Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 6. Линейные, билинейные и квадратичные формы

6.1. Линейные и полулинейные формы

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что A — линейная форма в пространстве L, если: $A\colon L \implies \mathbb{K}$, A — линейный оператор.
2. Будем говорить, что A — полулинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L \implies \mathbb{K}$, A — полулинейный оператор.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — линейная (полулинейная) форма в пространстве L, e — базис пространства L. Пусть: $[A](e) \in \mathbb{K}^{1\times N}$, $[A]_k(e) = A(e_k)$ при $k = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $[A](e)$ — набор компонент линейной (полулинейной) формы A в базисе e.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.*

1. Пусть A — линейная форма в пространстве L. Тогда: $A(x) = [A]_k(e)[x]^k(e)$ при $x \in L$.

2. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{1\times N}$, $A(x) = \tilde{A}_k[x]^k(e)$ при $x \in L$. Тогда: A — линейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{A}$.

3. Пусть A — полулинейная форма в пространстве L. Тогда: $A(x) = [A]_k(e)\overline{[x]^k(e)}$ при $x \in L$.

4. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{1\times N}$, $A(x) = \tilde{A}_k\overline{[x]^k(e)}$ при $x \in L$. Тогда: A — полулинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{A}$.

Доказательство.

1. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x) = A\big([x]^k(e)e_k\big) = [x]^k(e)A(e_k) = [A]_k(e)[x]^k(e).$$

2. Докажем, что A — линейная форма в пространстве L. Очевидно, $A\colon L \implies \mathbb{K}$.
   Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x+y) = \tilde{A}_k[x+y]^k(e) = \tilde{A}_k\big([x]^k(e) + [y]^k(e)\big) = \tilde{A}_k[x]^k(e) + \tilde{A}_k[y]^k(e) = A(x) + A(y).$$

   Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда:

$$A(\lambda x) = \tilde{A}_k[\lambda x]^k(e) = \tilde{A}_k\big(\lambda[x]^k(e)\big) = \lambda\big(\tilde{A}_k[x]^k(e)\big) = \lambda A(x).$$

Докажем, что $[A](e) = \tilde{A}$. Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_k(e) = A(e_k) = \tilde{A}_m [e_k]^m(e) = \tilde{A}_m \delta_k^m = \tilde{A}_k.$$

Следовательно, $[A](e) = \tilde{A}$.

3. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x) = A\big([x]^k(e) e_k\big) = \overline{[x]^k(e)} A(e_k) = [A]_k(e) \overline{[x]^k(e)}.$$

4. Докажем, что A — полулинейная форма в пространстве L. Очевидно, $A\colon L \implies \mathbb{K}$. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x+y) = \tilde{A}_k \overline{[x+y]^k(e)} = \tilde{A}_k \overline{\big([x]^k(e) + [y]^k(e)\big)} = \tilde{A}_k \overline{[x]^k(e)} + \tilde{A}_k \overline{[y]^k(e)} = A(x) + A(y).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L$. Тогда:

$$A(\lambda x) = \tilde{A}_k \overline{[\lambda x]^k(e)} = \tilde{A}_k \overline{\big(\lambda [x]^k(e)\big)} = \overline{\lambda} \big(\tilde{A}_k \overline{[x]^k(e)}\big) = \overline{\lambda} A(x).$$

Докажем, что $[A](e) = \tilde{A}$. Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_k(e) = A(e_k) = \tilde{A}_m \overline{[e_k]^m(e)} = \tilde{A}_m \overline{\delta_k^m} = \tilde{A}_m \delta_k^m = \tilde{A}_k. \quad \square$$

Следовательно, $[A](e) = \tilde{A}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e, e' — *базисы пространства* L.

1. Пусть A — линейная форма в пространстве L. Тогда: $[A]_{k'}(e') = [A]_k(e) \alpha_{k'}^k(e, e')$ *при* $k' = \overline{1, N}$; $[A](e') = [A](e) \alpha(e, e')$.

2. Пусть A — полулинейная форма в пространстве L. Тогда: $[A]_{k'}(e') = [A]_k(e) \overline{\alpha_{k'}^k(e, e')}$ *при* $k' = \overline{1, N}$; $[A](e') = [A](e) \overline{\alpha(e, e')}$.

Доказательство.

1. Пусть $k' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k'}(e') = A(e'_{k'}) = A\big(\alpha_{k'}^k(e, e') e_k\big) = \alpha_{k'}^k(e, e') A(e_k) = [A]_k(e) \alpha_{k'}^k(e, e') = \big([A](e) \alpha(e, e')\big)_{k'}.$$

Следовательно, $[A](e') = [A](e) \alpha(e, e')$.

2. Пусть $k' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k'}(e') = A(e'_{k'}) = A\big(\alpha_{k'}^k(e, e') e_k\big) = \overline{\alpha_{k'}^k(e, e')} A(e_k) = [A]_k(e) \overline{\alpha_{k'}^k(e, e')} = \big([A](e) \overline{\alpha(e, e')}\big)_{k'}. \quad \square$$

Следовательно, $[A](e') = [A](e) \overline{\alpha(e, e')}$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$. Обозначим через L^* множество всех линейных форм в пространстве L. Очевидно, L^* — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Будем говорить, что L^* — сопряжённое пространство к пространству L.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

Очевидно, следующие утверждения эквивалентны друг другу:

- $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta_k^m$ при k, $m = \overline{1, N}$;
- $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $[\omega^m]_k(e) = \delta_k^m$ при k, $m = \overline{1, N}$.

Очевидно, существует единственный набор функций $\omega^1, \ldots, \omega^N$, удовлетворяющий условиям: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $[\omega^m]_k(e) = \delta_k^m$ при k, $m = \overline{1, N}$. Тогда существует единственный набор функций $\omega^1, \ldots, \omega^N$, удовлетворяющий условиям: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta_k^m$ при k, $m = \overline{1, N}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

Обозначим: $\varphi(A) = [A](e)$ при $A \in L^*$. Очевидно, φ — изоморфизм пространства L^* на пространство $\mathbb{K}^{1\times N}$. Тогда: $\dim(L^*) = \dim(\mathbb{K}^{1\times N}) = N$.

Пусть: $\omega^1, \ldots, \omega^N \in L^*$, $\omega^m(e_k) = \delta_k^m$ при k, $m = \overline{1, N}$. Тогда: $[\omega^m]_k(e) = \delta_k^m$ при k, $m = \overline{1, N}$. Следовательно, $[\omega^1](e), \ldots, [\omega^N](e)$ — базис пространства $\mathbb{K}^{1\times N}$. Так как: φ^{-1} — изоморфизм пространства $\mathbb{K}^{1\times N}$ на пространство L^*, $\omega^m = \varphi^{-1}\bigl([\omega^m](e)\bigr)$ при $m = \overline{1, N}$, то $\omega^1, \ldots, \omega^N$ — базис пространства L^*. Будем говорить, что $\omega^1, \ldots, \omega^N$ — сопряжённый базис к базису e пространства L.

Пусть: $x \in L$, $m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\omega^m(x) = [\omega^m]_k(e)[x]^k(e) = \delta_k^m[x]^k(e) = [x]^m(e).$$

Пусть $A \in L^*$. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x) = [A]_k(e)[x^k](e) = [A]_k(e)\omega^k(x) = \bigl([A]_k(e)\omega^k\bigr)(x).$$

Следовательно, $A = [A]_k(e)\omega^k$. Тогда $[A]_1(e), \ldots, [A]_N(e)$ — координаты элемента A в базисе $\omega^1, \ldots, \omega^N$.

6.2. Билинейные и полуторалинейные формы

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что A — билинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L^2 \implies \mathbb{K}$, $A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y)$ при x_1, x_2, $y \in L$; $A(\lambda x, y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$; $A(x, y_1 + y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2)$ при x, y_1, $y_2 \in L$; $A(x, \lambda y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$.

2. Пусть A — билинейная форма в пространстве L. Будем говорить, что A — симметричная (антисимметричная) билинейная форма, если: $A(y, x) = A(x, y)$ $(A(y, x) = -A(x, y))$ при x, $y \in L$.

3. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, A — билинейная форма в пространстве L. Будем писать $A > 0$ ($A \geqslant 0$, $A < 0$, $A \leqslant 0$, $A = 0$), если: $A(x, x) > 0$ ($A(x, x) \geqslant 0$, $A(x, x) < 0$, $A(x, x) \leqslant 0$, $A(x, x) = 0$) при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что A — знакопеременная билинейная форма, если: $\exists x \in L\bigl(A(x, x) > 0\bigr)$, $\exists x \in L\bigl(A(x, x) < 0\bigr)$.

4. Будем говорить, что A — полуторалинейная форма в пространстве L, если: $A\colon L^2 \implies \mathbb{K}$, $A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y)$ при x_1, x_2, $y \in L$; $A(\lambda x, y) = \overline{\lambda} A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$; $A(x, y_1 + y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2)$ при x, y_1, $y_2 \in L$; $A(x, \lambda y) = \lambda A(x, y)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in L$.

5. Пусть A — полуторалинейная форма в пространстве L. Будем говорить, что A — эрмитова (антиэрмитова) полуторалинейная форма, если: $\overline{A(y,x)} = A(x,y)$ $\left(\overline{A(y,x)} = -A(x,y)\right)$ при x, $y \in L$. Пусть A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Тогда: $\overline{A(x,x)} = A(x,x)$ при $x \in L$. Следовательно: $A(x,x) \in \mathbb{R}$ при $x \in L$.

6. Пусть: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $A(x,x) \in \mathbb{R}$ при $x \in L$. Будем писать $A > 0$ ($A \geqslant 0$, $A < 0$, $A \leqslant 0$, $A = 0$), если: $A(x,x) > 0$ ($A(x,x) \geqslant 0$, $A(x,x) < 0$, $A(x,x) \leqslant 0$, $A(x,x) = 0$) при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что A — знакопеременная полуторалинейная форма, если: $\exists x \in L\bigl(A(x,x) > 0\bigr)$, $\exists x \in L\bigl(A(x,x) < 0\bigr)$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Будем говорить, что Q — квадратичная форма в пространстве L, если: Q — функция, $\mathrm{D}(Q) = L$, существует функция A, удовлетворяющая условиям: A — билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Пусть Q — квадратичная форма в пространстве L. Очевидно, $Q\colon L \implies \mathbb{K}$.

2. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, Q — квадратичная форма в пространстве L. Будем писать $Q > 0$ ($Q \geqslant 0$, $Q < 0$, $Q \leqslant 0$, $Q = 0$), если: $Q(x) > 0$ ($Q(x) \geqslant 0$, $Q(x) < 0$, $Q(x) \leqslant 0$, $Q(x) = 0$) при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что Q — знакопеременная квадратичная форма, если: $\exists x \in L\bigl(Q(x) < 0\bigr)$, $\exists x \in L\bigl(Q(x) > 0\bigr)$.

3. Будем говорить, что Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, если: Q — функция, $\mathrm{D}(Q) = L$, существует функция A, удовлетворяющая условиям: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Пусть Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Очевидно, $Q\colon L \implies \mathbb{K}$.

4. Будем говорить, что Q — эрмитова обобщённая квадратичная форма в пространстве L, если: Q — функция, $\mathrm{D}(Q) = L$, существует функция A, удовлетворяющая условиям: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Пусть Q — эрмитова обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Очевидно: Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, $\mathrm{R}(Q) \subseteq \mathbb{R}$.

5. Пусть: Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, $\mathrm{R}(Q) \subseteq \mathbb{R}$. Будем писать $Q > 0$ ($Q \geqslant 0$, $Q < 0$, $Q \leqslant 0$, $Q = 0$), если: $Q(x) > 0$ ($Q(x) \geqslant 0$, $Q(x) < 0$, $Q(x) \leqslant 0$, $Q(x) = 0$) при: $x \in L$, $x \neq \theta$. Будем говорить, что Q — знакопеременная обобщённая квадратичная форма, если: $\exists x \in L\bigl(Q(x) < 0\bigr)$, $\exists x \in L\bigl(Q(x) > 0\bigr)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q *— квадратичная форма в пространстве* L*. Тогда существует функция* A*, удовлетворяющая условиям:* A *— симметричная билинейная форма в пространстве* L*,* $Q(x) = A(x,x)$ *при* $x \in L$*.*

Доказательство. По определению квадратичной формы, существует функция A_0, удовлетворяющая условиям: A_0 — билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A_0(x,x)$ при $x \in L$. Обозначим: $A(x,y) = \frac{1}{2}\bigl(A_0(x,y) + A_0(y,x)\bigr)$ при x, $y \in L$. Очевидно, A — билинейная форма в пространстве L. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(y,x) = \frac{1}{2}\bigl(A_0(y,x) + A_0(x,y)\bigr) = \frac{1}{2}\bigl(A_0(x,y) + A_0(y,x)\bigr) = A(x,y).$$

Следовательно, A — симметричная билинейная форма. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x,x) = \frac{1}{2}\bigl(A_0(x,x) + A_0(x,x)\bigr) = A_0(x,x) = Q(x). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q *— функция,* $\mathrm{D}(Q) = L$*. Пусть:* A *— симметричная билинейная форма в пространстве* L*,* $Q(x) = A(x,x)$ *при* $x \in L$*. Тогда:* $A(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ *при* x*,* $y \in L$*.*

Доказательство. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$Q(x+y) = A(x+y, x+y) = A(x,x) + A(x,y) + A(y,x) + A(y,y) = Q(x) + 2A(x,y) + Q(y);$$
$$A(x,y) = \frac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q *— обобщённая квадратичная форма в пространстве* L, $\mathrm{R}(Q) \subseteq \mathbb{R}$. *Тогда существует функция* A*, удовлетворяющая условиям:* A *— эрмитова полуторалинейная форма в пространстве* L*,* $Q(x) = A(x,x)$ *при* $x \in L$*.*

Доказательство. По определению обобщённой квадратичной формы, существует функция A_0, удовлетворяющая условиям: A_0 — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A_0(x,x)$ при $x \in L$. Обозначим: $A(x,y) = \frac{1}{2}\big(A_0(x,y) + \overline{A_0(y,x)}\big)$ при x, $y \in L$. Очевидно, A — полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$\overline{A(y,x)} = \overline{\frac{1}{2}\big(A_0(y,x) + \overline{A_0(x,y)}\big)} = \frac{1}{2}\big(\overline{A_0(y,x)} + A_0(x,y)\big) = \frac{1}{2}\big(A_0(x,y) + \overline{A_0(y,x)}\big) =$$
$$= A(x,y).$$

Следовательно, A — эрмитова полуторалинейная форма. Пусть $x \in L$. Тогда:

$$A(x,x) = \frac{1}{2}\big(A_0(x,x) + \overline{A_0(x,x)}\big) = \frac{1}{2}\big(Q(x) + \overline{Q(x)}\big) = \frac{1}{2}\big(Q(x) + Q(x)\big) = Q(x). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{C}$*;* Q *— функция,* $\mathrm{D}(Q) = L$*. Пусть:* A *— полуторалинейная форма в пространстве* L*,* $Q(x) = A(x,x)$ *при* $x \in L$*. Тогда:*

$$A(x,y) = \frac{1}{2}\Big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y) - i\big(Q(x+iy) - Q(x) - Q(y)\big)\Big), \quad x,\ y \in L.$$

Доказательство. Пусть: x, $y \in L$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда:

$$Q(x+\lambda y) = A(x+\lambda y, x+\lambda y) = A(x,x) + A(x,\lambda y) + A(\lambda y, x) + A(\lambda y, \lambda y) =$$
$$= A(x,x) + \lambda A(x,y) + \overline{\lambda} A(y,x) + \overline{\lambda}\lambda A(y,y) = Q(x) + \lambda A(x,y) + \overline{\lambda} A(y,x) + |\lambda|^2 Q(y);$$
$$\lambda A(x,y) + \overline{\lambda} A(y,x) = Q(x+\lambda y) - Q(x) - |\lambda|^2 Q(y);$$
$$A(x,y) + A(y,x) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y),$$
$$iA(x,y) - iA(y,x) = Q(x+iy) - Q(x) - Q(y);$$
$$A(x,y) = \frac{1}{2}\Big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y) - i\big(Q(x+iy) - Q(x) - Q(y)\big)\Big). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{C}$*;* A *— полуторалинейная форма в пространстве* L*,* $A(x,x) \in \mathbb{R}$ *при* $x \in L$*. Тогда* A *— эрмитова полуторалинейная форма.*

Доказательство. Обозначим: $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, $\mathrm{R}(Q) \subseteq \mathbb{R}$. Следовательно, существует функция A_0, удовлетворяющая условиям: A_0 — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A_0(x,x)$ при $x \in L$. Так как: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$; Q — функция, $\mathrm{D}(Q) = L$; A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$; A_0 — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A_0(x,x)$ при $x \in L$, то $A = A_0$. Так как A_0 — эрмитова полуторалинейная форма, то A — эрмитова полуторалинейная форма. $\square$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; A — билинейная (полуторалинейная) форма в пространстве L, e — базис пространства L. Обозначим: $[A]_{k,m}(e) = A(e_k, e_m)$ при k, $m = \overline{1, N}$. Очевидно, $[A](e) \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Будем говорить, что $[A](e)$ — матрица билинейной (полуторалинейной) формы A в базисе e.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* e *— базис пространства* L*.*

1. Пусть A *— билинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $A(x, y) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[y]^m(e)$ *при* x*,* $y \in L$*.*

2. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N \times N}$*,* $A(x, y) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ *при* x*,* $y \in L$*. Тогда:* A *— билинейная форма в пространстве* L*,* $[A](e) = \tilde{A}$*.*

3. Пусть A *— полуторалинейная форма в пространстве* L*. Тогда:* $A(x, y) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ *при* x*,* $y \in L$*.*

4. Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N \times N}$*,* $A(x, y) = \tilde{A}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ *при* x*,* $y \in L$*. Тогда:* A *— полуторалинейная форма в пространстве* L*,* $[A](e) = \tilde{A}$*.*

Доказательство.

1. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x, y) = A\big([x]^k(e)e_k, [y]^m(e)e_m\big) = [x]^k(e)[y]^m(e)A(e_k, e_m) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[y]^m(e).$$

2. Очевидно, A — полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть k, $m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k,m}(e) = A(e_k, e_m) = \tilde{A}_{i,j}[e_k]^i(e)[e_m]^j(e) = \tilde{A}_{i,j}\delta^i_k\delta^j_m = \tilde{A}_{k,m}.$$

Следовательно, $[A](e) = \tilde{A}$.

3. Пусть x, $y \in L$. Тогда:

$$A(x, y) = A\big([x]^k(e)e_k, [y]^m(e)e_m\big) = \overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)A(e_k, e_m) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e).$$

4. Очевидно, A — полуторалинейная форма в пространстве L. Пусть k, $m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k,m}(e) = A(e_k, e_m) = \tilde{A}_{i,j}\overline{[e_k]^i(e)}[e_m]^j(e) = \tilde{A}_{i,j}\overline{\delta^i_k}\delta^j_m = \tilde{A}_{i,j}\delta^i_k\delta^j_m = \tilde{A}_{k,m}.$$

Следовательно, $[A](e) = \tilde{A}$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Обозначим: $\Delta_0(\tilde{A}) = 1$, $\Delta_k(\tilde{A}) = \det\big(\{\tilde{A}_{i,j}\}_{i,j=\overline{1,k}}\big)$ при $k = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $\Delta_1(\tilde{A}), \ldots, \Delta_N(\tilde{A})$ — угловые миноры матрицы $\tilde{A}$.

Будем говорить, что $\tilde{A}$ — симметричная (антисимметричная) матрица, если $\tilde{A}^T = \tilde{A}$ ($\tilde{A}^T = -\tilde{A}$).

Будем говорить, что $\tilde{A}$ — эрмитова (антиэрмитова) матрица, если $\overline{\tilde{A}^T} = \tilde{A}$ ($\overline{\tilde{A}^T} = -\tilde{A}$). Пусть $\tilde{A}$ — эрмитова матрица. Очевидно: $\tilde{A}_{k,k} = \overline{\tilde{A}_{k,k}}$, $\Delta_k(\tilde{A}) = \Delta_k\Big(\overline{\tilde{A}^T}\Big) = \overline{\Delta_k(\tilde{A})}$ при $k = \overline{1, N}$. Тогда: $\tilde{A}_{k,k}$, $\Delta_k(\tilde{A}) \in \mathbb{R}$ при $k = \overline{1, N}$.

Будем говорить, что $\tilde{A}$ — ортогональная матрица, если $\tilde{A}\tilde{A}^T = \tilde{I}$. Пусть $\tilde{A}$ — ортогональная матрица. Тогда: $\det(\tilde{A}) \neq 0$, $\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^T$. Пусть: $\det(\tilde{A}) \neq 0$, $\tilde{A}^{-1} = \tilde{A}^T$. Тогда $\tilde{A}$ — ортогональная матрица.

Будем говорить, что $\tilde{A}$ — унитарная матрица, если $\tilde{A}\overline{\tilde{A}^T} = \tilde{I}$. Пусть $\tilde{A}$ — унитарная матрица. Тогда: $\det(\tilde{A}) \neq 0$, $\tilde{A}^{-1} = \overline{\tilde{A}^T}$. Пусть: $\det(\tilde{A}) \neq 0$, $\tilde{A}^{-1} = \overline{\tilde{A}^T}$. Тогда $\tilde{A}$ — унитарная матрица.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

Пусть A — симметричная билинейная форма в пространстве L. Очевидно: $[A](e)$ — симметричная матрица, $A(x, y) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$.

Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — симметричная матрица, $A(x, y) = \tilde{A}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Очевидно: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{A}$.

Пусть A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L. Очевидно: $[A](e)$ — эрмитова матрица, $A(x, y) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$.

Пусть: $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{A}$ — эрмитова матрица, $A(x, y) = \tilde{A}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Очевидно: A — эрмитова полуторалинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{A}$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e, e' — базисы пространства L.*

1. Пусть A — билинейная форма в пространстве L. Тогда: $[A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e')$ при k', $m' = \overline{1, N}$; $[A](e') = \alpha(e, e')^T[A](e)\alpha(e, e')$.

2. Пусть A — полуторалинейная форма в пространстве L. Тогда: $[A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')$ при $k', m' = \overline{1, N}$; $[A](e') = \overline{\alpha(e, e')^T}[A](e)\alpha(e, e')$.

Доказательство.

1. Пусть k', $m' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k',m'}(e') = A(e'_{k'}, e'_{m'}) = A\big(\alpha^k_{k'}(e, e')e_k, \alpha^m_{m'}(e, e')e_m\big) = \alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e')A(e_k, e_m) = \\ = [A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e, e')\alpha^m_{m'}(e, e') = \big(\alpha(e, e')^T[A](e)\alpha(e, e')\big)_{k',m'}.$$

Следовательно, $[A](e') = \alpha(e, e')^T[A](e)\alpha(e, e')$.

2. Пусть k', $m' = \overline{1, N}$. Тогда:

$$[A]_{k',m'}(e') = A(e'_{k'}, e'_{m'}) = A\big(\alpha^k_{k'}(e, e')e_k, \alpha^m_{m'}(e, e')e_m\big) = \overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e')A(e_k, e_m) = \\ = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e, e')}\alpha^m_{m'}(e, e') = \big(\overline{\alpha(e, e')^T}[A](e)\alpha(e, e')\big)_{k',m'}.$$

Следовательно, $[A](e') = \overline{\alpha(e, e')^T}[A](e)\alpha(e, e')$. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; Q — квадратичная форма в пространстве L, e — базис пространства L. Пусть: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x, x)$ при $x \in L$. Обозначим, $[Q](e) = [A](e)$. Будем говорить, что $[Q](e)$ — матрица квадратичной формы Q в базисе e.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.*

1. Пусть Q — квадратичная форма в пространстве L. Тогда: $[Q](e)$ — симметричная матрица, $Q(x) = [Q]_{k,m}(e)[x]^k(e)[x]^m(e)$ при $x \in L$.

2. Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)$ при $x \in L$. Тогда Q — квадратичная форма в пространстве L.

3. Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\tilde{Q}$ — симметричная матрица, $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e)$ при $x \in L$. Тогда: Q — квадратичная форма в пространстве L, $[Q](e) = \tilde{Q}$.

Доказательство.

1. Пусть: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: $[Q](e) = [A](e)$, $[A](e)$ — симметричная матрица, $A(x,y) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Следовательно: $[Q](e)$ — симметричная матрица, $Q(x) = A(x,x) = [A]_{k,m}(e)[x]^k(e)[x]^m(e) = [Q]_{k,m}(e)[x]^k(e)[x]^m(e)$ при $x \in L$.

2. Обозначим: $A(x,y) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Тогда: A — билинейная форма в пространстве L, $A(x,x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e) = Q(x)$ при $x \in L$. Следовательно, Q — квадратичная форма в пространстве L.

3. Обозначим: $A(x,y) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Так как $\tilde{Q}$ — симметричная матрица, то: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{Q}$, $A(x,x) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[x]^m(e) = Q(x)$ при $x \in L$. Так как: A — билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$, то Q — квадратичная форма в пространстве L. Так как: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$, то: $[Q](e) = [A](e) = \tilde{Q}$. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; Q — квадратичная форма в пространстве L, e, e' — базисы пространства L. Тогда: $[Q]_{k',m'}(e') = [Q]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e')$ при k', $m' = \overline{1,N}$; $[Q](e') = \alpha(e,e')^T[Q](e)\alpha(e,e')$.*

Доказательство. Пусть: A — симметричная билинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: $[Q](e) = [A](e)$, $[Q](e') = [A](e')$. Пусть k', $m' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[Q]_{k',m'}(e') = [A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e') = [Q]_{k,m}(e)\alpha^k_{k'}(e,e')\alpha^m_{m'}(e,e') = \\ = \big(\alpha(e,e')^T[Q](e)\alpha(e,e')\big)_{k',m'}.$$

Следовательно, $\alpha(e,e')^T[Q](e)\alpha(e,e')$. □

Определение. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, e — базис пространства L. Пусть: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Обозначим, $[Q](e) = [A](e)$. Будем говорить, что $[Q](e)$ — матрица обобщённой квадратичной формы Q в базисе e.

Утверждение. *Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.*

1. Пусть Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Тогда: $Q(x) = [Q]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$.

2. Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $Q(x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$. Тогда: Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, $[Q](e) = \tilde{Q}$.

Доказательство.

1. Пусть: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: $[Q](e) = [A](e)$, $A(x,y) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[y]^m(e)$ при $x, y \in L$. Следовательно: $Q(x) = A(x,x) = [A]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e) = [Q]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$.

2. Обозначим: $A(x,y) = \tilde{Q}_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in L$. Тогда: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $[A](e) = \tilde{Q}$, $A(x,x) = \tilde{Q}_{k,m}\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e) = Q(x)$ при $x \in L$. Так как: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$, то Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Так как: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$, то: $[Q](e) = [A](e) = \tilde{Q}$. □

Замечание. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

Пусть Q — эрмитова обобщённая квадратичная форма в пространстве L. Очевидно: $[Q](e)$ — эрмитова матрица, $Q(x) = [Q]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$.

Пусть: $\tilde{Q} \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $\tilde{Q}$ — эрмитова матрица, $Q(x) = [Q]_{k,m}(e)\overline{[x]^k(e)}[x]^m(e)$ при $x \in L$. Очевидно: Q — эрмитова обобщённая квадратичная форма в пространстве L, $[Q](e) = \tilde{Q}$.

Утверждение. *Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; Q — обобщённая квадратичная форма в пространстве L, e, e' — базисы пространства L. Тогда: $[Q]_{k',m'}(e') = [Q]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e')$ при k', $m' = \overline{1,N}$; $[Q](e') = \overline{\alpha(e,e')^T}[Q](e)\alpha(e,e')$.*

Доказательство. Пусть: A — полуторалинейная форма в пространстве L, $Q(x) = A(x,x)$ при $x \in L$. Тогда: $[Q](e) = [A](e)$, $[Q](e') = [A](e')$. Пусть k', $m' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[Q]_{k',m'}(e') = [A]_{k',m'}(e') = [A]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e') = [Q]_{k,m}(e)\overline{\alpha^k_{k'}(e,e')}\alpha^m_{m'}(e,e') = \\ = \left(\overline{\alpha(e,e')^T}[Q](e)\alpha(e,e')\right)_{k',m'}.$$

Следовательно, $\overline{\alpha(e,e')^T}[Q](e)\alpha(e,e')$. □

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[4] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[5] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.