Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 4. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора

4.1. Инвариантные подпространства линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L, L)$. Будем говорить, что Q — инвариантное подпространство оператора A, если: Q — подпространство пространства L, $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, $A[Q] \subseteq Q$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$. Пусть Q — инвариантное подпространство оператора A. Тогда: Q — подпространство пространства L, $A[Q] \subseteq Q$.

Пусть: Q — подпространство пространства L, $A[Q] \subseteq Q$. Очевидно: $Q \subseteq L = \mathrm{D}(A)$. Тогда Q — инвариантное подпространство оператора A.

2. Пусть $A \in \operatorname{lin}(L, L)$. Пусть Q — инвариантное подпространство оператора A. Тогда: $A|_Q \in \operatorname{lin}(L, L)$, $\mathrm{D}(A|_Q) = \mathrm{D}(A) \cap Q = Q$, $\mathrm{R}(A|_Q) = A[Q] \subseteq Q$. Следовательно, $A|_Q \in \operatorname{Lin}(Q, Q)$.

Пусть: Q — подпространство пространства L, $A|_Q \in \operatorname{Lin}(Q, Q)$. Тогда: Q — подпространство пространства L, $Q = \mathrm{D}(A|_Q) = \mathrm{D}(A) \cap Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, $A[Q] = \mathrm{R}(A|_Q) \subseteq Q$. Следовательно, Q — инвариантное подпространство оператора A.

3. Пусть: $A \in \operatorname{lin}(L, L)$, $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — инвариантные подпространства оператора A. Тогда $Q_1 + \cdots + Q_r$ — инвариантное подпространство оператора A.

Очевидно, $Q_1 + \cdots + Q_r$ — подпространство пространства L. Пусть $x \in Q_1 + \cdots + Q_r$. Тогда существуют векторы $x_1, \ldots, x_r$, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x = x_1 + \cdots + x_r$. Следовательно: $x = x_1 + \cdots + x_r \in \mathrm{D}(A)$, $Ax = A(x_1 + \cdots + x_r) = Ax_1 + \cdots + Ax_r \in Q_1 + \cdots + Q_r$.

4. Пусть A, $B \in \operatorname{Lin}(L, L)$. Будем говорить, что операторы A, B коммутируют, если $AB = BA$. Обозначим, $[A, B] = AB - BA$. Будем говорить, что $[A, B]$ — коммутатор операторов A, B. Очевидно, операторы A, B коммутируют тогда и только тогда, когда $[A, B] = \Theta$.

Пусть операторы A, B коммутируют. Тогда $\ker(B)$, $\mathrm{R}(B)$ — инвариантные подпространства оператора A.

Очевидно, $\ker(B)$ — подпространство пространства L. Пусть $x \in \ker(B)$. Тогда: $x \in L$, $Bx = \theta$. Следовательно: $Ax \in L$, $B(Ax) = A(Bx) = A\theta = \theta$. Тогда $Ax \in \ker(B)$.

Очевидно, $\mathrm{R}(B)$ — подпространство пространства L. Пусть $x \in \mathrm{R}(B)$. Тогда существует вектор u, удовлетворяющий условиям: $u \in L$, $x = Bu$. Следовательно: $Au \in L$, $Ax = A(Bu) = B(Au)$. Тогда $Ax \in \mathrm{R}(B)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$, e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$, $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $Q = L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_r})$.

1. Множество Q является инвариантным подпространством оператора A тогда и только тогда, когда: $\tilde{A}^j_{i_k} = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$.

Пусть $x \in Q$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $x = \alpha^1 e_{i_1} + \cdots + \alpha^r e_{i_r}$. Следовательно: $[x]^j(e) = 0$ при: $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$.

Пусть Q — инвариантное подпространство оператора A. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда $e_{i_k} \in Q$. Следовательно, $Ae_{i_k} \in Q$. Тогда: $\tilde{A}^j_{i_k} = [Ae_{i_k}]^j(e) = 0$ при: $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$.

Пусть: $\tilde{A}^j_{i_k} = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, N}$, $j \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$. Очевидно, Q — подпространство пространства L. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$Ax = \tilde{A}^j_i [x]^i(e) e_j = \sum_{\substack{k=\overline{1,r},\\ j=\overline{1,N}}} \tilde{A}^j_{i_k} [x]^{i_k}(e) e_j = \sum_{k,m=\overline{1,r}} \tilde{A}^{i_m}_{i_k} [x]^{i_k}(e) e_{i_m} \in Q.$$

2. Пусть Q — инвариантное подпространство оператора A. Тогда: $\big[A|_Q\big]^m_k (e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = \tilde{A}^{i_m}_{i_k}$ при k, $m = \overline{1, r}$.

Пусть $k = \overline{1, r}$. Очевидно, $A|_Q\, e_{i_k} = \sum\limits_{m=1}^{r} \big[A|_Q\big]^m_k (e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) e_{i_m}$. С другой стороны:

$$A|_Q\, e_{i_k} = Ae_{i_k} = \tilde{A}^j_{i_k} e_j = \sum_{m=1}^{r} \tilde{A}^{i_m}_{i_k} e_{i_m}.$$

Тогда: $\big[A|_Q\big]^m_k (e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}) = \tilde{A}^{i_m}_{i_k}$ при $m = \overline{1, r}$.

4.2. Собственные подпространства линейного оператора

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \operatorname{lin}(L, L)$.

1. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$\mathrm{D}(A - \lambda I) = \mathrm{D}(A) \cap \mathrm{D}(I) = \mathrm{D}(A) \cap L = \mathrm{D}(A).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}(A - \lambda I)$. Тогда:

$$(A - \lambda I)x = Ax - \lambda I(x) = Ax - \lambda x.$$

Очевидно:

$$\ker(A - \lambda I) = \big\{x \colon x \in \mathrm{D}(A - \lambda I) \wedge (A - \lambda I)x = \theta\big\} = \big\{x \colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax - \lambda x = \theta\big\} = \\ = \big\{x \colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax = \lambda x\big\}.$$

Обозначим: $H_A(\lambda) = \ker(A - \lambda I)$, $g_A(\lambda) = \dim\big(\ker(A - \lambda I)\big)$.

2. Пусть λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$\ker(A - \lambda_2 I) \subseteq \mathrm{D}(A - \lambda_2 I) = \mathrm{D}(A) = \mathrm{D}(A - \lambda_1 I).$$

Пусть $x \in \ker(A - \lambda_2 I)$. Тогда:

$$(A - \lambda_1 I)x = Ax - \lambda_1 x = \lambda_2 x - \lambda_1 x = (\lambda_2 - \lambda_1)x.$$

Справедливо утверждение: $\ker(A-\lambda_2 I)$ — инвариантное подпространство оператора $A-\lambda_1 I$.

Очевидно: $\ker(A-\lambda_2 I)$ — подпространство пространства L, $\ker(A-\lambda_2 I)\subseteq \mathrm{D}(A-\lambda_1 I)$. Пусть $x\in\ker(A-\lambda_2 I)$. Тогда: $(A-\lambda_1 I)x=(\lambda_2-\lambda_1)x\in\ker(A-\lambda_2 I)$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A\in\mathrm{lin}(L,L)$.

1. Будем говорить, что λ — регулярная точка оператора A, если: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)=\{\theta\}$, $\mathrm{R}(A-\lambda I)=L$.
2. Будем говорить, что λ — точка спектра оператора A, если: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)\neq\{\theta\}\vee\mathrm{R}(A-\lambda I)\neq L$.
3. Будем говорить, что λ — точка непрерывного спектра оператора A, если: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)=\{\theta\}$, $\mathrm{R}(A-\lambda I)\neq L$. Обозначим через $\mathrm{SC}(A)$ множество всех точек непрерывного спектра оператора A.
4. Будем говорить, что λ — собственное значение оператора A (λ — точка дискретного спектра оператора A), если: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)\neq\{\theta\}$. Обозначим через $\mathrm{SD}(A)$ множество всех собственных значений оператора A. Очевидно, λ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда:

$$\lambda\in\mathbb{K},\ \exists x\big(x\in\ker(A-\lambda I)\wedge x\neq\theta\big);$$
$$\lambda\in\mathbb{K},\ \exists x\big(x\in\mathrm{D}(A)\wedge Ax-\lambda x=\theta\wedge x\neq\theta\big);$$
$$\lambda\in\mathbb{K},\ \exists x\big(x\in\mathrm{D}(A)\wedge Ax=\lambda x\wedge x\neq\theta\big).$$

5. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что x — собственный вектор оператора A, соответствующий собственному значению λ, если: $x\in\ker(A-\lambda I)$, $x\neq\theta$. Очевидно, x является собственным вектором оператора A, соответствующим собственному значению λ, тогда и только тогда, когда:

$$x\in\mathrm{D}(A),\ Ax-\lambda x=\theta,\ x\neq\theta;$$
$$x\in\mathrm{D}(A),\ Ax=\lambda x,\ x\neq\theta.$$

6. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что $\ker(A-\lambda I)$ — собственное подпространство оператора A, соответствующее собственному значению λ.
7. Пусть λ — собственное значение оператора A. Будем говорить, что $\dim\big(\ker(A-\lambda I)\big)$ — геометрическая кратность собственного значения λ. Очевидно, $\dim\big(\ker(A-\lambda I)\big)\in\overline{\mathbb{N}}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L)\neq+\infty$; $A\in\mathrm{Lin}(L,L)$. Тогда $\mathrm{SC}(A)=\varnothing$.

Предположим, что $\mathrm{SC}(A)\neq\varnothing$. Тогда существует число λ, удовлетворяющее условию $\lambda\in\mathrm{SC}(A)$. Следовательно: $\lambda\in\mathbb{K}$, $\ker(A-\lambda I)=\{\theta\}$, $\mathrm{R}(A-\lambda I)\neq L$. Согласно 1-й теореме Фредгольма, так как: $\dim(L)\neq+\infty$, $A-\lambda I\in\mathrm{Lin}(L,L)$, $\ker(A-\lambda I)=\{\theta\}$, то $\mathrm{R}(A-\lambda I)=L$. Итак, $\mathrm{SC}(A)=\varnothing$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N\in\mathbb{N}$, $\dim(L)=N$; $A\in\mathrm{Lin}(L,L)$, e — базис пространства L, $\tilde{A}=[A](e)$, $i=\overline{1,N}$, $\lambda\in\mathbb{K}$. Справедливо утверждение: $e_i\in\ker(A-\lambda I)$ тогда и только тогда, когда: $\tilde{A}_i^j=\lambda\delta_i^j$ при $j=\overline{1,N}$.

Пусть $e_i\in\ker(A-\lambda I)$. Тогда $Ae_i=\lambda e_i$. Следовательно: $\tilde{A}_i^j=[Ae_i]^j(e)=[\lambda e_i]^j(e)=\lambda[e_i]^j(e)=\lambda\delta_i^j$ при $j=\overline{1,N}$.

Пусть: $\tilde{A}_i^j=\lambda\delta_i^j$ при $j=\overline{1,N}$. Тогда: $Ae_i=\tilde{A}_i^je_j=(\lambda\delta_i^j)e_j=\lambda e_i$. Следовательно, $e_i\in\ker(A-\lambda I)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L, L)$, $r \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — различные собственные значения оператора A, $H_1, \ldots, H_r$ — соответствующие собственные подпространства. Тогда $H_1, \ldots, H_r$ — линейно независимые подпространства.*

Доказательство. Докажем утверждение, используя индукцию. Очевидно, утверждение справедливо при $r = 1$.

Пусть: $r_0 \in \mathbb{N}$, утверждение справедливо при $r = r_0$. Рассмотрим утверждение при $r = r_0 + 1$. Пусть: $x_1 \in H_1, \ldots, x_{r_0+1} \in H_{r_0+1}$, $\sum\limits_{k=1}^{r_0+1} x_k = \theta$. Тогда:

$$(A - \lambda_{r_0+1} I) \sum_{k=1}^{r_0+1} x_k = (A - \lambda_{r_0+1} I)\theta,$$

$$\sum_{k=1}^{r_0} (\lambda_k - \lambda_{r_0+1}) x_k = \theta.$$

Так как $H_1, \ldots, H_{r_0}$ — линейно независимые подпространства, то: $(\lambda_k - \lambda_{r_0+1}) x_k = \theta$ при $k = \overline{1, r_0}$. Так как: $\lambda_k \neq \lambda_{r_0+1}$ при $k = \overline{1, r_0}$, то: $x_k = \theta$ при $k = \overline{1, r_0}$. Так как $\sum\limits_{k=1}^{r_0+1} x_k = \theta$, то $x_{r_0+1} = \theta$. □

4.3. Общие сведения о полиномах

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $N \neq 0 \implies a_N \neq 0$, $F(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ при $x \in \mathbb{K}$. Очевидно, $F \colon \mathbb{K} \implies \mathbb{K}$. Будем говорить, что: F — полином на множестве $\mathbb{K}$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$N \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $b_0, \ldots, b_N \in \mathbb{K}$, $Q \subseteq \mathbb{K}$, Q — бесконечное множество, $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{N} b_k x^k$ при $x \in Q$. Тогда: $a_k = b_k$ при $k = \overline{0, N}$.*

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$N_1 \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_{N_1} \in \mathbb{K}$, $N_1 \neq 0 \implies a_{N_1} \neq 0$, $N_2 \in \mathbb{Z}_+$, $b_0, \ldots, b_{N_2} \in \mathbb{K}$, $N_2 \neq 0 \implies b_{N_2} \neq 0$, $Q \subseteq \mathbb{K}$, Q — бесконечное множество, $\sum\limits_{k=1}^{N_1} a_k x^k = \sum\limits_{k=0}^{N_2} b_k x^k$ при $x \in Q$. Тогда: $N_1 = N_2$, $a_k = b_k$ при $k = \overline{0, N_1}$.*

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; F — полином на множестве $\mathbb{K}$, N — степень полинома F. Обозначим, $\deg(F) = N$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$; $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $N \neq 0 \implies a_N \neq 0$, $F(A) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k$ при $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$. Очевидно, $F \colon \mathrm{Lin}(L, L) \implies \mathrm{Lin}(L, L)$. Будем говорить, что: F — полином на множестве $\mathrm{Lin}(L, L)$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}$. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k (xI)^k = \Bigl(\sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k\Bigr) I$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$; λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{K}$, $\lambda_1 I = \lambda_2 I$. Тогда $\lambda_1 = \lambda_2$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$*;* $N \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{K}$, $b_0, \ldots, b_N \in \mathbb{K}$, $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k = \sum\limits_{k=0}^{N} b_k A^k$ *при* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$. *Тогда:* $a_k = b_k$ *при* $k = \overline{0, N}$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$*;* $N_1 \in \mathbb{Z}_+$, $a_0, \ldots, a_{N_1} \in \mathbb{K}$, $N_1 \neq 0 \implies a_{N_1} \neq 0$, $N_2 \in \mathbb{Z}_+$, $b_0, \ldots, b_{N_2} \in \mathbb{K}$, $N_2 \neq 0 \implies b_{N_2} \neq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{N_1} a_k A^k = \sum\limits_{k=0}^{N_2} b_k A^k$ *при* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$. *Тогда:* $N_1 = N_2$, $a_k = b_k$ *при* $k = \overline{0, N_1}$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$; F — полином на множестве $\mathrm{Lin}(L, L)$, N — степень полинома F. Обозначим, $\deg(F) = N$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* F *— полином на множестве* $\mathbb{K}$, $\deg(F) \neq 0$.

1. *Пусть:* $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r$ *— различные корни полинома* F, $m_1, \ldots, m_r$ *— соответствующие кратности. Тогда* $m_1 + \cdots + m_r \leqslant \deg(F)$.
2. *Справедливы утверждения:* $\ker(F)$ *— конечное множество,* $\mathrm{card}\big(\ker(F)\big) \leqslant \deg(F)$.

Определение. Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$. Будем говорить, что $\mathbb{K}$ — алгебраически замкнутое поле, если для любой функции F, удовлетворяющей условиям: F — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\deg(F) \neq 0$, справедливо утверждение: $\ker(F) \neq \varnothing$.

Замечание. Очевидно, $\mathbb{Q}$ не является алгебраически замкнутым полем. Очевидно, $\mathbb{R}$ не является алгебраически замкнутым полем.

Теорема (основная теорема алгебры; будет доказана в 3-ем семестре)**.** *Справедливо утверждение:* $\mathbb{C}$ *— алгебраически замкнутое поле.*

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{C}$ *—* ***алгебраически замкнутое поле****,* F *— полином на множестве* $\mathbb{C}$, $\deg(F) \neq 0$, $r \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_r$ *— все различные корни полинома* F, $m_1, \ldots, m_r$ *— соответствующие кратности. Тогда* $m_1 + \cdots + m_r = \deg(F)$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$; F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F. Будем говорить, что $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$, если: $\tilde{F}(x) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k$ при $x \in \mathbb{K}_2$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2$.

Пусть: F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F. Пусть $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда: $\tilde{F}$ — полином на множестве $\mathbb{K}_2$, N — степень полинома $\tilde{F}$, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома $\tilde{F}$, $\tilde{F}(x) = F(x)$ при $x \in \mathbb{K}_1$. Пусть: $\tilde{F}$ — полином на множестве $\mathbb{K}_2$, N — степень полинома $\tilde{F}$, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома $\tilde{F}$. Тогда $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$. Пусть: $\tilde{F}$ — полином на множестве $\mathbb{K}_2$, $\tilde{F}(x) = F(x)$ при $x \in \mathbb{K}_1$. Тогда $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$.

Пусть: F_1 — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}_1$ — продолжение полинома F_1 на множество $\mathbb{K}_2$, F_2 — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}_2$ — продолжение полинома F_2 на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда $\tilde{F}_1 + \tilde{F}_2$ — продолжение полинома $F_1 + F_2$ на множество $\mathbb{K}_2$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}_1$, F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда $\lambda\tilde{F}$ — продолжение полинома λF на множество $\mathbb{K}_2$.

Пусть: F_1 — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}_1$ — продолжение полинома F_1 на множество $\mathbb{K}_2$, F_2 — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}_2$ — продолжение полинома F_2 на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда $\tilde{F}_1\tilde{F}_2$ — продолжение полинома F_1F_2 на множество $\mathbb{K}_2$.

Пусть: F — полином на множестве $\mathbb{K}_1$, $\tilde{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathbb{K}_2$. Тогда:

$$\ker(F) = \{x\colon x \in \mathbb{K}_1 \wedge F(x) = 0\} = \{x\colon x \in \mathbb{K}_1 \wedge x \in \mathbb{K}_2 \wedge \tilde{F}(x) = 0\} = \\ = \{x\colon x \in \mathbb{K}_1 \wedge x \in \ker(\tilde{F})\} = \ker(\tilde{F}) \cap \mathbb{K}_1.$$

Очевидно: $\ker(F) = \ker(\tilde{F}) \cap \mathbb{K}_1 \subseteq \ker(\tilde{F})$. Пусть: $x_0 \in \ker(F)$, m — кратность числа x_0 как корня полинома F. Тогда: $x_0 \in \ker(\tilde{F})$, m — кратность числа x_0 как корня полинома $\tilde{F}$. Пусть $\ker(\tilde{F}) \subseteq \mathbb{K}_1$. Тогда: $\ker(F) = \ker(\tilde{F}) \cap \mathbb{K}_1 = \ker(\tilde{F})$. Пусть $\ker(F) = \ker(\tilde{F})$. Тогда: $\ker(\tilde{F}) = \ker(F) \subseteq \mathbb{K}_1$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$; F — полином на множестве $\mathbb{K}$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F. Будем говорить, что $\hat{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$, если: $\hat{F}(A) = \sum\limits_{k=0}^{N} a_k A^k$ при $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim(L) \neq 0$.

Пусть: F — полином на множестве $\mathbb{K}$, N — степень полинома F, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома F. Пусть $\hat{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда: $\hat{F}$ — полином на множестве $\mathrm{Lin}(L, L)$, N — степень полинома $\hat{F}$, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома $\hat{F}$, $\hat{F}(xI) = F(x)I$ при $x \in \mathbb{K}$. Пусть: $\hat{F}$ — полином на множестве $\mathrm{Lin}(L, L)$, N — степень полинома $\hat{F}$, $a_0, \ldots, a_N$ — коэффициенты полинома $\hat{F}$. Тогда $\hat{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Пусть: $\hat{F}$ — полином на множестве $\mathrm{Lin}(L, L)$, $\hat{F}(xI) = F(x)I$ при $x \in \mathbb{K}$. Тогда $\hat{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: F_1 — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\hat{F}_1$ — продолжение полинома F_1 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$, F_2 — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\hat{F}_2$ — продолжение полинома F_2 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда $\hat{F}_1 + \hat{F}_2$ — продолжение полинома $F_1 + F_2$ на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, F — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\hat{F}$ — продолжение полинома F на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда $\lambda\hat{F}$ — продолжение полинома λF на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: F_1 — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\hat{F}_1$ — продолжение полинома F_1 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$, F_2 — полином на множестве $\mathbb{K}$, $\hat{F}_2$ — продолжение полинома F_2 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда $\hat{F}_1\hat{F}_2$ — продолжение полинома F_1F_2 на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

4.4. Характеристический полином линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N \times N}$.

Пусть: $m = \overline{1, N}$, $j = 0$. Обозначим, $X_{m,j}(\tilde{A}) = \tilde{A}_m$. Пусть: $m = \overline{1, N}$, $j = 1$. Обозначим, $X_{m,j}(\tilde{A}) = \tilde{I}_m$ (здесь $\tilde{I}$ — единичная матрица из множества $\mathbb{K}^{N \times N}$).

Обозначим через μ_N множество всех функций σ, удовлетворяющих условию: $\sigma\colon \{1, \ldots, N\} \implies \{0, 1\}$.

Пусть $k = \overline{0, N}$. Обозначим через $\mu_{N,k}$ множество всех функций σ, удовлетворяющих условиям: $\sigma \in \mu_N$, $\sigma(1) + \cdots + \sigma(N) = k$. Обозначим:

$$\alpha_k(\tilde{A}) = (-1)^k \sum_{\sigma \in \mu_{N,k}} \det\bigl(X_{1,\sigma(1)}(\tilde{A}), \ldots, X_{N,\sigma(N)}(\tilde{A})\bigr).$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. *Тогда* $\det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}) = \sum\limits_{k=0}^{N} \alpha_k(\tilde{A})\lambda^k$.

Доказательство. Очевидно:

$$\det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}) = \det\big((\tilde{A} - \lambda\tilde{I})_1, \ldots, (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})_N\big) = \det\big(\tilde{A}_1 + (-\lambda)\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{A}_N + (-\lambda)\tilde{I}_N\big) =$$
$$= \sum_{\sigma\in\mu_N} \det\big(X_{1,\sigma(1)}(\tilde{A}), \ldots, X_{N,\sigma(N)}(\tilde{A})\big)(-\lambda)^{\sigma(1)+\cdots+\sigma(N)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{N} \sum_{\sigma\in\mu_{N,k}} \det\big(X_{1,\sigma(1)}(\tilde{A}), \ldots, X_{N,\sigma(N)}(\tilde{A})\big)(-\lambda)^k =$$
$$= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k\Bigg(\sum_{\sigma\in\mu_{N,k}} \det\big(X_{1,\sigma(1)}(\tilde{A}), \ldots, X_{N,\sigma(N)}(\tilde{A})\big)\Bigg)\lambda^k = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k(\tilde{A})\lambda^k. \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{N\times N}$. Очевидно:

$$\alpha_0(\tilde{A}) = (-1)^0 \det(\tilde{A}_1, \ldots, \tilde{A}_N) = \det(\tilde{A});$$
$$\alpha_{N-1}(\tilde{A}) = (-1)^{N-1} \sum_{m=1}^{N} \det(\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_{m-1}, \tilde{A}_m, \tilde{I}_{m+1}, \ldots, \tilde{I}_N) = (-1)^{N-1} \sum_{m=1}^{N} \tilde{A}^m_m =$$
$$= (-1)^{N-1} \operatorname{tr}(\tilde{A});$$
$$\alpha_N(\tilde{A}) = (-1)^N \det(\tilde{I}_1, \ldots, \tilde{I}_N) = (-1)^N \det(\tilde{I}) = (-1)^N.$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$.

Обозначим: $F_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ при $\lambda \in \mathbb{K}$. Пусть: e — базис пространства L, $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\big([A - \lambda I](e)\big) = \det\big([A](e) - \lambda\tilde{I}\big) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k\big([A](e)\big).$$

Так как: $\alpha_N\big([A](e)\big) = (-1)^N \neq 0$, то: F_A — полином на множестве $\mathbb{K}$, N — степень полинома F_A, $\alpha_0\big([A](e)\big), \ldots, \alpha_N\big([A](e)\big)$ — коэффициенты полинома F_A. Будем говорить, что F_A — характеристический полином оператора A.

Пусть e, e' — базисы пространства L. Так как: $\alpha_0\big([A](e)\big), \ldots, \alpha_N\big([A](e)\big)$ — коэффициенты полинома F_A, $\alpha_0\big([A](e')\big), \ldots, \alpha_N\big([A](e')\big)$ — коэффициенты полинома F_A, то: $\alpha_k\big([A](e)\big) = \alpha_k\big([A](e')\big)$ при $k = \overline{0, N}$.

Пусть e — базис пространства L. Обозначим: $\alpha_k(A) = \alpha_k\big([A](e)\big)$ при $k = \overline{0, N}$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$, e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$.

Очевидно:

$$\alpha_0(A) = \alpha_0(\tilde{A}) = \det(\tilde{A}) = \det(A);$$
$$\alpha_{N-1}(A) = \alpha_{N-1}(\tilde{A}) = (-1)^{N-1} \operatorname{tr}(\tilde{A}) = (-1)^{N-1} \operatorname{tr}(A);$$
$$\alpha_N(A) = \alpha_N(\tilde{A}) = (-1)^N.$$

Обозначим через $\tilde{F}_A$ продолжение полинома F_A на множество $\mathbb{C}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогда:

$$\tilde{F}_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k(\tilde{A})\lambda^k = \det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}).$$

Обозначим через $\hat{F}_A$ продолжение полинома F_A на $\mathrm{Lin}(L, L)$. Пусть $B \in \mathrm{Lin}(L, L)$. Тогда:

$$\hat{F}_A(B) = \sum_{k=0}^{N} \alpha_k(\tilde{A})B^k.$$

Очевидно:

$$\mathrm{SD}(A) = \big\{\lambda\colon \lambda \in \mathbb{K} \wedge \ker(A - \lambda I) \neq \{\theta\}\big\} = \Big\{\lambda\colon \lambda \in \mathbb{K} \wedge \det\big([A - \lambda I](e)\big) = 0\Big\} =$$
$$= \big\{\lambda\colon \lambda \in \mathbb{K} \wedge F_A(\lambda) = 0\big\} = \ker(F_A).$$

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — различные корни полинома F_A, $m_1, \ldots, m_r$ — соответствующие кратности. Так как: $\deg(F_A) = N \neq 0$, то $m_1 + \cdots + m_r \leqslant N$.

Так как: $\deg(F_A) = N \neq 0$, то: $\ker(F_A)$ — конечное множество, $\mathrm{card}\big(\ker(F_A)\big) \leqslant N$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — различные корни полинома $\tilde{F}_A$, $m_1, \ldots, m_r$ — соответствующие кратности. Так как: $\deg(\tilde{F}_A) = N \neq 0$, то $m_1 + \cdots + m_r \leqslant N$.

Так как: $\deg(\tilde{F}_A) = N \neq 0$, то: $\ker(\tilde{F}_A)$ — конечное множество, $\mathrm{card}\big(\ker(\tilde{F}_A)\big) \leqslant N$.

Пусть $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**. Так как: $\tilde{F}_A$ — полином на множестве $\mathbb{C}$, $\deg(\tilde{F}_A) = N \neq 0$, то $\ker(\tilde{F}_A) \neq \varnothing$.

Пусть: $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, $r \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — все различные корни полинома $\tilde{F}_A$, $m_1, \ldots, m_r$ — соответствующие кратности. Так как: $\tilde{F}_A$ — полином на множестве $\mathbb{C}$, $\deg(\tilde{F}_A) = N \neq 0$, то $m_1 + \cdots + m_r = N$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \ker(\tilde{F}_A)$. Обозначим, $m_A(\lambda) = 0$. Пусть $\lambda \in \ker(\tilde{F}_A)$. Обозначим через $m_A(\lambda)$ кратность числа λ как корня полинома $\tilde{F}_A$.

Пусть $\lambda \in \mathrm{SD}(A)$. Будем говорить, что $m_A(\lambda)$ — алгебраическая кратность собственного значения λ.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$, λ_0 — собственное значение оператора A. Тогда $g_A(\lambda_0) \leqslant m_A(\lambda_0)$.*

Доказательство. Обозначим: $H = H_A(\lambda_0)$, $g = g_A(\lambda_0)$, $m = m_A(\lambda_0)$. Очевидно, $g = \overline{1, N}$. Так как: $g \in \mathbb{N}$, $\dim(H) = g$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_g$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \ldots, e_g \in H$, $e_1, \ldots, e_g$ — линейно независимые векторы.

Пусть $g = N$. Так как: $e_1, \ldots, e_g$ — линейно независимые векторы пространства L, $\dim(L) = N = g$, то $e_1, \ldots, e_g$ — базис пространства L. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Так как $e_1, \ldots, e_g \in H$, то: $\tilde{A}_i^j = \lambda_0\delta_i^j$ при i, $j = \overline{1, g}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda\tilde{I}) = (\lambda_0 - \lambda)^g.$$

Следовательно, $m = g$.

Пусть $g \neq N$. Так как: $e_1, \ldots, e_g$ — линейно независимые векторы пространства L, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$, $g < N$, то существуют векторы $e_{g+1}, \ldots, e_N$, удовлетворяющие условию:

$e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства L. Обозначим, $\tilde{A} = [A](e)$. Так как $e_1, \ldots, e_g \in H$, то: $\tilde{A}_i^j = \lambda_0 \delta_i^j$ при: $i = \overline{1, g}$, $j = \overline{1, N}$. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда:

$$F_A(\lambda) = \det(\tilde{A} - \lambda \tilde{I}) = (\lambda_0 - \lambda)^g \det\Big(\{\tilde{A}_{g+i}^{g+j} - \lambda \delta_{g+i}^{g+j}\}_{i=\overline{1,N-g}}^{j=\overline{1,N-g}}\Big).$$

Следовательно, $m \geqslant g$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства пространства* L*,* $N_k \in \mathbb{N}$*,* $\dim(Q_k) = N_k$ *при* $k = \overline{1, r}$*. Справедливы утверждения:*

1. $Q_1 + \cdots + Q_r = L \iff N_1 + \cdots + N_r = N$*;*

2. $Q_1 + \cdots + Q_r = L$ *тогда и только тогда, когда существуют векторы* $e_1, \ldots, e_N$*, удовлетворяющие условиям:* $e_1, \ldots, e_N$ *— базис пространства* L*,* $e_1, \ldots, e_N \in Q_1 \cup \cdots \cup Q_r$*.*

Доказательство.

1. Пусть $Q_1 + \cdots + Q_r = L$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то:

$$N_1 + \cdots + N_r = \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r) = \dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(L) = N.$$

Пусть $N_1 + \cdots + N_r = N$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то:

$$\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r) = N_1 + \cdots + N_r = N.$$

Так как: $Q_1 + \cdots + Q_r$ — подпространство пространства L, $N \neq +\infty$, $\dim(L) = N$, то $Q_1 + \cdots + Q_r = L$.

2. Пусть $Q_1 + \cdots + Q_r = L$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Так как: $N_k \in \mathbb{N}$, $\dim(Q_k) = N_k$, то существуют векторы $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$, удовлетворяющие условию: $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$ — базис подпространства Q_k. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — базис подпространства $Q_1 + \cdots + Q_r$. Так как $Q_1 + \cdots + Q_r = L$, то $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — базис пространства L. Пусть: $k = \overline{1, r}$, $m = \overline{1, N_k}$. Так как $e_{k,m} \in Q_k$, то $e_{k,m} \in Q_1 \cup \cdots \cup Q_r$.

Пусть: $e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства L, $e_1, \ldots, e_N \in Q_1 \cup \cdots \cup Q_r$. Тогда: $e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства L, $e_1, \ldots, e_N \in Q_1 + \cdots + Q_r$. Следовательно: $L = L(e_1, \ldots, e_N) \subseteq Q_1 + \cdots + Q_r$. Так как $Q_1 + \cdots + Q_r \subseteq L$, то $Q_1 + \cdots + Q_r = L$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$*. Пусть:* $\mathbb{C}$ *—* ***алгебраически замкнутое поле****,* $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$*. Тогда:* $\operatorname{SD}(A) \neq \varnothing$*,* $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} m_A(\lambda) = N$*.*

Доказательство. Так как $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, то: $\ker(\tilde{F}_A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \ker(\tilde{F}_A)} m_A(\lambda) = N$. Так как $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$, то $\ker(F_A) = \ker(\tilde{F}_A)$. Тогда: $\operatorname{SD}(A) = \ker(F_A) = \ker(\tilde{F}_A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{SD}(A)} m_A(\lambda) = \sum\limits_{\lambda \in \ker(F_A)} m_A(\lambda) = \sum\limits_{\lambda \in \ker(\tilde{F}_A)} m_A(\lambda) = N$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L, L)$*.*

1. Пусть: $\mathbb{C}$ *—* ***алгебраически замкнутое поле****,* $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$*,* $\forall \lambda \in \mathrm{SD}(A)\big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$*. Тогда:* $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$*,* $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$*.*

2. Пусть: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$*,* $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$*. Тогда:* $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$*,* $\forall \lambda \in \mathrm{SD}(A)\big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$*.*

Доказательство.

1. Так как: $\mathbb{C}$ — **алгебраически замкнутое поле**, $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$, то: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} m_A(\lambda) = N$. Так как $\forall \lambda \in \mathrm{SD}(A)\big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$, то: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} g_A(\lambda) = N$. Тогда: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$.

2. Так как: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} H_A(\lambda) = L$, то: $\mathrm{SD}(A) \neq \varnothing$, $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} g_A(\lambda) = N$.

Предположим, что существует число λ_0, удовлетворяющее условиям: $\lambda_0 \in \ker(\tilde{F}_A)$, $\lambda_0 \notin \mathbb{K}$. Тогда: $\lambda_0 \in \ker(\tilde{F}_A)$, $\lambda_0 \notin \mathrm{SD}(A)$. Следовательно:

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} g_A(\lambda) \leqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} m_A(\lambda) < \sum_{\lambda \in \ker(\tilde{F}_A)} m_A(\lambda) \leqslant N$$

(что противоречит утверждению $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} g_A(\lambda) = N$). Итак, $\ker(\tilde{F}_A) \subseteq \mathbb{K}$.

Предположим, что существует число λ_0, удовлетворяющее условиям: $\lambda_0 \in \mathrm{SD}(A)$, $g_A(\lambda_0) \neq m_A(\lambda_0)$. Тогда:

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} g_A(\lambda) < \sum_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} m_A(\lambda) \leqslant N$$

(что противоречит утверждению $\sum\limits_{\lambda \in \mathrm{SD}(A)} g_A(\lambda) = N$). Итак, $\forall \lambda \in \mathrm{SD}(A)\big(g_A(\lambda) = m_A(\lambda)\big)$.

$\square$

Теорема (теорема Гамильтона—Кэли)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$*. Тогда* $\hat{F}_A(A) = \Theta$*.*

Доказательство. Пусть: e — базис пространства L, $\tilde{A} = [A](e)$.

Пусть k, $i = \overline{1, N}$. Обозначим: $M_i^k(\lambda) = (-1)^{k+i}\overline{\Delta}_i^k(\tilde{A} - \lambda\tilde{I})$ при $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда M_i^k — полином на множестве $\mathbb{K}$. Обозначим через $\hat{M}_i^k$ продолжение полинома M_i^k на множество $\mathrm{Lin}(L, L)$.

Пусть: k, $j = \overline{1, N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Обозначим:

$$Q = \begin{pmatrix} (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^1 \\ \vdots \\ (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^{k-1} \\ (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^j \\ (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^{k+1} \\ \vdots \\ (\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^N \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$\delta^j_k F_A(\lambda) = \det(Q) = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{k+i} \overline{\Delta}^k_i(Q) Q^k_i = \sum_{i=1}^{N} (-1)^{k+i} \overline{\Delta}^k_i(\tilde{A} - \lambda\tilde{I})(\tilde{A} - \lambda\tilde{I})^j_i =$$
$$= \sum_{i=1}^{N} M^k_i(\lambda)(\tilde{A}^j_i - \lambda\delta^j_i) = \sum_{i=1}^{N} M^k_i(\lambda)(\tilde{A}^j_i\lambda^0 - \delta^j_i\lambda^1).$$

Пусть: $k,\ j = \overline{1, N}$, $B \in \operatorname{Lin}(L, L)$. Тогда:

$$\delta^j_k \hat{F}_A(B) = \sum_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i(B)(\tilde{A}^j_i B^0 - \delta^j_i B^1) = \sum_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i(B)(\tilde{A}^j_i I - \delta^j_i B).$$

Пусть $i = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(\tilde{A}^j_i I - \delta^j_i A)e_j = \tilde{A}^j_i I(e_j) - \delta^j_i A(e_j) = \tilde{A}^j_i e_j - Ae_i = \theta.$$

Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\hat{F}_A(A)e_k = \big(\delta^j_k \hat{F}_A(A)\big)e_j = \left(\sum_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i(A)(\tilde{A}^j_i I - \delta^j_i A)\right)e_j = \sum_{i=1}^{N} \hat{M}^k_i(A)\big((\tilde{A}^j_i I - \delta^j_i A)e_j\big) = \theta.$$

Пусть $x \in L$. Тогда:

$$\hat{F}_A(A)x = \hat{F}_A(A)\big([x]^k(e)e_k\big) = [x]^k(e)\hat{F}_A(A)(e_k) = \theta.$$

Итак, $\hat{F}_A(A) = \Theta$. □

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[4] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[5] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.