Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 3. Общие сведения о линейных операторах. Матрица линейного оператора

3.1. Общие сведения о линейных операторах

Определение (повторение). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.

1. Пусть $A\colon L_1 \to L_2$. Будем говорить, что A — линейный оператор, если: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1, $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$.

2. Обозначим через $\mathrm{lin}(L_1, L_2)$ множество всех функций A, удовлетворяющих условиям: $A\colon L_1 \to L_2$, A — линейный оператор.

3. Обозначим через $\mathrm{Lin}(L_1, L_2)$ множество всех функций A, удовлетворяющих условиям: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный оператор.

4. Будем говорить, что A — изоморфизм пространства L_1 на пространство L_2, если: A — обратимая функция, $\mathrm{D}(A) = L_1$, $\mathrm{R}(A) = L_2$, $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$.

5. Будем писать $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$, если A — изоморфизм пространства L_1 на пространство L_2. Утверждение $L_1 \overset{A}{\approx} L_2$ можно читать: «пространство L_1 изоморфно пространству L_2 относительно функции A».

6. Будем писать $L_1 \approx L_2$ если $\exists A(L_1 \overset{A}{\approx} L_2)$. Утверждение $L_1 \approx L_2$ читается: «пространство L_1 изоморфно пространству L_2».

Замечание (повторение). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A\colon L_1 \implies L_2$.

Пусть A — линейный оператор. Тогда: $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то: $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$.

Пусть: $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то: $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \lambda A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1. Итак, A — линейный оператор.

Замечание. Пусть $\lambda \in \mathbb{C}$. Обозначим, $\overline{\lambda} = \mathrm{Re}(\lambda) - i\,\mathrm{Im}(\lambda)$. Очевидно, $\overline{\lambda} \in \mathbb{C}$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A\colon L_1 \to L_2$. Будем говорить, что A — полулинейный оператор, если: $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1; $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A\colon L_1 \implies L_2$.

Пусть A — полулинейный оператор. Тогда: $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то: $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$.

Пусть: $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in L_1$; $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то: $A(x+y) = A(x) + A(y)$ при x, $y \in \mathrm{D}(A)$; $A(\lambda x) = \overline{\lambda} A(x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A)$. Так как $\mathrm{D}(A) = L_1$, то $\mathrm{D}(A)$ — подпространство пространства L_1. Итак, A — полулинейный оператор.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда* $\mathrm{Lin}(L_1, L_2)$ *— подпространство пространства* $\mathrm{Fun}(L_1, L_2)$*.*

Доказательство.

1. Очевидно, $\mathrm{Lin}(L_1, L_2) \subseteq \mathrm{Fun}(L_1, L_2)$.
2. Пусть Θ — нулевой элемент пространства $\mathrm{Fun}(L_1, L_2)$. Докажем, что $\Theta \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $\Theta\colon L_1 \implies L_2$.

Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:

$$\Theta(x+y) = \theta_2 = \theta_2 + \theta_2 = \Theta(x) + \Theta(y).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$\Theta(\lambda x) = \theta_2 = \lambda\theta_2 = \lambda\Theta(x).$$

3. Пусть A, $B \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Докажем, что $A+B \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $A+B\colon L_1 \implies L_2$.

Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:

$$\begin{aligned}(A+B)(x+y) = A(x+y) + B(x+y) = \big(A(x) + A(y)\big) + \big(B(x) + B(y)\big) = \\ = \big(A(x) + B(x)\big) + \big(A(y) + B(y)\big) = (A+B)(x) + (A+B)(y).\end{aligned}$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$(A+B)(\lambda x) = A(\lambda x) + B(\lambda x) = \lambda A(x) + \lambda B(x) = \lambda\big(A(x) + B(x)\big) = \lambda(A+B)(x).$$

4. Пусть: $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Докажем, что $\alpha A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $\alpha A\colon L_1 \implies L_2$.

Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:

$$(\alpha A)(x+y) = \alpha A(x+y) = \alpha\big(A(x) + A(y)\big) = \alpha A(x) + \alpha A(y) = (\alpha A)(x) + (\alpha A)(y).$$

Пусть: $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$(\alpha A)(\beta x) = \alpha A(\beta x) = \alpha\big(\beta A(x)\big) = \beta\big(\alpha A(x)\big) = \beta(\alpha A)(x). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1*,* L_2*,* L_3 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. *Пусть:* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B_1, B_2 \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A$*.*
2. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $(\lambda B)A = \lambda(BA)$*.*
3. *Пусть:* $A_1, A_2 \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$*. Тогда* $B(A_1 + A_2) = BA_1 + BA_2$*.*

4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{Lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $B(\lambda A) = \lambda(BA)$.

Доказательство.
1. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$\big((B_1 + B_2)A\big)x = (B_1 + B_2)(Ax) = B_1(Ax) + B_2(Ax) = (B_1A)x + (B_2A)x = (B_1A + B_2A)x.$$

2. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$\big((\lambda B)A\big)x = (\lambda B)(Ax) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \big(\lambda(BA)\big)x.$$

3. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$\begin{aligned}\big(B(A_1 + A_2)\big)x = B\big((A_1 + A_2)x\big) = B\big(A_1x + A_2x\big) = B(A_1x) + B(A_2x) = \\ = (BA_1)x + (BA_2)x = (BA_1 + BA_2)x.\end{aligned}$$

4. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$\big(B(\lambda A)\big)x = B\big((\lambda A)x\big) = B\big(\lambda A(x)\big) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \big(\lambda(BA)\big)x. \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\dim\big(\mathrm{D}(A)\big) \neq +\infty$. *Тогда* $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) - \dim\big(\ker(A)\big)$.

Доказательство. Так как: $\ker(A) \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\dim\big(\mathrm{D}(A)\big) \neq +\infty$, то $\dim\big(\ker(A)\big) \neq +\infty$.

Так как: $\ker(A) \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\dim\big(\mathrm{D}(A)\big) \neq +\infty$, то существует линейное дополнение Q подпространства $\ker(A)$ до подпространства $\mathrm{D}(A)$. Тогда: $Q \subseteq \mathrm{D}(A)$, $\ker(A) \cap Q = \{\theta_1\}$, $\dim\big(\mathrm{D}(A)\big) = \dim\big(\ker(A)\big) + \dim(Q)$.

Рассмотрим оператор $A|_Q$. Очевидно: $A|_Q \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\mathrm{D}(A|_Q) = \mathrm{D}(A) \cap Q = Q$, $\mathrm{R}(A|_Q) = A[Q] \subseteq \mathrm{R}(A)$, $\ker(A|_Q) = \ker(A) \cap Q = \{\theta_1\}$. Так как: $A|_Q \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $\ker(A|_Q) = \ker(A) \cap Q = \{\theta_1\}$, то: $A|_Q \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $A|_Q$ — обратимый оператор.

Докажем, что $\mathrm{R}(A|_Q) = \mathrm{R}(A)$. Пусть $y \in \mathrm{R}(A)$. Тогда существует вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in \mathrm{D}(A)$, $y = Ax$. Так как: $x \in \mathrm{D}(A)$, $\mathrm{D}(A) = \ker(A) + Q$, то существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in \ker(A)$, $x_2 \in Q$, $x = x_1 + x_2$. Тогда: $y = Ax = A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = \theta_2 + A|_Q\, x_2 = A|_Q\, x_2 \in \mathrm{R}(A|_Q)$. Итак, $\mathrm{R}(A) \subseteq \mathrm{R}(A|_Q)$. Так как $\mathrm{R}(A|_Q) \subseteq \mathrm{R}(A)$, то $\mathrm{R}(A|_Q) = \mathrm{R}(A)$.

Так как: $A|_Q \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $A|_Q$ — обратимый оператор, то $\dim\big(\mathrm{R}(A|_Q)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A|_Q)\big)$. Тогда: $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{R}(A|_Q)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A|_Q)\big) = \dim(Q) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) - \dim\big(\ker(A)\big)$. $\square$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$; $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_1)$, $\dim\big(\mathrm{D}(A)\big) \neq +\infty$. Тогда:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) - \dim\big(\ker(A)\big).$$

Теорема (1-я теорема Фредгольма)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$, $\dim(L_1) = \dim(L_2)$, $\dim(L_2) \neq +\infty$; $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. *Тогда* $\mathrm{R}(A) = L_2 \iff \ker(A) = \{\theta_1\}$.

Доказательство.
1. Пусть $\mathrm{R}(A) = L_2$. Так как $\dim\big(\mathrm{D}(A)\big) \neq +\infty$, то $\dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) - \dim\big(\ker(A)\big)$. Тогда: $\dim\big(\ker(A)\big) = \dim\big(\mathrm{D}(A)\big) - \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim(L_1) - \dim(L_2) = 0$. Так как $\ker(A)$ — подпространство пространства L_1, то $\ker(A) = \{\theta_1\}$.

2. Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Тогда A — обратимый оператор. Следовательно, $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr)$. Тогда: $\dim\bigl(\mathrm{R}(A)\bigr) = \dim\bigl(\mathrm{D}(A)\bigr) = \dim(L_1) = \dim(L_2)$. Так как: $\mathrm{R}(A)$ — подпространство пространства L_2, $\dim(L_2) \neq +\infty$, то $\mathrm{R}(A) = L_2$. □

Определение (ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ МАТЕРИАЛ). Пусть: Q — множество, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть $F_1,\ F_2\colon Q \to L$. Обозначим: $(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x)$ при $x \in \mathrm{D}(F_1) \cap \mathrm{D}(F_2)$. Очевидно: $F_1 + F_2\colon Q \to L$, $\mathrm{D}(F_1 + F_2) = \mathrm{D}(F_1) \cap \mathrm{D}(F_2)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $F\colon Q \to L$. Обозначим: $(\lambda F)(x) = \lambda F(x)$ при $x \in \mathrm{D}(F)$. Очевидно: $\lambda F\colon Q \to L$, $\mathrm{D}(\lambda F) = \mathrm{D}(F)$.

Утверждение (ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ МАТЕРИАЛ). *Пусть: Q — множество, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.*

1. *Пусть $F_1,\ F_2\colon Q \to L$. Тогда $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$.*
2. *Пусть $F_1,\ F_2,\ F_3\colon Q \to L$. Тогда $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$.*
3. *Пусть $F\colon Q \to L$. Тогда $F + \Theta = F$.*
4. *Пусть $F\colon Q \to L$. Тогда $F + (-1)F = \Theta|_{\mathrm{D}(F)}$.*
5. *Пусть: $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$, $F\colon Q \to L$. Тогда $(\alpha\beta)F = \alpha(\beta F)$.*
6. *Пусть $F\colon Q \to L$. Тогда $1F = F$.*
7. *Пусть: $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$, $F\colon Q \to L$. Тогда $(\alpha + \beta)F = \alpha F + \beta F$.*
8. *Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $F_1,\ F_2\colon Q \to L$. Тогда $\lambda(F_1 + F_2) = \lambda F_1 + \lambda F_2$.*
9. *Пусть $F\colon Q \to L$. Тогда $0F = \Theta|_{\mathrm{D}(F)}$.*
10. *Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда $\lambda\Theta = \Theta$.*

Доказательство.

1. Очевидно: $\mathrm{D}(F_1 + F_2) = \mathrm{D}(F_1) \cap \mathrm{D}(F_2) = \mathrm{D}(F_2) \cap \mathrm{D}(F_1) = \mathrm{D}(F_2 + F_1)$. Пусть $x \in \mathrm{D}(F_1 + F_2)$. Тогда: $(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x) = F_2(x) + F_1(x) = (F_2 + F_1)(x)$.

2. Очевидно: $\mathrm{D}\bigl((F_1 + F_2) + F_3\bigr) = \bigl(\mathrm{D}(F_1) \cap \mathrm{D}(F_2)\bigr) \cap \mathrm{D}(F_3) = \mathrm{D}(F_1) \cap \bigl(\mathrm{D}(F_2) \cap \mathrm{D}(F_3)\bigr) = \mathrm{D}\bigl(F_1 + (F_2 + F_3)\bigr)$. Пусть $x \in \mathrm{D}\bigl((F_1 + F_2) + F_3\bigr)$. Тогда: $\bigl((F_1 + F_2) + F_3\bigr)(x) = \bigl(F_1(x) + F_2(x)\bigr) + F_3(x) = F_1(x) + \bigl(F_2(x) + F_3(x)\bigr) = \bigl(F_1 + (F_2 + F_3)\bigr)(x)$.

3. Очевидно: $\mathrm{D}(F + \Theta) = \mathrm{D}(F) \cap Q = \mathrm{D}(F)$. Пусть $x \in \mathrm{D}(F + \Theta)$. Тогда: $(F + \Theta)(x) = F(x) + \Theta(x) = F(x) + \theta = F(x)$.

4. Очевидно: $\mathrm{D}\bigl(F + (-1)F\bigr) = \mathrm{D}(F) \cap \mathrm{D}(F) = \mathrm{D}(F) = Q \cap \mathrm{D}(F) = \mathrm{D}(\Theta|_{\mathrm{D}(F)})$. Пусть $x \in \mathrm{D}\bigl(F + (-1)F\bigr)$. Тогда: $\bigl(F + (-1)F\bigr)(x) = F(x) + (-1)F(x) = \theta = \Theta(x) = \Theta|_{\mathrm{D}(F)}(x)$.

5. Очевидно: $\mathrm{D}\bigl((\alpha\beta)F\bigr) = \mathrm{D}(F) = \mathrm{D}\bigl(\alpha(\beta F)\bigr)$. Пусть $x \in \mathrm{D}\bigl((\alpha\beta)F\bigr)$. Тогда: $\bigl((\alpha\beta)F\bigr)(x) = (\alpha\beta)F(x) = \alpha\bigl(\beta F(x)\bigr) = \bigl(\alpha(\beta F)\bigr)(x)$.

6. Очевидно, $\mathrm{D}(1F) = \mathrm{D}(F)$. Пусть $x \in \mathrm{D}(1F)$. Тогда: $(1F)(x) = 1F(x) = F(x)$.

7. Очевидно: $\mathrm{D}\bigl((\alpha + \beta)F\bigr) = \mathrm{D}(F) = \mathrm{D}(\alpha F + \beta F)$. Пусть $x \in \mathrm{D}\bigl((\alpha + \beta)F\bigr)$. Тогда: $\bigl((\alpha + \beta)F\bigr)(x) = (\alpha + \beta)F(x) = \alpha F(x) + \beta F(x) = (\alpha F + \beta F)(x)$.

8. Очевидно: $\mathrm{D}\bigl(\lambda(F_1 + F_2)\bigr) = \mathrm{D}(F_1) \cap \mathrm{D}(F_2) = \mathrm{D}(\lambda F_1 + \lambda F_2)$. Пусть $x \in \mathrm{D}\bigl(\lambda(F_1 + F_2)\bigr)$. Тогда: $\bigl(\lambda(F_1 + F_2)\bigr)(x) = \lambda\bigl(F_1(x) + F_2(x)\bigr) = \lambda F_1(x) + \lambda F_2(x) = (\lambda F_1 + \lambda F_2)(x)$.

9. Очевидно: $\mathrm{D}(0F) = \mathrm{D}(F) = Q \cap \mathrm{D}(F) = \mathrm{D}(\Theta|_{\mathrm{D}(F)})$. Пусть $x \in \mathrm{D}(0F)$. Тогда: $(0F)(x) = 0F(x) = \theta = \Theta(x) = \Theta|_{\mathrm{D}(F)}$.

10. Очевидно, $\mathrm{D}(\lambda\Theta) = \mathrm{D}(\Theta)$. Пусть $x \in \mathrm{D}(\lambda\Theta)$. Тогда: $(\lambda\Theta)(x) = \lambda\Theta(x) = \lambda\theta = \theta = \Theta(x)$. □

Утверждение (ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ МАТЕРИАЛ). *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1, L_2 — линейные пространства над полем $\mathbb{K}$.*

1. *Справедливо утверждение* $\mathrm{lin}(L_1, L_2) \subseteq \mathrm{fun}(L_1, L_2)$.

2. Справедливо утверждение $\Theta \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$.
3. Пусть $A,\ B \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. *Тогда* $A + B \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$.
4. Пусть: $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. *Тогда* $\alpha A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$.

Доказательство.
1. Очевидно, $\mathrm{lin}(L_1, L_2) \subseteq \mathrm{fun}(L_1, L_2)$.
2. Докажем, что $\Theta \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, $\Theta\colon L_1 \implies L_2$.
Пусть $x,\ y \in L_1$. Тогда: $\Theta(x + y) = \theta_2 = \theta_2 + \theta_2 = \Theta(x) + \Theta(y)$.
Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда: $\Theta(\lambda x) = \theta_2 = \lambda\theta_2 = \lambda\Theta(x)$.
3. Пусть $A,\ B \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Докажем, что $A+B \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Очевидно: $A+B\colon L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(A+B) = \mathrm{D}(A)\cap\mathrm{D}(B)$. Так как $\mathrm{D}(A+B) = \mathrm{D}(A)\cap\mathrm{D}(B)$, то $\mathrm{D}(A+B)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x,\ y \in \mathrm{D}(A + B)$. Тогда: $(A+B)(x+y) = A(x+y)+B(x+y) = \big(A(x)+A(y)\big) + \big(B(x) + B(y)\big) = \big(A(x) + B(x)\big) + \big(A(y) + B(y)\big) = (A + B)(x) + (A + B)(y)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(A + B)$. Тогда: $(A + B)(\lambda x) = A(\lambda x) + B(\lambda x) = \lambda A(x) + \lambda B(x) = \lambda\big(A(x) + B(x)\big) = \lambda(A + B)(x)$.

4. Пусть: $\alpha \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Докажем, что $\alpha A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$. Очевидно: $\alpha A\colon L_1 \to L_2$, $\mathrm{D}(\alpha A) = \mathrm{D}(A)$. Так как $\mathrm{D}(\alpha A) = \mathrm{D}(A)$, то $\mathrm{D}(\alpha A)$ — подпространство пространства L_1.

Пусть $x,\ y \in \mathrm{D}(\alpha A)$. Тогда: $(\alpha A)(x + y) = \alpha A(x + y) = \alpha\big(A(x) + A(y)\big) = \alpha A(x) + \alpha A(y) = (\alpha A)(x) + (\alpha A)(y)$.

Пусть: $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in \mathrm{D}(\alpha A)$. Тогда: $(\alpha A)(\beta x) = \alpha A(\beta x) = \alpha\big(\beta A(x)\big) = \beta\big(\alpha A(x)\big) = \beta(\alpha A)(x)$. □

Утверждение (факультативный материал)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $L_1,\ L_2,\ L_3$ *— линейные пространства над полем* $\mathbb{K}$.
1. Пусть: $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B_1,\ B_2 \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. *Тогда:* $(B_1 + B_2)A = B_1A + B_2A$.
2. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $(\lambda B)A = \lambda(BA)$.
3. Пусть: $A_1,\ A_2 \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $B(A_1 + A_2)|_{\mathrm{D}(BA_1+BA_2)} = BA_1 + BA_2$.
4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $A \in \mathrm{lin}(L_1, L_2)$, $B \in \mathrm{lin}(L_2, L_3)$. *Тогда* $B(\lambda A) = \lambda(BA)$.

Доказательство.
1. Очевидно:

$$\mathrm{D}\big((B_1 + B_2)A\big) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \land Ax \in \mathrm{D}(B_1 + B_2)\big\} =$$
$$= \Big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \land \big(Ax \in \mathrm{D}(B_1) \land Ax \in \mathrm{D}(B_2)\big)\Big\} =$$
$$= \Big\{x\colon \big(x \in \mathrm{D}(A) \land Ax \in \mathrm{D}(B_1)\big) \land \big(x \in \mathrm{D}(A) \land Ax \in \mathrm{D}(B_2)\big)\Big\} =$$
$$= \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(B_1A) \land x \in \mathrm{D}(B_2A)\big\} = \mathrm{D}(B_1A + B_2A).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big((B_1+B_2)A\big)$. Тогда: $\big((B_1+B_2)A\big)x = (B_1+B_2)(Ax) = B_1(Ax)+B_2(Ax) = (B_1A)x + (B_2A)x = (B_1A + B_2A)x$.

2. Очевидно:

$$\mathrm{D}\big((\lambda B)A\big) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \land Ax \in \mathrm{D}(\lambda B)\big\} =$$
$$= \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \land Ax \in \mathrm{D}(B)\big\} = \mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}\big(\lambda(BA)\big).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big((\lambda B)A\big)$. Тогда: $\big((\lambda B)A\big)x = (\lambda B)(Ax) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \big(\lambda(BA)\big)x$.

3. Пусть $x \in \mathrm{D}(BA_1+BA_2)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(BA_1)$, $x \in \mathrm{D}(BA_2)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(A_1)$, $A_1x \in \mathrm{D}(B)$, $x \in \mathrm{D}(A_2)$, $A_2x \in \mathrm{D}(B)$. Тогда: $x \in \mathrm{D}(A_1)$, $x \in \mathrm{D}(A_2)$, $A_1x + A_2x \in \mathrm{D}(B)$. Следовательно: $x \in \mathrm{D}(A_1 + A_2)$, $(A_1 + A_2)x \in \mathrm{D}(B)$. Тогда $x \in \mathrm{D}\big(B(A_1 + A_2)\big)$. Итак, $\mathrm{D}(BA_1 + BA_2) \subseteq \mathrm{D}\big(B(A_1 + A_2)\big)$.

Пусть $x \in \mathrm{D}(BA_1 + BA_2)$. Тогда: $(BA_1 + BA_2)x = (BA_1)x + (BA_2)x = B(A_1x) + B(A_2x) = B\big(A_1x + A_2x\big) = B\big((A_1 + A_2)x\big) = \big(B(A_1 + A_2)\big)x$.

4. Так как $\lambda \neq 0$, то:

$$\mathrm{D}\big(B(\lambda A)\big) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(\lambda A) \wedge (\lambda A)x \in \mathrm{D}(B)\big\} =$$
$$= \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge \lambda A(x) \in \mathrm{D}(B)\big\} = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(A) \wedge Ax \in \mathrm{D}(B)\big\} = \mathrm{D}(BA) = \mathrm{D}\big(\lambda(BA)\big).$$

Пусть $x \in \mathrm{D}\big(B(\lambda A)\big)$. Тогда: $\big(B(\lambda A)\big)x = B\big((\lambda A)x\big) = B\big(\lambda A(x)\big) = \lambda B(Ax) = \lambda(BA)(x) = \big(\lambda(BA)\big)x$. $\square$

3.2. Матрица линейного оператора

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный (полулинейный) оператор, e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2. Обозначим: $[A]_i^j(f,e) = [Ae_i]^j(f)$ при: $i = \overline{1,N_1}$, $j = \overline{1,N_2}$. Очевидно: $[A](f,e) \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $Ae_i = [A]_i^j(f,e)f_j$ при $i = \overline{1,N_1}$. Будем говорить, что $[A](f,e)$ — матрица линейного (полулинейного) оператора A в базисах f, e.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A\colon L \implies L$, A — линейный (полулинейный) оператор, e — базис пространства L. Обозначим: $[A]_i^j(e) = [Ae_i]^j(e)$ при i, $j = \overline{1,N}$. Очевидно: $[A](e) \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $Ae_i = [A]_i^j(e)e_i$ при $i = \overline{1,N}$. Будем говорить, что $[A](e)$ — матрица линейного (полулинейного) оператора A в базисе e.

Замечание (примеры). Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

1. Пусть: L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2. Докажем, что $[\Theta](f,e) = \tilde{\Theta}$ (здесь $\tilde{\Theta}$ — нулевая матрица из множества $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$). Пусть: $i = \overline{1,N_1}$, $j = \overline{1,N_2}$. Тогда: $[\Theta]_i^j(f,e) = [\Theta e_i]^j(f) = [\theta_2]^j(f) = 0$.

2. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e, f — базисы пространства L. Докажем, что $[I](f,e) = \alpha(f,e)$. Пусть i, $j = \overline{1,N}$. Тогда: $[I]_i^j(f,e) = [Ie_i]^j(f) = [e_i]^j(f) = \alpha_i^j(f,e)$.

3. Пусть: L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L. Тогда: $[I](e) = [I](e,e) = \alpha(e,e) = \tilde{I}$ (здесь $\tilde{I}$ — единичная матрица из множества $\mathbb{K}^{N \times N}$).

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2.*

1. Пусть: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный оператор. Тогда: $Ax = [A]_i^j(f,e)[x]^i(e)f_j$ при $x \in L_1$.

2. Пусть: $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $Ax = Q_i^j[x]^i(e)f_j$ при $x \in L_1$. Тогда: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный оператор, $[A](f,e) = Q$.

3. Пусть: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — полулинейный оператор. Тогда: $Ax = [A]_i^j(f,e)\overline{[x]^i(e)}f_j$ при $x \in L_1$.

4. Пусть: $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $Ax = Q_i^j \overline{[x]^i(e)} f_j$ *при* $x \in L_1$. *Тогда:* $A\colon L_1 \implies L_2$, A — *полулинейный оператор,* $[A](f,e) = Q$.

Доказательство.

1. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = A\big([x]^i(e)e_i\big) = [x]^i(e)A(e_i) = [x]^i(e)\big([A]_i^j(f,e)f_j\big) = [A]_i^j(f,e)[x]^i(e)f_j.$$

2. Докажем, что: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — линейный оператор. Очевидно, $A\colon L_1 \implies L_2$.
Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:

$$A(x+y) = Q_i^j[x+y]^i(e)f_j = Q_i^j\big([x]^i(e)+[y]^i(e)\big)f_j = Q_i^j[x]^i(e)f_j + Q_i^j[y]^i(e)f_j = Ax + Ay.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$A(\lambda x) = Q_i^j[\lambda x]^i(e)f_j = Q_i^j\big(\lambda[x]^i(e)\big)f_j = \lambda\big(Q_i^j[x]^i(e)f_j\big) = \lambda A(x).$$

Докажем, что $[A](f,e) = Q$. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $Ae_i = [A]_i^j(f,e)f_j$. С другой стороны:

$$Ae_i = Q_k^j[e_i]^k(e)f_j = Q_k^j\delta_i^k f_j = Q_i^j f_j.$$

Тогда: $[A]_i^j(f,e) = Q_i^j$ при $j = \overline{1, N_2}$. Следовательно, $[A](f,e) = Q$.

3. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = A\big([x]^i(e)e_i\big) = \overline{[x]^i(e)}A(e_i) = \overline{[x]^i(e)}\big([A]_i^j(f,e)f_j\big) = [A]_i^j(f,e)\overline{[x]^i(e)}f_j.$$

4. Докажем, что: $A\colon L_1 \implies L_2$, A — полулинейный оператор. Очевидно, $A\colon L_1 \implies L_2$.
Пусть x, $y \in L_1$. Тогда:

$$A(x+y) = Q_i^j\overline{[x+y]^i(e)}f_j = Q_i^j\overline{\big([x]^i(e)+[y]^i(e)\big)}f_j = Q_i^j\overline{[x]^i(e)}f_j + Q_i^j\overline{[y]^i(e)}f_j = Ax + Ay.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$A(\lambda x) = Q_i^j\overline{[\lambda x]^i(e)}f_j = Q_i^j\overline{\big(\lambda[x]^i(e)\big)}f_j = \overline{\lambda}\big(Q_i^j\overline{[x]^i(e)}f_j\big) = \overline{\lambda}A(x).$$

Докажем, что $[A](f,e) = Q$. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $Ae_i = [A]_i^j(f,e)f_j$. С другой стороны:

$$Ae_i = Q_k^j\overline{[e_i]^k(e)}f_j = Q_k^j\overline{\delta_i^k}f_j = Q_k^j\delta_i^k f_j = Q_i^j f_j.$$

Тогда: $[A]_i^j(f,e) = Q_i^j$ при $j = \overline{1, N_2}$. Следовательно, $[A](f,e) = Q$. $\square$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2.

Пусть: $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $x \in L_1$. Тогда:

$$Q_i^j[x]^i(e)f_j = \big(Q_i^j[x]^i(e)\big)f_j = \big(Q[x](e)\big)^j f_j = \big(Qh_e(x)\big)^j f_j = \big(\hat{Q}(h_e x)\big)^j f_j = h_f^{-1}\big(\hat{Q}(h_e x)\big) = \\ = (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)x.$$

Пусть: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $Q = [A](f,e)$. Тогда: $Ax = Q_i^j[x]^i(e)f_j$ при $x \in L_1$. Следовательно: $Ax = (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)x$ при $x \in L_1$. Тогда $A = h_f^{-1}\hat{Q}h_e$.

Пусть: $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $A = h_f^{-1}\hat{Q}h_e$. Тогда: $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $Ax = (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)x$ при $x \in L_1$. Следовательно: $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $Ax = Q_i^j[x]^i(e)f_j$ при $x \in L_1$. Тогда: $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, $[A](f,e) = Q$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$, e — базис пространства L_1, f — базис пространства L_2, $Q = [A](f, e)$.

1. Докажем, что $\ker(A) = h_e^{-1}\big[\ker(\hat{Q})\big]$. Пусть $x \in \ker(A)$. Тогда:

$$x \in L_1,\ Ax = \theta_2;$$
$$x \in L_1,\ (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)x = \theta_2;$$
$$x \in L_1,\ h_f^{-1}\big(\hat{Q}(h_e x)\big) = \theta_2;$$
$$x \in L_1,\ \hat{Q}(h_e x) = \tilde{\theta}_2$$

(здесь $\tilde{\theta}_2$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{N_2}$). Обозначим, $\tilde{x} = h_e x$. Тогда:

$$\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_1},\ x = h_e^{-1}\tilde{x},\ \hat{Q}\tilde{x} = \tilde{\theta}_2;$$
$$\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_1},\ x = h_e^{-1}\tilde{x},\ \tilde{x} \in \ker(\hat{Q});$$
$$x \in h_e^{-1}\big[\ker(\hat{Q})\big].$$

Пусть $x \in h_e^{-1}\big[\ker(\hat{Q})\big]$. Тогда существует столбец $\tilde{x}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^{N_1}$, $x = h_e^{-1}\tilde{x}$, $\tilde{x} \in \ker(\hat{Q})$. Следовательно:

$$x \in L_1,\ \tilde{x} = h_e x,\ \hat{Q}\tilde{x} = \tilde{\theta}_2;$$
$$x \in L_1,\ \hat{Q}(h_e x) = \tilde{\theta}_2;$$
$$x \in L_1,\ h_f^{-1}\big(\hat{Q}(h_e x)\big) = \theta_2;$$
$$x \in L_1,\ (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)x = \theta_2;$$
$$x \in L_1,\ Ax = \theta_2;$$
$$x \in \ker(A).$$

Пусть $N_1 = N_2$. Докажем, что $\ker(A) = \{\theta_1\} \iff \det(Q) \neq 0$. Пусть $\ker(A) = \{\theta_1\}$. Тогда: $\ker(\hat{Q}) = h_e\big[\ker(A)\big] = \{\tilde{\theta}_1\}$. Следовательно, $\det(Q) \neq 0$.

Пусть $\det(Q) \neq 0$. Тогда $\ker(\hat{Q}) = \{\tilde{\theta}_1\}$. Следовательно: $\ker(A) = h_e^{-1}\big[\ker(\hat{Q})\big] = \{\theta_1\}$.

2. Очевидно:

$$\mathrm{R}(A) = A[L_1] = (h_f^{-1}\hat{Q}h_e)[L_1] = h_f^{-1}\Big[\hat{Q}\big[h_e[L_1]\big]\Big] = h_f^{-1}\Big[\hat{Q}\big[\mathbb{K}^{N_1}\big]\Big] = h_f^{-1}\big[L(Q_1, \ldots, Q_{N_1})\big] =$$
$$= L(h_f^{-1}Q_1, \ldots, h_f^{-1}Q_{N_1}).$$

Так как $\mathbb{K}^{N_2} \overset{h_f^{-1}}{\approx} L_2$, то:

$$\mathrm{rank}(A) = \dim\big(\mathrm{R}(A)\big) = \dim\Big(h_f^{-1}\big[L(Q_1, \ldots, Q_{N_1})\big]\Big) = \dim\big(L(Q_1, \ldots, Q_{N_1})\big) = \mathrm{rank}(Q).$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{N}$. Обозначим:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда e — базис пространства $\mathbb{K}^N$. Будем говорить, что e — простейший базис пространства $\mathbb{K}^N$.

Пусть $x \in \mathbb{K}^N$. Тогда: $[x]^j(e) = x^j$ при $j = \overline{1, N}$. Следовательно, $[x](e) = x$. Тогда $h_e x = x$. Следовательно, $h_e = I$ (здесь I — единичная функция на множестве $\mathbb{K}^N$).

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* e *— базис пространства* L_1*,* f *— базис пространства* L_2*.*

1. Пусть: A*,* $B \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*,* $[A](f, e) = [B](f, e)$*. Тогда* $A = B$*.*

2. Пусть $Q \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$*. Существует оператор* A*, удовлетворяющий условиям:* $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*,* $[A](f, e) = Q$*.*

3. Пусть A*,* $B \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*. Тогда* $[A + B](f, e) = [A](f, e) + [B](f, e)$*.*

4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*. Тогда* $[\lambda A](f, e) = \lambda [A](f, e)$*.*

Доказательство.

1. Пусть $x \in L_1$. Тогда:

$$Ax = [A]_i^j(f, e)[x]^i(e) f_j = [B]_i^j(f, e)[x]^i(e) f_j = Bx.$$

2. Обозначим: $Ax = Q_i^j [x]^i(e) f_j$ при $x \in L_1$. Тогда: $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$, $[A](e, f) = Q$.

3. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $(A + B)e_i = [A + B]_i^j(f, e) f_j$. С другой стороны:

$$(A + B)e_i = Ae_i + Be_i = [A]_i^j(f, e) f_j + [B]_i^j(f, e) f_j = \big([A]_i^j(f, e) + [B]_i^j(f, e)\big) f_j.$$

Тогда: $[A + B]_i^j(f, e) = [A]_i^j(f, e) + [B]_i^j(f, e)$ при $j = \overline{1, N_2}$. Следовательно: $[A + B]_i^j(f, e) = \big([A](f, e) + [B](f, e)\big)_i^j$ при $j = \overline{1, N_2}$. Тогда $[A + B](f, e) = [A](f, e) + [B](f, e)$.

4. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $(\lambda A)e_i = [\lambda A]_i^j(f, e) f_j$. С другой стороны:

$$(\lambda A)e_i = \lambda A(e_i) = \lambda\big([A]_i^j(f, e) f_j\big) = \big(\lambda [A]_i^j(f, e)\big) f_j.$$

Тогда: $[\lambda A]_i^j(f, e) = \lambda [A]_i^j(f, e)$ при $j = \overline{1, N_2}$. Следовательно: $[\lambda A]_i^j(f, e) = \big(\lambda [A](f, e)\big)_i^j$ при $j = \overline{1, N_2}$. Тогда $[\lambda A](f, e) = \lambda [A](f, e)$. $\square$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$.

Пусть: e_0 — базис пространства L_1, f_0 — базис пространства L_2. Обозначим: $\varphi(A) = [A](f_0, e_0)$ при $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$. Очевидно, φ — изоморфизм пространства $\operatorname{Lin}(L_1, L_2)$ на пространство $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Тогда: $\dim\big(\operatorname{Lin}(L_1, L_2)\big) = \dim(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}) = N_1 N_2$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* L_3 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_3 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_3) = N_3$*;* $A \in \operatorname{Lin}(L_1, L_2)$*,* $B \in \operatorname{Lin}(L_2, L_3)$*,* e *— базис пространства* L_1*,* f *— базис пространства* L_2*,* g *— базис пространства* L_3*. Тогда* $[BA](g, e) = [B](g, f)[A](f, e)$*.*

Доказательство. Пусть $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $(BA)e_i = [BA]_i^k(g, e) g_k$. С другой стороны:

$$(BA)e_i = B(Ae_i) = B\big([A]_i^j(f, e) f_j\big) = [A]_i^j(f, e) B(f_j) = [A]_i^j(f, e)\big([B]_j^k(g, f) g_k\big) = \\ = \big([B]_j^k(g, f)[A]_i^j(f, e)\big) g_k.$$

Тогда: $[BA]_i^k(g, e) = [B]_j^k(g, f)[A]_i^j(f, e)$ при $k = \overline{1, N_3}$. Следовательно: $[BA]_i^k(g, e) = \big([B](g, f)[A](f, e)\big)_i^k$ при $k = \overline{1, N_3}$. Тогда $[BA](g, e) = [B](g, f)[A](f, e)$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L_1 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_1) = N_1$*;* L_2 *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L_2) = N_2$*;* e*,* e' *— базисы пространства* L_1*,* f*,* f' *— базисы пространства* L_2*.*

1. Пусть: $A\colon L_1 \implies L_2$*,* A *— линейный оператор. Тогда:* $[A]_{i'}^{j'}(f', e') = \alpha_j^{j'}(f', f)[A]_i^j(f, e)\alpha_{i'}^i(e, e')$ *при:* $i' = \overline{1, N_1}$*,* $j' = \overline{1, N_2}$*;* $[A](f', e') = \alpha(f', f)[A](f, e)\alpha(e, e')$*.*

2. Пусть: $A\colon L_1 \implies L_2$*,* A *— полулинейный оператор. Тогда:* $[A]_{i'}^{j'}(f', e') = \alpha_j^{j'}(f', f)[A]_i^j(f, e)\overline{\alpha_{i'}^i(e, e')}$ *при:* $i' = \overline{1, N_1}$*,* $j' = \overline{1, N_2}$*;* $[A](f', e') = \alpha(f', f)[A](f, e)\overline{\alpha(e, e')}$*.*

Доказательство.

1. Пусть: $i' = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$[A]_{i'}^{j'}(f', e') = [Ae'_{i'}]^{j'}(f') = \Big[A\big(\alpha_{i'}^i(e, e')e_i\big)\Big]^{j'}(f') = \alpha_{i'}^i(e, e')[Ae_i]^{j'}(f') =$$
$$= \alpha_{i'}^i(e, e')\big(\alpha_j^{j'}(f', f)[Ae_i]^j(f)\big) = \alpha_j^{j'}(f', f)[A]_i^j(f, e)\alpha_{i'}^i(e, e').$$

2. Пусть: $i' = \overline{1, N_1}$, $j' = \overline{1, N_2}$. Тогда:

$$[A]_{i'}^{j'}(f', e') = [Ae'_{i'}]^{j'}(f') = \Big[A\big(\alpha_{i'}^i(e, e')e_i\big)\Big]^{j'}(f') = \overline{\alpha_{i'}^i(e, e')}[Ae_i]^{j'}(f') =$$
$$= \overline{\alpha_{i'}^i(e, e')}\big(\alpha_j^{j'}(f', f)[Ae_i]^j(f)\big) = \alpha_j^{j'}(f', f)[A]_i^j(f, e)\overline{\alpha_{i'}^i(e, e')}. \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L_1 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_1 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_1) = N_1$; L_2 — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N_2 \in \mathbb{N}$, $\dim(L_2) = N_2$; $A \in \mathrm{Lin}(L_1, L_2)$.

Пусть: e — базис пространства L_1, $i = \overline{1, N_1}$. Очевидно, $\big\{[A]_i(f, e)\big\}_f \in (TL_2)_0^1$.

Пусть: f — базис пространства L_2, $j = \overline{1, N_2}$. Очевидно, $\big\{[A]^j(f, e)\big\}_e \in (TL_1)_1^0$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in \mathrm{Lin}(L, L)$.

Очевидно, $\big\{[A](e)\big\}_e \in (TL)_1^1$. Тогда: $\mathrm{tr}\big([A](e')\big) = \mathrm{tr}\big([A](e)\big)$, $\det\big([A](e')\big) = \det\big([A](e)\big)$ при: e, e' — базисы пространства L.

Пусть e — базис пространства L. Обозначим: $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}\big([A](e)\big)$, $\det(A) = \det\big([A](e)\big)$.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[4] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[5] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.