Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 5. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой форме

5.1. Циклический базис подпространства $\ker_\infty(A)$ для оператора A

Замечание. Пусть: F — функция, $Q \subseteq \mathrm{D}(F)$. Тогда:

$$F[Q] = \Big\{y\colon \exists x\big(x \in \mathrm{D}(F) \wedge x \in Q \wedge y = F(x)\big)\Big\} = \Big\{y\colon \exists x\big(x \in Q \wedge y = F(x)\big)\Big\}.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, $Q_1 \subset Q_2$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$. Докажем, что $\dim(Q_1) < \dim(Q_2)$.

Так как: Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, $Q_1 \subseteq Q_2$, то $\dim(Q_1) \leqslant \dim(Q_2)$. Предположим, что $\dim(Q_1) = \dim(Q_2)$. Так как: Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, $Q_1 \subseteq Q_2$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$, то $Q_1 = Q_2$ (что противоречит условию $Q_1 \neq Q_2$). Итак, $\dim(Q_1) \neq \dim(Q_2)$. Тогда $\dim(Q_1) < \dim(Q_2)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим: $\ker_k(A) = \ker(A^k)$, $\mathrm{R}_k(A) = \mathrm{R}(A^k)$. Очевидно, $\ker_k(A)$, $\mathrm{R}_k(A)$ — подпространства пространства L. Так как: $\dim\big(\mathrm{D}(A^k)\big) = \dim(L) = N \neq +\infty$, то $\dim\big(\ker_k(A)\big) + \dim\big(\mathrm{R}_k(A)\big) = N$ (**это не значит, что** $\ker_k(A) + \mathrm{R}_k(A) = L$). Так как $[A, A^k] = \Theta$, то $\ker_k(A)$, $\mathrm{R}_k(A)$ — инвариантные подпространства оператора A.

Очевидно:

$$\begin{gathered}\ker_0(A) = \ker(A^0) = \ker(I) = \{\theta\},\\ \mathrm{R}_0(A) = \mathrm{R}(A^0) = \mathrm{R}(I) = L,\\ \ker_1(A) = \ker(A^1) = \ker(A),\\ \mathrm{R}_1(A) = \mathrm{R}(A^1) = \mathrm{R}(A).\end{gathered}$$

Обозначим: $\ker_\infty(A) = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \ker_k(A)$, $\mathrm{R}_\infty(A) = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathrm{R}_k(A)$. Очевидно, $\ker_\infty(A)$, $\mathrm{R}_\infty(A) \subseteq L$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.*

1. Пусть: $k \in \mathbb{Z}_+$, $m = \overline{0, k}$. Тогда $A^m\big[\ker_k(A)\big] = \ker_{k-m}(A) \cap \mathrm{R}_m(A)$. Пусть: $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant k$. Тогда $A^m\big[\ker_k(A)\big] = \{\theta\}$. Пусть k, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $A^m\big[\mathrm{R}_k(A)\big] = \mathrm{R}_{k+m}(A)$.

2. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда: $\ker_k(A) \subseteq \ker_{k+1}(A)$, $\mathrm{R}_{k+1}(A) \subseteq \mathrm{R}_k(A)$.

3. Существует число h, удовлетворяющее условиям: $h \in \mathbb{Z}_+$; $\ker_k(A) \subset \ker_{k+1}(A)$, $\mathrm{R}_{k+1}(A) \subset \mathrm{R}_k(A)$ при $k = \overline{0, h-1}$; $\ker_k(A) = \ker_{k+1}(A)$, $\mathrm{R}_{k+1}(A) = \mathrm{R}_k(A)$ при: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant h$. Будем говорить, что h — высота оператора A.

4. Пусть k, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда:

$$\dim\bigl(\ker_k(A) \cap R_m(A)\bigr) = \dim\bigl(\ker_{k+m}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker_m(A)\bigr).$$

5. Пусть: $k \in \mathbb{N}$, $m = \overline{0, h-1}$. Тогда $\ker_k(A) \cap \mathrm{R}_m(A) \neq \{\theta\}$. Пусть: $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant h$. Тогда $\ker_k(A) \cap \mathrm{R}_m(A) = \{\theta\}$. Пусть: $k = 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\ker_k(A) \cap \mathrm{R}_m(A) = \{\theta\}$.

6. Справедливы утверждения: $\ker_h(A)$, $\mathrm{R}_h(A)$ — линейно независимые подпространства, $\ker_h(A) + \mathrm{R}_h(A) = L$.

7. Справедливы утверждения: $\ker_\infty(A) = \ker_h(A)$, $\mathrm{R}_\infty(A) = \mathrm{R}_h(A)$.

Доказательство.

1. Пусть: $k \in \mathbb{Z}_+$, $m = \overline{0, k}$. Пусть $x \in A^m\bigl[\ker_k(A)\bigr]$. Тогда существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in \ker_k(A)$, $x = A^m u$. Следовательно: $u \in L$, $A^k u = \theta$, $x = A^m u$. Тогда: $x \in L$, $A^{k-m}x = A^{k-m}(A^m u) = A^k u = \theta$; $u \in L$, $x = A^m u$. Следовательно: $x \in \ker_{k-m}(A)$, $x \in \mathrm{R}_m(A)$. Тогда $x \in \ker_{k-m}(A) \cap \mathrm{R}_m(A)$.

Пусть $x \in \ker_{k-m}(A) \cap \mathrm{R}_m(A)$. Тогда: $x \in \ker_{k-m}(A)$, $x \in \mathrm{R}_m(A)$. Следовательно: $x \in L$, $A^{k-m}x = \theta$; существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in L$, $x = A^m u$. Тогда: $u \in L$, $A^k u = A^{k-m}(A^m u) = A^{k-m}x = \theta$, $x = A^m u$. Следовательно: $u \in \ker_k(A)$, $x = A^m u$. Тогда $x \in A^m\bigl[\ker_k(A)\bigr]$. Итак, $A^m\bigl[\ker_k(A)\bigr] = \ker_{k-m}(A) \cap \mathrm{R}_m(A)$.

Пусть: $k \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant k$. Пусть $x \in A^m\bigl[\ker_k(A)\bigr]$. Тогда существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in \ker_k(A)$, $x = A^m u$. Следовательно: $u \in L$, $A^k u = \theta$, $x = A^m u$. Тогда: $x = A^m u = A^{m-k}(A^k u) = A^{m-k}\theta = \theta$. Так как $A^m\bigl[\ker_k(A)\bigr]$ — подпространство пространства L, то $\theta \in A^m\bigl[\ker_k(A)\bigr]$. Итак, $A^m\bigl[\ker_k(A)\bigr] = \{\theta\}$.

Пусть k, $m \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно: $A^m\bigl[\mathrm{R}_k(A)\bigr] = A^m\bigl[A^k[L]\bigr] = A^{k+m}[L] = \mathrm{R}_{k+m}(A)$.

2. Пусть $x \in \ker_k(A)$. Тогда: $x \in L$, $A^k x = \theta$. Следовательно: $x \in L$, $A^{k+1}x = A(A^k x) = A\theta = \theta$. Тогда $x \in \ker_{k+1}(A)$. Итак, $\ker_k(A) \subseteq \ker_{k+1}(A)$.

Очевидно: $\mathrm{R}_{k+1}(A) = A^k\bigl[\mathrm{R}_1(A)\bigr] \subseteq A^k[L] = \mathrm{R}_k(A)$.

3. Обозначим, $\mu = \Bigl\{k\colon k \in \mathbb{Z}_+ \wedge \dim\bigl(\mathrm{R}_{k+1}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{R}_k(A)\bigr)\Bigr\}$. Очевидно: $\mu \subseteq \mathbb{Z}$, $\forall k \in \mu (k \geqslant 0)$. Предположим, что $\mu = \varnothing$. Тогда: $\dim\bigl(\mathrm{R}_{k+1}(A)\bigr) < \dim\bigl(\mathrm{R}_k(A)\bigr)$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно: $\dim\bigl(\mathrm{R}_{k+1}(A)\bigr) \leqslant \dim\bigl(\mathrm{R}_k(A)\bigr) - 1$ при $k \in \mathbb{Z}_+$. Используя индукцию, получаем, что: $\dim\bigl(\mathrm{R}_{k+m}(A)\bigr) \leqslant \dim\bigl(\mathrm{R}_k(A)\bigr) - m$ при k, $m \in \mathbb{Z}_+$. Тогда:

$$\dim\bigl(\mathrm{R}_{N+1}(A)\bigr) \leqslant \dim\bigl(\mathrm{R}_0(A)\bigr) - (N+1) = \dim(L) - (N+1) = N - (N+1) = -1$$

(что противоречит утверждению: $\dim\bigl(\mathrm{R}_{N+1}(A)\bigr) \geqslant 0$). Итак, $\mu \neq \varnothing$. Обозначим, $h = \min(\mu)$. Тогда: $h \in \mathbb{Z}_+$; $\dim\bigl(\mathrm{R}_{k+1}(A)\bigr) < \dim\bigl(\mathrm{R}_k(A)\bigr)$ при $k = \overline{0, h-1}$; $\dim\bigl(\mathrm{R}_{h+1}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{R}_h(A)\bigr)$.

Пусть $k = \overline{0, h-1}$. Так как: $\mathrm{R}_{k+1}(A) \subseteq \mathrm{R}_k(A)$, $\dim\bigl(\mathrm{R}_{k+1}(A)\bigr) < \dim\bigl(\mathrm{R}_k(A)\bigr)$, то $\mathrm{R}_{k+1}(A) \subset \mathrm{R}_k(A)$. Так как $\dim\bigl(\mathrm{R}_{k+1}(A)\bigr) < \dim\bigl(\mathrm{R}_k(A)\bigr)$, то:

$$\dim\bigl(\ker_k(A)\bigr) = N - \dim\bigl(\mathrm{R}_k(A)\bigr) < N - \dim\bigl(\mathrm{R}_{k+1}(A)\bigr) = \dim\bigl(\ker_{k+1}(A)\bigr).$$

Так как $\ker_k(A) \subseteq \ker_{k+1}(A)$, то $\ker_k(A) \subset \ker_{k+1}(A)$.

Так как: $\mathrm{R}_{h+1}(A) \subseteq \mathrm{R}_h(A)$, $\dim\bigl(\mathrm{R}_{h+1}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{R}_h(A)\bigr)$, то $\mathrm{R}_{h+1}(A) = \mathrm{R}_h(A)$. Пусть: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant h+1$. Так как $\mathrm{R}_{h+1}(A) = \mathrm{R}_h(A)$, то: $\mathrm{R}_{k+1}(A) = A^{k-h}\bigl[\mathrm{R}_{h+1}(A)\bigr] = A^{k-h}\bigl[\mathrm{R}_h(A)\bigr] = \mathrm{R}_k(A)$. Пусть: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant h$. Так как $\mathrm{R}_{k+1}(A) = \mathrm{R}_k(A)$, то:

$$\dim\bigl(\ker_k(A)\bigr) = N - \dim\bigl(\mathrm{R}_k(A)\bigr) = N - \dim\bigl(\mathrm{R}_{k+1}(A)\bigr) = \dim\bigl(\ker_{k+1}(A)\bigr).$$

Так как $\ker_k(A) \subseteq \ker_{k+1}(A)$, то $\ker_k(A) = \ker_{k+1}(A)$.

4. Так как $m \leqslant k+m$, то: $\ker_k(A) \cap \mathrm{R}_m(A) = A^m\bigl[\ker_{k+m}(A)\bigr]$, $\ker_m(A) \subseteq \ker_{k+m}(A)$. Тогда:

$$\begin{gathered}\dim\bigl(\ker_k(A) \cap R_m(A)\bigr) = \dim\Bigl(A^m\bigl[\ker_{k+m}(A)\bigr]\Bigr) = \dim\Bigl(\mathrm{R}\Bigl(A^m|_{\ker_{k+m}(A)}\Bigr)\Bigr) = \\ = \dim\Bigl(\mathrm{D}\Bigl(A^m|_{\ker_{k+m}(A)}\Bigr)\Bigr) - \dim\Bigl(\ker\Bigl(A^m|_{\ker_{k+m}(A)}\Bigr)\Bigr) = \\ = \dim\bigl(\mathrm{D}(A^m) \cap \ker_{k+m}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker(A^m) \cap \ker_{k+m}(A)\bigr) = \\ = \dim\bigl(L \cap \ker_{k+m}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker_m(A) \cap \ker_{k+m}(A)\bigr) = \dim\bigl(\ker_{k+m}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker_m(A)\bigr).\end{gathered}$$

5. Пусть: $k \in \mathbb{N}$, $m = \overline{0, h-1}$. Так как $m \leqslant k+m$, то $\ker_k(A) \cap \mathrm{R}_m(A) = A^m\bigl[\ker_{k+m}(A)\bigr]$. Так как: $m \leqslant h-1$, $m < k+m$, то $\ker_m(A) \subset \ker_{k+m}(A)$. Тогда:

$$\ker_k(A) \cap R_m(A) = A^m\bigl[\ker_{k+m}(A)\bigr] = \bigl\{A^m x\colon x \in \ker_{k+m}(A)\bigr\} \neq \{\theta\}.$$

Пусть: $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant h$. Так как $m \leqslant k+m$, то $\ker_k(A) \cap \mathrm{R}_m(A) = A^m\bigl[\ker_{k+m}(A)\bigr]$. Так как m, $k+m \geqslant h$, то $\ker_m(A) = \ker_{k+m}(A)$. Так как $m \geqslant m$, то $A^m\bigl[\ker_m(A)\bigr] = \{\theta\}$. Тогда:

$$\ker_k(A) \cap R_m(A) = A^m\bigl[\ker_{k+m}(A)\bigr] = A^m\bigl[\ker_m(A)\bigr] = \{\theta\}.$$

Пусть: $k = 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Так как $k = 0$, то $\ker_k(A) = \{\theta\}$. Тогда: $\ker_k(A) \cap \mathrm{R}_m(A) = \{\theta\} \cap \mathrm{R}_m(A) = \{\theta\}$.

6. Так как $h \geqslant h$, то $\ker_h(A) \cap \mathrm{R}_h(A) = \{\theta\}$. Тогда $\ker_h(A)$, $\mathrm{R}_h(A)$ — линейно независимые подпространства. Следовательно:

$$\dim\bigl(\ker_h(A) + \mathrm{R}_h(A)\bigr) = \dim\bigl(\ker_h(A)\bigr) + \dim\bigl(\mathrm{R}_h(A)\bigr) = N.$$

Так как: $\ker_h(A) + \mathrm{R}_h(A)$ — подпространство пространства L, $\dim(L) = N \neq +\infty$, то $\ker_h(A) + \mathrm{R}_h(A) = L$.

7. Очевидно:

$$\ker_\infty(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_+} \ker_k(A) = \Biggl(\bigcup_{k=\overline{0,h}} \ker_k(A)\Biggr) \cup \bigcup_{k \in \mathbb{Z},\, k \geqslant h+1} \ker_k(A) = \ker_h(A) \cup \ker_h(A) = \ker_h(A);$$

$$\mathrm{R}_\infty(A) = \bigcap_{k \in \mathbb{Z}_+} \mathrm{R}_k(A) = \Biggl(\bigcap_{k=\overline{0,h}} \mathrm{R}_k(A)\Biggr) \cap \bigcap_{k \in \mathbb{Z},\, k \geqslant h+1} \mathrm{R}_k(A) = \mathrm{R}_h(A) \cap \mathrm{R}_h(A) = \mathrm{R}_h(A). \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть $h = 0$. Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$. Тогда: $\ker_k(A) = \ker_0(A) = \{\theta\}$.

Пусть $h \neq 0$. Тогда: $\ker_1(A) \neq \ker_0(A) = \{\theta\}$. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\ker_1(A) \subseteq \ker_k(A)$. Следовательно, $\ker_k(A) \neq \{\theta\}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

1. Пусть: $q \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_q \in L$, $Ax_1 = \theta$, $Ax_j = x_{j-1}$ при $j = \overline{2, q}$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_q$ — циклическая серия векторов оператора A.

Пусть $x_1, \ldots, x_q$ — циклическая серия векторов оператора A. Используя индукцию, получаем, что: $A^m x_j = x_{j-m}$ при: $j = \overline{1, q}$, $m = \overline{0, j-1}$. Пусть: $j = \overline{1, q}$, $m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant j$. Тогда: $A^m x_j = A^{m-(j-1)}(A^{j-1}x_j) = A^{m-(j-1)}x_1 = A^{m-j}(Ax_1) = A^{m-j}\theta = \theta$.

Пусть $j = \overline{1,q}$. Тогда: $x_j \in L$, $A^j x_j = \theta$; $x_q \in L$, $x_j = A^{q-j}x_q$. Следовательно: $x_j \in \ker_j(A)$, $x_j \in \mathrm{R}_{q-j}(A)$. Тогда $x_j \in \ker_j(A) \cap \mathrm{R}_{q-j}(A)$.

Пусть h — высота оператора A. Пусть $q > h$. Тогда: $x_q \in \ker_q(A) = \ker_{q-1}(A)$. Следовательно: $x_1 = A^{q-1}x_q = \theta$.

2. Пусть $q \in \mathbb{N}$. Пусть $u \in L$. Обозначим: $x_j = A^{q-j}u$ при $j = \overline{1,q}$. Тогда: $x_1, \ldots, x_q \in L$, $Ax_j = A(A^{q-j}u) = A^{q-(j-1)}u = x_{j-1}$ при $j = \overline{2,q}$; $x_q = A^0 u = Iu = u$.

Пусть $u \in \ker_q(A)$. Тогда: $u \in L$, $A^q u = \theta$. Обозначим: $x_j = A^{q-j}u$ при $j = \overline{1,q}$. Тогда: $x_1, \ldots, x_q \in L$, $Ax_1 = A(A^{q-1}u) = A^q u = \theta$, $Ax_j = x_{j-1}$ при $j = \overline{2,q}$; $x_q = u$. Следовательно: $x_1, \ldots, x_q$ — циклическая серия векторов оператора A, $x_q = u$.

Пусть $v \in \ker(A) \cap \mathrm{R}_{q-1}(A)$. Тогда: $v \in \ker(A)$, $v \in \mathrm{R}_{q-1}(A)$. Следовательно: $v \in L$, $Av = \theta$; существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in L$, $v = A^{q-1}u$. Обозначим: $x_j = A^{q-j}u$ при $j = \overline{1,q}$. Тогда: $x_1, \ldots, x_q \in L$, $x_1 = A^{q-1}u = v$, $Ax_1 = Av = \theta$, $Ax_j = x_{j-1}$ при $j = \overline{2,q}$. Следовательно: $x_1, \ldots, x_q$ — циклическая серия векторов оператора A, $x_1 = v$.

3. Пусть: $n \in \mathbb{N}$, $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$. Обозначим, $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i$. Тогда: $\exists i = \overline{1,n}(q_i = \alpha)$, $\forall i = \overline{1,n}(q_i \leqslant \alpha)$.

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$\bigl\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1, \min\{q_i, k+1\}}\bigr\} =$$
$$= \bigl\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1, \min\{q_i, k\}}\bigr\} \cup \bigl\{(i,k+1)\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k+1\bigr\};$$
$$\bigl\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1,q_i}\bigr\} =$$
$$= \bigl\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1, \min\{q_i, k\}}\bigr\} \cup \bigl\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k+1 \wedge j = \overline{k+1, q_i}\bigr\}.$$

4. Пусть Q — подпространство пространства L. Пусть: $n \in \mathbb{N}$, $e_{i,1}, \ldots, e_{i,q_i}$ — циклическая серия векторов оператора A при $i = \overline{1,n}$; $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q. Будем говорить, что $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства Q для оператора A.

Пусть $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства Q для оператора A. Обозначим, $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i$. Тогда: $e_{i,j} \in \ker_j(A) \subseteq \ker_\alpha(A)$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,q_i}$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q, то:

$$Q = L\Bigl(\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}\Bigr) \subseteq \ker_\alpha(A).$$

Докажем, что Q — инвариантное подпространство оператора A. Пусть $\forall i = \overline{1,n}(q_i \leqslant 1)$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q, то:

$$A[Q] = A\biggl[L\Bigl(\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}\Bigr)\biggr] = L\Bigl(\{Ae_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}\Bigr) = \{\theta\} \subseteq Q.$$

Пусть $\exists i = \overline{1,n}(q_i \geqslant 2)$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства Q, то:

$$A[Q] = A\biggl[L\Bigl(\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}\Bigr)\biggr] = L\Bigl(\{Ae_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}\Bigr) = L\Bigl(\{e_{i,j-1}\}_{j=\overline{2,q_i}}^{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant 2}\Bigr) \subseteq Q.$$

Итак, Q — инвариантное подпространство оператора A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*.*

Пусть: $n \in \mathbb{N}$, $x_{i,1}, \ldots, x_{i,q_i}$ *— циклическая серия векторов оператора* A *при* $i = \overline{1,n}$; $\{x_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$ *— линейно независимые векторы. Тогда* $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ *— линейно независимые векторы.*

Доказательство. Обозначим, $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i$. Используя конечную индукцию, докажем следующее утверждение. Пусть $k = \overline{1,\alpha}$. Тогда $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы.

Докажем, что утверждение справедливо при $k = 1$. Так как: $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}} = \{x_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$, $\{x_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $k_0 = \overline{1,\alpha-1}$, утверждение справедливо при $k = k_0$. Докажем, что утверждение справедливо при $k = k_0+1$. Пусть: $C^{i,j} \in \mathbb{K}$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,\min\{q_i,k_0+1\}}$; $\sum\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=\overline{1,\min\{q_i,k_0+1\}}} C^{i,j} x_{i,j} = \theta$. Так как $\alpha \geqslant k_0+1$, то $\exists i = \overline{1,n}(q_i \geqslant k_0+1)$. Тогда:

$$A^{k_0} \sum_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=\overline{1,\min\{q_i,k_0+1\}}} C^{i,j} x_{i,j} = A^{k_0}\theta,$$
$$\sum_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k_0+1} C^{i,k_0+1} x_{i,1} = \theta.$$

Так как $\{x_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{x_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k_0+1}$ — линейно независимые векторы. Тогда: $C^{i,k_0+1} = 0$ при: $i = \overline{1,n}$, $q_i \geqslant k_0+1$. Следовательно, $\sum\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=\overline{1,\min\{q_i,k_0\}}} C^{i,j} x_{i,j} = \theta$. Так как $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k_0\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то: $C^{i,j} = 0$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,\min\{q_i,k_0\}}$. Итак: $C^{i,j} = 0$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,\min\{q_i,k_0+1\}}$.

Так как: $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}} = \{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,\alpha\}}}^{i=\overline{1,n}}$, $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,\alpha\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{x_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L,L)$, h *— высота оператора* A.

Пусть $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ *— циклический базис подпространства* $\ker_\infty(A)$ *для оператора* A.

1. Справедливо утверждение: $\max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i = h$.

2. Пусть $k \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ *— циклический базис подпространства* $\ker_k(A)$ *для оператора* A.

3. Пусть $k = \overline{1,h}$. *Тогда* $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ *— циклический базис подпространства* $\ker(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A)$ *для оператора* A.

4. Справедливы утверждения:

$$n = \dim\bigl(\ker(A)\bigr);$$
$$\mathrm{card}\bigl(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k\}\bigr) = \dim\bigl(\ker_k(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker_{k-1}(A)\bigr), \quad k \in \mathbb{N};$$
$$\mathrm{card}\bigl(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i = k\}\bigr) = 2\dim\bigl(\ker_k(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker_{k+1}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker_{k-1}(A)\bigr), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тогда: число n ***определяется однозначно, числа*** $q_1, \ldots, q_n$ ***определяются однозначно, с точностью до перестановки.***

Доказательство.

1. Обозначим, $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то: $e_{i,1} \neq \theta$ при $i = \overline{1,n}$. Тогда $\forall i = \overline{1,n}(q_i \leqslant h)$. Следовательно, $\alpha \leqslant h$. Предположим, что $\alpha \neq h$. Тогда $\alpha < h$. Следовательно, $\ker_\alpha(A) \subset \ker_h(A)$. С другой стороны, так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $\ker_h(A)$ для оператора A, то $\ker_h(A) \subseteq \ker_\alpha(A)$. Итак, $\alpha = h$.

2. Пусть $k \geqslant h$. Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$, $\ker_k(A) = \ker_h(A)$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $\ker_h(A)$ для оператора A, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $\ker_k(A)$ для оператора A.

Пусть $k \leqslant h-1$. Очевидно: $e_{i,j} \in \ker_j(A) \subseteq \ker_k(A)$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,\min\{q_i,k\}}$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы.

Пусть $x \in \ker_k(A)$. Так как $\ker_k(A) \subseteq \ker_h(A)$, то $x \in \ker_h(A)$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_h(A)$, то существуют числа $\{C^{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$, удовлетворяющие условиям: $C^{i,j} \in \mathbb{K}$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,q_i}$; $x = \sum\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=\overline{1,q_i}} C^{i,j} e_{i,j}$. Так как $h \geqslant k+1$, то $\exists i = \overline{1,n}(q_i \geqslant k+1)$. Тогда:

$$\begin{gathered} A^k x = A^k \sum_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=\overline{1,q_i}} C^{i,j} e_{i,j}, \\ \theta = \sum_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k+1} \sum_{j=\overline{k+1,q_i}} C^{i,j} e_{i,j-k}. \end{gathered}$$

Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{e_{i,j-k}\}_{j=\overline{k+1,q_i}}^{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k+1}$ — линейно независимые векторы. Тогда: $C^{i,j} = 0$ при: $i = \overline{1,n}$, $q_i \geqslant k+1$, $j = \overline{k+1,q_i}$. Следовательно, $x = \sum\limits_{i=\overline{1,n}} \sum\limits_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}} C^{i,j} e_{i,j}$. Итак, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_k(A)$. Так как: $e_{i,1}, \ldots, e_{i,\min\{q_i,k\}}$ — циклическая серия векторов оператора A при $i = \overline{1,n}$, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $\ker_k(A)$ для оператора A.

3. Так как $h \geqslant k$, то $\exists i = \overline{1,n}(q_i \geqslant k)$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_k(A)$, то:

$$\begin{gathered} \ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A) = A^{k-1}\big[\ker_k(A)\big] = A^{k-1}\left[L\Big(\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}\Big)\right] = \\ = L\Big(\{A^{k-1}e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}\Big) = L\Big(\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}\Big). \end{gathered}$$

Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ — линейно независимые векторы. Тогда $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ — базис подпространства $\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A)$. Так как $e_{i,1}$ — циклическая серия векторов оператора A при: $i = \overline{1,n}$, $q_i \geqslant k$, то $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ — циклический базис подпространства $\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A)$ для оператора A.

4. Так как: $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}}$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_1(A)$, то $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_1(A)$. Тогда $n = \dim\big(\ker_1(A)\big)$.

Пусть: $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant h+1$. Так как $k-1 \geqslant h$, то: $\forall i = \overline{1,n}(q_i \leqslant k-1)$, $\ker_k(A) = \ker_{k-1}(A)$. Тогда:

$$\mathrm{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k\}\big) = 0 = \dim\big(\ker_k(A)\big) - \dim\big(\ker_{k-1}(A)\big).$$

Пусть $k = \overline{1,h}$. Так как $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ — базис подпространства $\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A)$, то:

$$\mathrm{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k\}\big) = \dim\big(\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A)\big) = \dim\big(\ker_k(A)\big) - \dim\big(\ker_{k-1}(A)\big).$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Тогда:

$$\mathrm{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i = k\}\big) = \mathrm{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k\}\big) - \mathrm{card}\big(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k+1\}\big) =$$
$$= \Big(\dim\big(\ker_k(A)\big) - \dim\big(\ker_{k-1}(A)\big)\Big) - \Big(\dim\big(\ker_{k+1}(A)\big) - \dim\big(\ker_k(A)\big)\Big) =$$
$$= 2\dim\big(\ker_k(A)\big) - \dim\big(\ker_{k+1}(A)\big) - \dim\big(\ker_{k-1}(A)\big). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*,* h *— высота оператора* A*,* $\ker(A) \neq \{\theta\}$*.*

Пусть: $n \in \mathbb{N}$*,* $e_{i,1}, \dots, e_{i,q_i}$ *— циклическая серия векторов оператора* A *при* $i = \overline{1,n}$*;* $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ *— базис подпространства* $\ker(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A)$ *при* $k = \overline{1,h}$*. Тогда* $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ *— циклический базис подпространства* $\ker_\infty(A)$ *для оператора* A*.*

Доказательство. Обозначим, $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,n}} q_i$. Так как: $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant 1}$, $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant 1}$ — линейно независимые векторы, то $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы. Тогда: $e_{i,1} \neq \theta$ при $i = \overline{1,n}$. Следовательно, $\forall i = \overline{1,n}(q_i \leqslant h)$. Тогда $\alpha \leqslant h$. Предположим, что $\alpha \neq h$. Тогда $\alpha < h$. Следовательно, $\forall i = \overline{1,n}(q_i < h)$. Так как $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant h}$ — базис подпространства $\ker(A) \cap \mathrm{R}_{h-1}(A)$, то $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant h}$ — не пустое семейство векторов. Тогда $\exists i = \overline{1,n}(q_i \geqslant h)$. Итак, $\alpha = h$.

Так как: $e_{i,1}, \dots, e_{i,q_i}$ — циклическая серия векторов оператора A при $i = \overline{1,n}$; $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы. Используя конечную индукцию, докажем следующее утверждение. Пусть $k = \overline{1,h}$. Тогда $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_k(A)$.

Докажем, что утверждение справедливо при $k = 1$. Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant 1}$, $\ker_1(A) = \ker_1(A) \cap L = \ker_1(A) \cap \mathrm{R}_0(A)$, $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant 1}$ — базис подпространства $\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_0(A)$, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_1(A)$.

Пусть: $k_0 = \overline{1,h-1}$, утверждение справедливо при $k = k_0$. Докажем, что утверждение справедливо при $k = k_0 + 1$. Очевидно: $e_{i,j} \in \ker_j(A) \subseteq \ker_{k_0+1}(A)$ при: $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,\min\{q_i, k_0+1\}}$. Так как $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k_0+1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы.

Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k_0\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_{k_0}(A)$, $\{e_{i,1}\}_{i=\overline{1,n},\, q_i \geqslant k_0+1}$ — базис подпространства $\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k_0}(A)$, то:

$$\mathrm{card}\Big(\big\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1,\min\{q_i, k_0+1\}}\big\}\Big) =$$
$$= \mathrm{card}\Big(\big\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1,\min\{q_i, k_0\}}\big\}\Big) + \mathrm{card}\Big(\big\{(i,k_0+1)\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k_0+1\big\}\Big) =$$

$$= \operatorname{card}\Bigl(\bigl\{(i,j)\colon i = \overline{1,n} \wedge j = \overline{1, \min\{q_i, k_0\}}\bigr\}\Bigr) + \operatorname{card}\bigl(\{i\colon i = \overline{1,n} \wedge q_i \geqslant k_0 + 1\}\bigr) =$$
$$= \dim\bigl(\ker_{k_0}(A)\bigr) + \dim\bigl(\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k_0}(A)\bigr) =$$
$$= \dim\bigl(\ker_{k_0}(A)\bigr) + \Bigl(\dim\bigl(\ker_{k_0+1}(A)\bigr) - \dim\bigl(\ker_{k_0}(A)\bigr)\Bigr) = \dim\bigl(\ker_{k_0+1}(A)\bigr).$$

Итак, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,k_0+1\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_{k_0+1}(A)$.

Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}} = \{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,h\}}}^{i=\overline{1,n}}$, $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,\min\{q_i,h\}}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_h(A)$, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис подпространства $\ker_h(A)$. Так как: $e_{i,1}, \ldots, e_{i,q_i}$ — циклическая серия векторов оператора A при $i = \overline{1,n}$, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $\ker_h(A)$ для оператора A. □

Теорема. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L,L)$*,* $\ker(A) \neq \{\theta\}$*. Существуют векторы* $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$*, удовлетворяющие условию:* $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ *— циклический базис подпространства* $\ker_\infty(A)$ *для оператора* A*.*

Доказательство. Обозначим через h высоту оператора A. Пусть $k = \overline{1,h}$. Обозначим, $N_k = \dim\bigl(\ker_k(A)\bigr)$. Очевидно, $N_k = \overline{1,N}$. Тогда существуют векторы $f_{k,1}, \ldots, f_{k,N_k}$, удовлетворяющие условию: $f_{k,1}, \ldots, f_{k,N_k}$ — базис подпространства $\ker_k(A)$. Очевидно:

$$A^{k-1} f_{k,m}, \ldots, A^0 f_{k,m} \text{ — циклическая серия векторов оператора } A \text{ при } m = \overline{1, N_k};$$
$$\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A) = A^{k-1}\bigl[\ker_k(A)\bigr] = A^{k-1}\bigl[L(f_{k,1}, \ldots, f_{k,N_k})\bigr] = L(A^{k-1} f_{k,1}, \ldots, A^{k-1} f_{k,N_k}).$$

Пусть $k = \overline{1, h-1}$. Очевидно:

$$\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{h-1}(A) \subseteq \cdots \subseteq \ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A);$$
$$\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A) = L(A^{h-1} f_{h,1}, \ldots, A^{h-1} f_{h,N_h}; \ldots; A^{k-1} f_{k,1}, \ldots, A^{k-1} f_{k,N_k}).$$

Рассмотрим последовательность подпространств:

$$\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{h-1}(A); \ldots; \ker_1(A) \cap \mathrm{R}_0(A).$$

Рассмотрим последовательность векторов:

$$A^{h-1} f_{h,1}, \ldots, A^{h-1} f_{h,N_h}; \ldots; A^0 f_{1,1}, \ldots, A^0 f_{1,N_1}.$$

Так как $\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{h-1}(A) \neq \{\theta\}$, то, используя метод Гаусса, можно указать число $n = \overline{1, N_h + \cdots + N_1}$, можно указать числа q_1, m_1, $\ldots$, q_n, m_n, удовлетворяющие условиям: $q_1 = h$, $m_1 = \overline{1, N_{q_1}}$, $q_2 = \overline{1, q_1}$, $m_2 = \overline{1, N_{q_2}}$, $\ldots$, $q_n = \overline{1, q_{n-1}}$, $m_n = \overline{1, N_{q_n}}$, $\{A^{q_i - 1} f_{q_i, m_i}\}_{i = \overline{1,n},\, q_i \geqslant k}$ — базис подпространства $\ker_1(A) \cap \mathrm{R}_{k-1}(A)$ при $k = \overline{1,h}$. Так как: $\ker(A) \neq \{\theta\}$, $A^{q_i - 1} f_{q_i, m_i}, \ldots, A^0 f_{q_i, m_i}$ — циклическая серия векторов оператора A при $i = \overline{1,n}$, то $\{A^{q_i - j} f_{q_i, m_i}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $\ker_\infty(A)$ для оператора A. □

5.2. Базис Жордана пространства L для оператора A

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

1. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Обозначим, $Q_A(\lambda) = \ker_\infty(A - \lambda I)$.

2. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что $Q_A(\lambda)$ — корневое подпространство оператора A, соответствующее собственному значению λ.

3. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что x — корневой вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ, если $x \in Q_A(\lambda)$.

4. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что x — присоединённый вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ, если: $x \in Q_A(\lambda)$, $x \notin H_A(\lambda)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, $n_1 \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda_2 \in \mathbb{K}$, $n_2 \in \mathbb{Z}_+$. Очевидно, $\big[(A - \lambda_1 I)^{n_1}, (A - \lambda_2 I)^{n_2}\big] = \Theta$. Тогда $\ker_{n_2}(A - \lambda_2 I)$, $\mathrm{R}_{n_2}(A - \lambda_2 I)$ — инвариантные подпространства оператора $(A - \lambda_1 I)^{n_1}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*,* λ_0 *— собственное значение оператора* A*. Тогда* $\dim\big(Q_A(\lambda_0)\big) = m_A(\lambda_0)$*.*

Доказательство. Так как λ_0 — собственное значение оператора A, то $\ker(A - \lambda_0 I) \neq \{\theta\}$. Тогда существуют векторы $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$, удовлетворяющие условию: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — циклический базис подпространства $\ker_\infty(A - \lambda_0 I)$ для оператора $A - \lambda_0 I$. Обозначим: h — высота оператора $A - \lambda_0 I$, $Q = \ker_\infty(A - \lambda_0 I)$, $R = \mathrm{R}_\infty(A - \lambda_0 I)$, $m = m_A(\lambda_0)$, $\tilde{m} = \dim(Q)$. Очевидно: Q, R — линейно независимые подпространства, $Q + R = L$, $\tilde{m} = \overline{1, N}$, R — инвариантное подпространство оператора A, $\ker(A - \lambda_0 I) \cap R = \{\theta\}$.

Пусть $\tilde{m} = N$. Так как: $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — линейно независимые векторы пространства L, $\dim(L) = N = \tilde{m}$, то $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$ — базис пространства L. Обозначим через $\tilde{A}$ матрицу оператора A в базисе $\{e_{i,j}\}_{j=\overline{1,q_i}}^{i=\overline{1,n}}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}) = (\lambda_0 - \lambda)^{\tilde{m}}.$$

Следовательно, $m = \tilde{m}$.

Пусть $\tilde{m} \neq N$. Тогда $\tilde{m} < N$. Следовательно: $\dim(R) = N - \tilde{m} > 0$. Тогда существуют векторы $f_1, \ldots, f_{N-\tilde{m}}$, удовлетворяющие условию: $f_1, \ldots, f_{N-\tilde{m}}$ — базис подпространства R. Так как: Q, R — линейно независимые подпространства, $Q + R = L$, то $e_{1,1}, \ldots, e_{1,q_1}, \ldots, e_{n,1}, \ldots, e_{n,q_n}, f_1, \ldots, f_{N-\tilde{m}}$ — базис пространства L. Обозначим через $\tilde{A}$ матрицу оператора A в базисе $e_{1,1}, \ldots, e_{1,q_1}, \ldots, e_{n,1}, \ldots, e_{n,q_n}, f_1, \ldots, f_{N-\tilde{m}}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}) = (\lambda_0 - \lambda)^{\tilde{m}} \det\Big(\big\{\tilde{A}_{\tilde{m}+i}^{\tilde{m}+j} - \lambda \delta_{\tilde{m}+i}^{\tilde{m}+j}\big\}_{i=\overline{1,N-\tilde{m}}}^{j=\overline{1,N-\tilde{m}}}\Big).$$

Так как R — инвариантное подпространство оператора A, то: $A|_R \in \mathrm{Lin}(R, R)$, $\big[A|_R\big]_i^j(f) = \tilde{A}_{\tilde{m}+i}^{\tilde{m}+j}$ при i, $j = \overline{1, N - \tilde{m}}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^{\tilde{m}} \det\Big(\big[A|_R\big](f) - \lambda\big[I|_R\big](f)\Big) = (\lambda_0 - \lambda)^{\tilde{m}} F_{A|_R}(\lambda).$$

Предположим, что $F_{A|_R}(\lambda_0) = 0$. Тогда существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in \ker\big(A|_R - \lambda_0\, I|_R\big)$, $x \neq \theta$. Следовательно: $x \in \ker\big((A - \lambda_0 I)|_R\big)$, $x \neq \theta$. Тогда: $x \in \ker(A - \lambda_0 I) \cap R$, $x \neq \theta$. Так как $\ker(A - \lambda_0 I) \cap R = \{\theta\}$, то: $x = \theta$, $x \neq \theta$. Итак, $F_{A|_R}(\lambda_0) \neq 0$. Тогда $m = \tilde{m}$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$, $r \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ *— различные собственные значения оператора* A, $Q_1, \ldots, Q_r$ *— соответствующие корневые подпространства. Тогда* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства.*

Доказательство. Докажем утверждение, используя индукцию. Очевидно, утверждение справедливо при $r = 1$.

Пусть: $r_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $r = r_0$. Рассмотрим утверждение при $r = r_0 + 1$. Пусть $k = \overline{1, r_0 + 1}$. Обозначим через h_k высоту оператора $A - \lambda_k I$.

Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_{r_0+1} \in Q_{r_0+1}$, $\sum\limits_{k=\overline{1,r_0+1}} x_k = \theta$. Предположим, что $x_1 \neq \theta$. Так как: $(A - \lambda_1 I)^0 x_1 = I x_1 = x_1 \neq \theta$, $(A - \lambda_1 I)^{h_1} x_1 = \theta$, то существует число $n_1 = \overline{0, h_1 - 1}$, удовлетворяющее условиям: $(A - \lambda_1 I)^{n_1} x_1 \neq \theta$, $(A - \lambda_1 I)^{n_1+1} x_1 = \theta$. Очевидно: $Q_1, \ldots, Q_{r_0+1}$ — инвариантные подпространства оператора $(A - \lambda_1 I)^{n_1}$; $(A - \lambda_1 I)^{n_1} x_1 \neq \theta$, $(A - \lambda_1 I)\big((A - \lambda_1 I)^{n_1} x_1\big) = \theta$; $Q_1, \ldots, Q_{r_0+1}$ — инвариантные подпространства оператора $(A - \lambda_{r_0+1} I)^{h_{r_0+1}}$; $(A - \lambda_{r_0+1} I)^{h_{r_0+1}} x_{r_0+1} = \theta$. Тогда:

$$(A - \lambda_1 I)^{n_1} \sum_{k=\overline{1,r_0+1}} x_k = (A - \lambda_1 I)^{n_1} \theta,$$

$$(A - \lambda_1 I)^{n_1} x_1 + \sum_{k=\overline{2,r_0+1}} (A - \lambda_1 I)^{n_1} x_k = \theta,$$

$$(A - \lambda_{r_0+1} I)^{h_{r_0+1}} \Big((A - \lambda_1 I)^{n_1} x_1 + \sum_{k=\overline{2,r_0+1}} (A - \lambda_1 I)^{n_1} x_k\Big) = (A - \lambda_{r_0+1} I)^{h_{r_0+1}} \theta,$$

$$(\lambda_1 - \lambda_{r_0+1})^{h_{r_0+1}} (A - \lambda_1 I)^{n_1} (x_1) + \sum_{k=\overline{2,r_0}} (A - \lambda_{r_0+1} I)^{h_{r_0+1}} \big((A - \lambda_1 I)^{n_1} x_k\big) = \theta.$$

Так как $Q_1, \ldots, Q_{r_0}$ — линейно независимые подпространства, то $(\lambda_1 - \lambda_{r_0+1})^{h_{r_0+1}} (A - \lambda_1 I)^{n_1} (x_1) = \theta$. Так как $\lambda_1 \neq \lambda_{r_0+1}$, то $(A - \lambda_1 I)^{n_1} x_1 = \theta$ (что противоречит тому, что $(A - \lambda_1 I)^{n_1} x_1 \neq \theta$). Итак, $x_1 = \theta$. Тогда $\sum\limits_{k=\overline{2,r_0+1}} x_k = \theta$. Так как $Q_2, \ldots, Q_{r_0+1}$ — линейно независимые подпространства, то $x_2, \ldots, x_{r_0+1} = \theta$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $\mathbb{C}$ **— алгебраически замкнутое поле**, $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$, $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$.

Так как: $\mathbb{C}$ **— алгебраически замкнутое поле**, $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$, то: $\operatorname{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} m_A(\lambda) = N$. Очевидно, существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, удовлетворяющие условию: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — все различные собственные значения оператора A. Пусть: $m_1, \ldots, m_r$ — соответствующие алгебраические кратности, $Q_1, \ldots, Q_r$ — соответствующие корневые подпространства. Тогда: $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} m_k = N$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, $\dim(Q_k) = m_k$ при $k = \overline{1, r}$.

Фиксируем номер $k = \overline{1, r}$. Так как λ_k — собственное значение оператора A, то $\ker(A - \lambda_k I) \neq \{\theta\}$. Тогда существуют векторы $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{i=\overline{1,n_k}}$, удовлетворяющие условию:

$\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{i=\overline{1,n_k}}$ — циклический базис подпространства Q_k для оператора $A - \lambda_k I$. Так как: $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, $\sum\limits_{k=\overline{1,r}} \dim(Q_k) = \sum\limits_{k=\overline{1,r}} m_k = N$, то $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{k=\overline{1,r},\, i=\overline{1,n_k}}$ — базис пространства L. Будем говорить, что $\{e_{k,i,j}\}_{j=\overline{1,q_{k,i}}}^{k=\overline{1,r},\, i=\overline{1,n_k}}$ — базис Жордана пространства L для оператора A.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[4] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[5] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.