$**.**

Пусть $N = 1$. Пусть: $x \in L$, $x \neq \theta$. Обозначим, $\tilde{x} = [x](e)$. Тогда: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^1$, $\tilde{x} \neq \tilde{\theta}$. Следовательно:

$$A(x, x) = \tilde{A}_{1,1} \left|\tilde{x}^1\right|^2 = \det(\tilde{A}) \left|\tilde{x}^1\right|^2 = \Delta_1(\tilde{A}) \left|\tilde{x}^1\right|^2 > 0.$$

Пусть: $N_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $N = N_0$. Докажем, что утверждение справедливо при $N = N_0 + 1$. Так как: $\Delta_k(\tilde{A}) > 0$ при $k = \overline{1, N_0}$, то: $A(x, x) > 0$ при: $x \in L(e_1, \ldots, e_{N_0})$, $x \neq \theta$. Тогда существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_{N_0+1}$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N_0}$; $N_0 + 1 \in \mu_*\big([A](e')\big)$. Обозначим, $\tilde{\tilde{A}} = [A](e')$. Так как: $e'_k = e_k$ при $k = \overline{1, N_0}$, то: $\tilde{\tilde{A}}_{k,m} = \tilde{A}_{k,m}$ при k, $m = \overline{1, N_0}$. Тогда: $\Delta_{N_0}(\tilde{\tilde{A}}) = \Delta_{N_0}(\tilde{A}) > 0$. Так как: $\det(\tilde{A}) = \Delta_{N_0+1}(\tilde{A}) > 0$, то $\det(\tilde{\tilde{A}}) > 0$. Так как: $\tilde{\tilde{A}}_{k,N_0+1} = 0$ при $k = \overline{1, N_0}$, то $\det(\tilde{\tilde{A}}) = \tilde{\tilde{A}}_{N_0+1,N_0+1} \Delta_{N_0}(\tilde{\tilde{A}})$. Тогда:

$$\tilde{\tilde{A}}_{N_0+1,N_0+1} = \frac{\det(\tilde{\tilde{A}})}{\Delta_{N_0}(\tilde{\tilde{A}})} > 0.$$

Пусть: $x \in L$, $x \neq \theta$. Обозначим, $\tilde{x} = [x](e')$. Тогда: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_0+1}$, $\tilde{x} \neq \tilde{\theta}$. Следовательно:

$$\begin{aligned} A(x, x) &= A\Big(\sum_{k=\overline{1,N_0+1}} \tilde{x}^k e'_k, \sum_{m=\overline{1,N_0+1}} \tilde{x}^m e'_m\Big) = \\ &= A\Big(\sum_{k=\overline{1,N_0}} \tilde{x}^k e'_k + \tilde{x}^{N_0+1} e'_{N_0+1}, \sum_{m=\overline{1,N_0}} \tilde{x}^m e'_m + \tilde{x}^{N_0+1} e'_{N_0+1}\Big) = \\ &= A\Big(\sum_{k=\overline{1,N_0}} \tilde{x}^k e'_k, \sum_{m=\overline{1,N_0}} \tilde{x}^m e'_m\Big) + \tilde{\tilde{A}}_{N_0+1,N_0+1} \left|\tilde{x}^{N_0+1}\right|^2 > 0. \end{aligned}$$

2. Обозначим: $B(x, y) = -A(x, y)$ при x, $y \in L$. Тогда B — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Обозначим, $\tilde{B} = [B](e)$. Тогда $\tilde{B} = -\tilde{A}$.

Пусть $A < 0$. Тогда $B > 0$. Следовательно $\forall k = \overline{1, N}\big(\Delta_k(\tilde{B}) > 0\big)$. Тогда: $\operatorname{sgn}\big(\Delta_k(\tilde{A})\big) = \operatorname{sgn}\big(\Delta_k(-\tilde{B})\big) = \operatorname{sgn}\big((-1)^k \Delta_k(\tilde{B})\big) = (-1)^k$ при $k = \overline{1, N}$.

Пусть $\forall k = \overline{1, N}\Big(\operatorname{sgn}\big(\Delta_k(\tilde{A})\big) = (-1)^k\Big)$. Тогда: $\Delta_k(\tilde{B}) = \Delta_k(-\tilde{A}) = (-1)^k \Delta_k(\tilde{A}) > 0$ при $k = \overline{1, N}$. Следовательно, $B > 0$. Тогда $A < 0$.

3. Так как A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, то существуют векторы $e'_1, \ldots, e'_N$, удовлетворяющие условиям: e' — базис пространства L, $[A](e')$ — диагональная матрица. Обозначим, $\tilde{\tilde{A}} = [A](e')$. Так как $\det(\tilde{A}) \neq 0$, то $\det(\tilde{\tilde{A}}) \neq 0$. Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — диагональная матрица, то: $\tilde{\tilde{A}}_{1,1} \cdots \tilde{\tilde{A}}_{N,N} = \det(\tilde{\tilde{A}}) \neq 0$. Тогда $\forall k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} \neq 0)$.

Предположим, что $\forall k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} > 0)$. Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — диагональная матрица, то $A > 0$ (что противоречит утверждению: $\neg(A > 0)$). Итак, $\exists k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} \leqslant 0)$. Так как $\forall k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} \neq 0)$, то $\exists k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} < 0)$.

Предположим, что $\forall k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} < 0)$. Так как $\tilde{\tilde{A}}$ — диагональная матрица, то $A < 0$ (что противоречит утверждению: $\neg(A < 0)$). Итак, $\exists k = \overline{1, N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} \geqslant 0)$. Так как $\forall k =$

$\overline{1,N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} \neq 0)$, то $\exists k = \overline{1,N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} > 0)$. Так как: $\exists k = \overline{1,N}(\tilde{\tilde{A}}_{k,k} < 0)$, $\tilde{\tilde{A}}$ — диагональная матрица, то A — знакопеременная форма. □

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[4] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[5] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.