Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 2. Тензорная алгебра

2.1. Матрица перехода от одного базиса к другому

Замечание (повторение). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L.

Пусть $x \in L$. Будем говорить, что $\tilde{x}$ — столбец координат вектора x в базисе e, если: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$, $x = \tilde{x}^k e_k$.

Пусть $x \in L$. Очевидно, существует единственный столбец $\tilde{x}$, удовлетворяющий условию: $\tilde{x}$ — столбец координат вектора x в базисе e.

Пусть $x \in L$. Обозначим через $[x](e)$ столбец координат вектора x в базисе e.

Обозначим: $h_e(x) = [x](e)$ при $x \in L$. Тогда: $L \overset{h_e}{\approx} \mathbb{K}^N$, $\mathbb{K}^N \overset{h_e^{-1}}{\approx} L$, $h_e^{-1}(\tilde{x}) = \tilde{x}^k e_k$ при $\tilde{x} \in \mathbb{K}^N$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L, $e' \in L^N$. Обозначим: $\alpha^i_{i'}(e, e') = [e'_{i'}]^i(e)$ при i, $i' = \overline{1, N}$. Очевидно: $\alpha(e, e') \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $e'_{i'} = \alpha^i_{i'}(e, e') e_i$ при $i' = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $\alpha(e, e')$ — матрица перехода от базиса e к набору векторов e'.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; e — базис пространства L, $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $e'_{i'} = A^i_{i'} e_i$ при $i' = \overline{1, N}$. Очевидно: $e' \in L^N$, $\alpha(e, e') = A$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. *Пусть e — базис пространства L. Тогда* $\alpha(e, e) = I$.
2. *Пусть: e, e' — базисы пространства L,* $e'' \in L^N$. *Тогда* $\alpha(e, e')\alpha(e', e'') = \alpha(e, e'')$.
3. *Пусть e, e' — базисы пространства L. Тогда:* $\alpha(e, e')\alpha(e', e) = I$; $\det\big(\alpha(e, e')\big) \neq 0$, $\alpha(e, e')^{-1} = \alpha(e', e)$.
4. *Пусть: e — базис пространства L,* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $\det(A) \neq 0$, $e'_{i'} = A^i_{i'} e_i$ *при* $i' = \overline{1, N}$. *Тогда: e' — базис пространства L,* $\alpha(e, e') = A$.
5. *Пусть: $x \in L$, e, e' — базисы пространства L. Тогда:* $[x]^{j'}(e') = \alpha^{j'}_j(e', e)[x]^j(e)$ *при* $j' = \overline{1, N}$; $[x](e') = \alpha(e', e)[x](e)$.

Доказательство.

1. Пусть i, $j = \overline{1, N}$. Тогда: $\alpha^j_i(e, e) = [e_i]^j(e) = \delta^j_i$. Следовательно, $\alpha(e, e) = I$.
2. Пусть $i'' = \overline{1, N}$. Очевидно:

$$e''_{i''} = \alpha^{i'}_{i''}(e', e'') e'_{i'} = \alpha^{i'}_{i''}(e', e'')\big(\alpha^i_{i'}(e, e') e_i\big) = \big(\alpha^i_{i'}(e, e')\alpha^{i'}_{i''}(e', e'')\big) e_i.$$

С другой стороны, $e''_{i''} = \alpha^i_{i''}(e, e'') e_i$. Тогда: $\alpha^i_{i'}(e, e')\alpha^{i'}_{i''}(e', e'') = \alpha^i_{i''}(e, e'')$ при $i = \overline{1, N}$. Следовательно: $\big(\alpha(e, e')\alpha(e', e'')\big)^i_{i''} = \alpha^i_{i''}(e, e'')$ при $i = \overline{1, N}$. Тогда $\alpha(e, e')\alpha(e', e'') = \alpha(e, e'')$.

3. Очевидно: $\alpha(e,e')\alpha(e',e)=\alpha(e,e)=I$. Тогда: $\det\bigl(\alpha(e,e')\bigr)\neq 0$, $\alpha(e,e')^{-1}=\alpha(e',e)$.

4. Очевидно: $e'\in L^N$, $\alpha(e,e')=A$. Так как $\det(A)\neq 0$, то $A_1,\dots,A_N$ — линейно независимые столбцы. Так как: $\mathbb{K}^N\overset{h_e^{-1}}{\approx}L$, $e'_{i'}=A^i_{i'}e_i=h_e^{-1}(A_{i'})$ при $i'=\overline{1,N}$, то $e'_1,\dots,e'_N$ — линейно независимые векторы. Так как $\dim(L)=N$, то $e'_1,\dots,e'_N$ — базис пространства L.

5. Очевидно, $x=[x]^{j'}(e')e'_{j'}$. С другой стороны:

$$x=[x]^j(e)e_j=[x]^j(e)\bigl(\alpha^{j'}_j(e',e)e'_{j'}\bigr)=\bigl(\alpha^{j'}_j(e',e)[x]^j(e)\bigr)e'_{j'}.$$

Тогда: $[x]^{j'}(e')=\alpha^{j'}_j(e',e)[x]^j(e)$ при $j'=\overline{1,N}$. Следовательно: $[x]^{j'}(e')=\bigl(\alpha(e',e)[x](e)\bigr)^{j'}$ при $j'=\overline{1,N}$. Тогда $[x](e')=\alpha(e',e)[x](e)$. □

2.2. Числовые наборы

Замечание («прямоугольные» числовые наборы). Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; $r\in\mathbb{N}$, $N_1,\dots,N_r\in\mathbb{N}$.

1. Обозначим через $\mathbb{K}^{N_1\times\dots\times N_r}$ множество всех функций A, удовлетворяющих условию: $A\colon\{1,\dots,N_1\}\times\dots\times\{1,\dots,N_r\}\implies\mathbb{K}$.

2. Пусть $A\in\mathbb{K}^{N_1\times\dots\times N_r}$. Будем говорить, что A — «прямоугольный» числовой набор степени r. **Иными словами, «прямоугольный» числовой набор степени r — это числовая функция r дискретных переменных.**

3. Пусть $A\in\mathbb{K}^{N_1\times\dots\times N_r}$. Далее часто будем писать $A_{i_1,\dots,i_r}$ вместо $A(i_1,\dots,i_r)$.

4. Пусть $A\in\mathbb{K}^{N_1\times\dots\times N_r}$. Далее часто будем писать $A^{i_1,\dots,i_r}$ вместо $A(i_1,\dots,i_r)$.

5. Пусть: p, $q\in\mathbb{N}$, $r=q+p$, $A\in\mathbb{K}^{N_1\times\dots\times N_r}$. Далее часто будем писать $A^{j_1,\dots,j_q}_{i_1,\dots,i_p}$ вместо $A(j_1,\dots,j_q,i_1,\dots,i_p)$.

6. Пусть A, $B\in\mathbb{K}^{N_1\times\dots\times N_r}$. Тогда: $(A+B)_{i_1,\dots,i_r}=A_{i_1,\dots,i_r}+B_{i_1,\dots,i_r}$ при: $i_1=\overline{1,N_1},\dots,i_r=\overline{1,N_r}$.

7. Пусть: $\lambda\in\mathbb{K}$, $A\in\mathbb{K}^{N_1\times\dots\times N_r}$. Тогда: $(\lambda A)_{i_1,\dots,i_r}=\lambda A_{i_1,\dots,i_r}$ при: $i_1=\overline{1,N_1},\dots,i_r=\overline{1,N_r}$.

8. Очевидно, $\mathbb{K}^{N_1\times\dots\times N_r}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Обозначим через N_* количество элементов множества $\{1,\dots,N_1\}\times\dots\times\{1,\dots,N_r\}$. Тогда: $\dim\bigl(\mathbb{K}^{N_1\times\dots\times N_r}\bigr)=N_*=N_1\cdots N_r$.

Замечание («квадратные» числовые наборы). Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; $N\in\mathbb{N}$.

1. Пусть $r=0$. Обозначим, $\mathbb{K}^{(N,r)}=\mathbb{K}$. Пусть $r\in\mathbb{N}$. Обозначим, $N_1,\dots,N_r=N$. Обозначим, $\mathbb{K}^{(N,r)}=\mathbb{K}^{N_1\times\dots\times N_r}$.

2. Пусть: $r\in\mathbb{Z}_+$, $A\in\mathbb{K}^{(N,r)}$. Будем говорить, что A — «квадратный» числовой набор степени r.

3. Пусть $r\in\mathbb{Z}_+$. Очевидно: $\mathbb{K}^{(N,r)}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\dim\bigl(\mathbb{K}^{(N,r)}\bigr)=N^r$.

2.3. Геометрические объекты

Замечание. Пусть: $\mathbb{K}\in\{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N\in\mathbb{N}$, $\dim(L)=N$; $r\in\mathbb{Z}_+$.

1. Будем говорить, что A — геометрический объект степени r в пространстве L, если A — это отображение, которое каждому базису e пространства L ставит в соответствие числовой набор $A(e)\in\mathbb{K}^{(N,r)}$.

2. Обозначим через $(GL)_r$ множество всех геометрических объектов степени r в пространстве L.

3. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $A \in (GL)_r$. Далее часто будем писать $A_{i_1,\ldots,i_r}(e)$ вместо $\big(A(e)\big)_{i_1,\ldots,i_r}$.

4. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $A \in (GL)_r$. Далее часто будем писать $A^{i_1,\ldots,i_r}(e)$ вместо $\big(A(e)\big)^{i_1,\ldots,i_r}$.

5. Пусть: p, $q \in \mathbb{N}$, $r = q + p$, $A \in (GL)_r$. Далее часто будем писать $A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)$ вместо $\big(A(e)\big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}$.

6. Пусть A, $B \in (GL)_r$. Тогда: $(A + B)(e) = A(e) + B(e)$ при: e — базис пространства L; $(A + B)_{i_1,\ldots,i_r}(e) = A_{i_1,\ldots,i_r}(e) + B_{i_1,\ldots,i_r}(e)$ при: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N}$.

7. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in (GL)_r$. Тогда: $(\lambda A)(e) = \lambda A(e)$ при: e — базис пространства L; $(\lambda A)_{i_1,\ldots,i_r}(e) = \lambda A_{i_1,\ldots,i_r}(e)$ при: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N}$.

8. Очевидно, $(GL)_r$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

2.4. Тензоры

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; p, $q \in \mathbb{Z}_+$.

1. Будем говорить, что A — тензор порядка $\binom{q}{p}$ в пространстве L, если A — это геометрический объект степени $q + p$ в пространстве L, удовлетворяющий условию:

$$A^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}(e') = A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_q}_{j_q}(e', e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_p}_{i'_p}(e, e')$$

при: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_p$, $j'_1, \ldots, j'_q = \overline{1, N}$.

2. Обозначим через $(TL)^q_p$ множество всех тензоров порядка $\binom{q}{p}$ в пространстве L.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; p, $q \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $(TL)^q_p$ — подпространство пространства $(GL)_{q+p}$.*

Доказательство.

1. Очевидно, $(TL)^q_p \subseteq (GL)_{q+p}$.

2. Пусть Θ — нулевой элемент пространства $(GL)_{q+p}$. Докажем, что $\Theta \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_p$, $j'_1, \ldots, j'_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\Theta^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_q}_{j_q}(e', e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_p}_{i'_p}(e, e') = 0 = \Theta^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}(e').$$

3. Пусть A, $B \in (TL)^q_p$. Докажем, что $A+B \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_p$, $j'_1, \ldots, j'_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{aligned}
&(A + B)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_q}_{j_q}(e', e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_p}_{i'_p}(e, e') = \\
&= \big(A^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) + B^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)\big)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_q}_{j_q}(e', e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_p}_{i'_p}(e, e') = \\
&= A^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}(e') + B^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}(e') = (A + B)^{j'_1,\ldots,j'_q}_{i'_1,\ldots,i'_p}(e').
\end{aligned}$$

4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in (TL)^q_p$. Докажем, что $\lambda A \in (TL)^q_p$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_p$, $j'_1, \ldots, j'_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(\lambda A)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_q}_{j_q}(e', e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_p}_{i'_p}(e, e') =$$

$$= \big(\lambda A_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e)\big)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_q}^{j'_q}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_p}^{i_p}(e,e') =$$
$$= \lambda A_{i'_1,\dots,i'_p}^{j'_1,\dots,j'_q}(e') = (\lambda A)_{i'_1,\dots,i'_p}^{j'_1,\dots,j'_q}(e'). \quad \square$$

Замечание (примеры). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть $x \in L$. Очевидно, $[x] \in (TL)_0^1$.
2. Пусть: $\delta_i^j(e) = \delta_i^j$ при: e — базис пространства L, i, $j = \overline{1,N}$. Докажем, что $\delta \in (TL)_1^1$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, i', $j' = \overline{1,N}$. Тогда:

$$\delta_i^j(e)\alpha_j^{j'}(e',e)\alpha_{i'}^i(e,e') = \delta_i^j\alpha_j^{j'}(e',e)\alpha_{i'}^i(e,e') = \alpha_i^{j'}(e',e)\alpha_{i'}^i(e,e') = \delta_{i'}^{j'} = \delta_{i'}^{j'}(e').$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $N \in \mathbb{N}$*,* $\dim(L) = N$*;* p*,* $q \in \mathbb{Z}_+$*,* e_0 *— базис пространства* L*.*

1. Пусть: A*,* $B \in (TL)_p^q$*,* $A(e_0) = B(e_0)$*. Тогда* $A = B$*.*

2. Пусть $A_0 \in \mathbb{K}^{(N,q+p)}$*. Обозначим:*

$$A_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e) = (A_0)_{i_1^0,\dots,i_p^0}^{j_1^0,\dots,j_q^0}\alpha_{j_1^0}^{j_1}(e,e_0)\cdots\alpha_{j_q^0}^{j_q}(e,e_0)\alpha_{i_1}^{i_1^0}(e_0,e)\cdots\alpha_{i_p}^{i_p^0}(e_0,e)$$

при: e *— базис пространства* L*,* $i_1,\dots,i_p$*,* $j_1,\dots,j_q = \overline{1,N}$*. Тогда:* $A \in (TL)_p^q$*,* $A(e_0) = A_0$*.*

Доказательство.

1. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\dots,i_p$, $j_1,\dots,j_q = \overline{1,N}$. Тогда:

$$A_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e) = A_{i_1^0,\dots,i_p^0}^{j_1^0,\dots,j_q^0}(e_0)\alpha_{j_1^0}^{j_1}(e,e_0)\cdots\alpha_{j_q^0}^{j_q}(e,e_0)\alpha_{i_1}^{i_1^0}(e_0,e)\cdots\alpha_{i_p}^{i_p^0}(e_0,e) =$$
$$= B_{i_1^0,\dots,i_p^0}^{j_1^0,\dots,j_q^0}(e_0)\alpha_{j_1^0}^{j_1}(e,e_0)\cdots\alpha_{j_q^0}^{j_q}(e,e_0)\alpha_{i_1}^{i_1^0}(e_0,e)\cdots\alpha_{i_p}^{i_p^0}(e_0,e) = B_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e).$$

2. Докажем, что $A \in (TL)_p^q$. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\dots,i'_p$, $j'_1,\dots,j'_q = \overline{1,N}$. Тогда:

$$A_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_q}^{j'_q}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_p}^{i_p}(e,e') =$$
$$= \Big((A_0)_{i_1^0,\dots,i_p^0}^{j_1^0,\dots,j_q^0}\alpha_{j_1^0}^{j_1}(e,e_0)\cdots\alpha_{j_q^0}^{j_q}(e,e_0)\alpha_{i_1}^{i_1^0}(e_0,e)\cdots\alpha_{i_p}^{i_p^0}(e_0,e)\Big)$$
$$\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_q}^{j'_q}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_p}^{i_p}(e,e') =$$
$$= (A_0)_{i_1^0,\dots,i_p^0}^{j_1^0,\dots,j_q^0}\alpha_{j_1^0}^{j'_1}(e',e_0)\cdots\alpha_{j_q^0}^{j'_q}(e',e_0)\alpha_{i'_1}^{i_1^0}(e_0,e')\cdots\alpha_{i'_p}^{i_p^0}(e_0,e') = A_{i'_1,\cdots,i'_p}^{j'_1,\dots,j'_q}(e').$$

Докажем, что $A(e_0) = A_0$. Пусть $i_1,\dots,i_p$, $j_1,\dots,j_q = \overline{1,N}$. Тогда:

$$A_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}(e_0) = (A_0)_{i_1^0,\dots,i_p^0}^{j_1^0,\dots,j_q^0}\alpha_{j_1^0}^{j_1}(e_0,e_0)\cdots\alpha_{j_q^0}^{j_q}(e_0,e_0)\alpha_{i_1}^{i_1^0}(e_0,e_0)\cdots\alpha_{i_p}^{i_p^0}(e_0,e_0) =$$
$$= (A_0)_{i_1^0,\dots,i_p^0}^{j_1^0,\dots,j_q^0}\delta_{j_1^0}^{j_1}\cdots\delta_{j_q^0}^{j_q}\delta_{i_1}^{i_1^0}\cdots\delta_{i_p}^{i_p^0} = (A_0)_{i_1,\dots,i_p}^{j_1,\dots,j_q}. \quad \square$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; p, $q \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть e_0 — базис пространства L. Обозначим: $\varphi(A) = A(e_0)$ при $A \in (TL)_p^q$. Очевидно, φ — изоморфизм пространства $(TL)_p^q$ на пространство $\mathbb{K}^{(N,q+p)}$. Тогда: $\dim\big((TL)_p^q\big) = \dim\big(\mathbb{K}^{(N,q+p)}\big) = N^{q+p}$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть: p_1, $q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, p_2, $q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{q_2}_{p_2}$. Обозначим:

$$(A \otimes B)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) = A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e) B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)$$

при: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}$, $j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $A \otimes B$ — прямое произведение тензоров A, B.

2. Пусть: p, $q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)^q_p$, $k = \overline{1, p}$, $m = \overline{1, q}$. Обозначим:

$$\big(\langle A\rangle^m_k\big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e) = A^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)$$

при: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p-1}$, $j_1, \ldots, j_{q-1} = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $\langle A\rangle^m_k$ — свёртка тензора A.

3. Пусть: p, $q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^q_p$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. Обозначим:

$$\big([A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}\big)^{j_1,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_p}(e) = A^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}(e)$$

при: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p$, $j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $[A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}$ — результат транспонирования тензора A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть: p_1, $q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, p_2, $q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $A \otimes B \in (TL)^{q_1+q_2}_{p_1+p_2}$.

2. Пусть: p_1, $q_1 \in \mathbb{Z}_+$, A_1, $A_2 \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, p_2, $q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $(A_1 + A_2) \otimes B = A_1 \otimes B + A_2 \otimes B$.

3. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, p_1, $q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, p_2, $q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $(\lambda A) \otimes B = \lambda(A \otimes B)$.

4. Пусть: p_1, $q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, p_2, $q_2 \in \mathbb{Z}_+$, B_1, $B_2 \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $A \otimes (B_1 + B_2) = A \otimes B_1 + A \otimes B_2$.

5. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, p_1, $q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, p_2, $q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{p_2}_{q_2}$. *Тогда* $A \otimes (\lambda B) = \lambda(A \otimes B)$.

6. Пусть: p_1, $q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^{q_1}_{p_1}$, p_2, $q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)^{q_2}_{p_2}$, p_3, $q_3 \in \mathbb{Z}_+$, $C \in (TL)^{q_3}_{p_3}$. *Тогда* $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$.

7. Пусть: p, $q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)^q_p$, $k = \overline{1, p}$, $m = \overline{1, q}$. *Тогда* $\langle A\rangle^m_k \in (TL)^{q-1}_{p-1}$.

8. Пусть: p, $q \in \mathbb{N}$, A, $B \in (TL)^q_p$, $k = \overline{1, p}$, $m = \overline{1, q}$. *Тогда* $\langle A + B\rangle^m_k = \langle A\rangle^m_k + \langle B\rangle^m_k$.

9. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, p, $q \in \mathbb{N}$, $A \in (TL)^q_p$, $k = \overline{1, p}$, $m = \overline{1, q}$. *Тогда* $\langle \lambda A\rangle^m_k = \lambda\langle A\rangle^m_k$.

10. Пусть: p, $q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^q_p$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[A]^{\sigma_2}_{\sigma_1} \in (TL)^q_p$.

11. Пусть: p, $q \in \mathbb{Z}_+$, A, $B \in (TL)^q_p$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[A + B]^{\sigma_2}_{\sigma_1} = [A]^{\sigma_2}_{\sigma_1} + [B]^{\sigma_2}_{\sigma_1}$.

12. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, p, $q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)^q_p$, $\sigma_1 \in S_p$, $\sigma_2 \in S_q$. *Тогда* $[\lambda A]^{\sigma_2}_{\sigma_1} = \lambda[A]^{\sigma_2}_{\sigma_1}$.

Доказательство.

1. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_{p_1+p_2}$, $j'_1, \ldots, j'_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(A \otimes B)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e) \alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_{q_1+q_2}}_{j_{q_1+q_2}}(e', e) \alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_{p_1+p_2}}_{i'_{p_1+p_2}}(e, e') =$$
$$= \big(A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e) B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\big) \alpha^{j'_1}_{j_1}(e', e) \cdots \alpha^{j'_{q_1+q_2}}_{j_{q_1+q_2}}(e', e) \alpha^{i_1}_{i'_1}(e, e') \cdots \alpha^{i_{p_1+p_2}}_{i'_{p_1+p_2}}(e, e') =$$
$$= A^{j'_1,\ldots,j'_{q_1}}_{i'_1,\ldots,i'_{p_1}}(e') B^{j'_{q_1+1},\ldots,j'_{q_1+q_2}}_{i'_{p_1+1},\ldots,i'_{p_1+p_2}}(e') = (A \otimes B)^{j'_1,\ldots,j'_{q_1+q_2}}_{i'_1,\ldots,i'_{p_1+p_2}}(e').$$

2. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}$, $j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}=\overline{1,N}$. Тогда:

$$\big((A_1+A_2)\otimes B\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)=\big((A_1)^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)+(A_2)^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)\big)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)=$$
$$=(A_1)^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)+(A_2)^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)=$$
$$=(A_1\otimes B+A_2\otimes B)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

3. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}$, $j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}=\overline{1,N}$. Тогда:

$$\big((\lambda A)\otimes B\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)=\big(\lambda A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)\big)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)=$$
$$=\lambda\big(A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\big)=\big(\lambda(A\otimes B)\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

4. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}$, $j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}=\overline{1,N}$. Тогда:

$$\big(A\otimes(B_1+B_2)\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)=A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)\big((B_1)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)+(B_2)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\big)=$$
$$=A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)(B_1)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)+A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)(B_2)^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)=$$
$$=(A\otimes B_1+A\otimes B_2)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

5. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}$, $j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}=\overline{1,N}$. Тогда:

$$\big(A\otimes(\lambda B)\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)=A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)\big(\lambda B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\big)=$$
$$=\lambda\big(A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\big)=\big(\lambda(A\otimes B)\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}(e).$$

6. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{p_1+p_2+p_3}$, $j_1,\ldots,j_{q_1+q_2+q_3}=\overline{1,N}$. Тогда:

$$\big((A\otimes B)\otimes C\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e)=\big(A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)\big)C^{j_{q_1+q_2+1},\ldots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_{p_1+p_2+1},\ldots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e)=$$
$$=A^{j_1,\ldots,j_{q_1}}_{i_1,\ldots,i_{p_1}}(e)\big(B^{j_{q_1+1},\ldots,j_{q_1+q_2}}_{i_{p_1+1},\ldots,i_{p_1+p_2}}(e)C^{j_{q_1+q_2+1},\ldots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_{p_1+p_2+1},\ldots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e)\big)=\big(A\otimes(B\otimes C)\big)^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2+q_3}}_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2+p_3}}(e).$$

7. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1,\ldots,i'_{p-1}$, $j'_1,\ldots,j'_{q-1}=\overline{1,N}$. Тогда:

$$\big(\langle A\rangle^m_k\big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e,e')=$$
$$=\big(A^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)\big)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e,e')=$$
$$=A^{j_1,\ldots,j_{m-1},j,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)\delta^i_j\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e,e')=$$
$$=A^{j_1,\ldots,j_{m-1},j,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)\alpha^i_{i'}(e,e')\alpha^{i'}_j(e',e)\alpha^{j'_1}_{j_1}(e',e)\cdots\alpha^{j'_{q-1}}_{j_{q-1}}(e',e)\alpha^{i_1}_{i'_1}(e,e')\cdots\alpha^{i_{p-1}}_{i'_{p-1}}(e,e')=$$
$$=A^{j'_1,\ldots,j'_{m-1},i',j'_m,\ldots,j'_{q-1}}_{i'_1,\ldots,i'_{k-1},i',i'_k,\ldots,i'_{p-1}}(e')=\big(\langle A\rangle^m_k\big)^{j'_1,\ldots,j'_{q-1}}_{i'_1,\ldots,i'_{p-1}}(e').$$

8. Пусть: e — базис пространства L, $i_1,\ldots,i_{p-1}$, $j_1,\ldots,j_{q-1}=\overline{1,N}$. Тогда:

$$\big(\langle A+B\rangle^m_k\big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e)=A^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)+B^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}(e)=$$
$$=\big(\langle A\rangle^m_k+\langle B\rangle^m_k\big)^{j_1,\ldots,j_{q-1}}_{i_1,\ldots,i_{p-1}}(e).$$

9. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p-1}$, $j_1, \ldots, j_{q-1} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\bigl(\langle \lambda A\rangle_k^m\bigr)_{i_1,\ldots,i_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{q-1}}(e) = \lambda A_{i_1,\ldots,i_{k-1},i,i_k,\ldots,i_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{m-1},i,j_m,\ldots,j_{q-1}}(e) = \bigl(\lambda\langle A\rangle_k^m\bigr)_{i_1,\ldots,i_{p-1}}^{j_1,\ldots,j_{q-1}}(e).$$

10. Пусть: e, e' — базисы пространства L, $i'_1, \ldots, i'_p$, $j'_1, \ldots, j'_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}\bigl([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\bigr)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_q}^{j'_q}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_p}^{i_p}(e,e') = \\ = A_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}(e)\alpha_{j_1}^{j'_1}(e',e)\cdots\alpha_{j_q}^{j'_q}(e',e)\alpha_{i'_1}^{i_1}(e,e')\cdots\alpha_{i'_p}^{i_p}(e,e') = \\ = A_{i'_{\sigma_1(1)},\ldots,i'_{\sigma_1(p)}}^{j'_{\sigma_2(1)},\ldots,j'_{\sigma_2(q)}}(e') = \bigl([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\bigr)_{i'_1,\ldots,i'_p}^{j'_1,\ldots,j'_q}(e').\end{gathered}$$

11. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p$, $j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\bigl([A+B]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\bigr)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e) = A_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}(e) + B_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}(e) = \bigl([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2} + [B]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\bigr)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e).$$

12. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p$, $j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\bigl([\lambda A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\bigr)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e) = \lambda A_{i_{\sigma(1)},\ldots,i_{\sigma(p)}}^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q)}}(e) = \lambda\bigl([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\bigr)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e).$$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $A \in (TL)_1^1$.

Пусть e — базис пространства L. Тогда: $\operatorname{tr}\bigl(A(e)\bigr) = A_i^i(e) = \langle A\rangle_1^1(e)$.

Пусть e, e' — базисы пространства L. Так как $\langle A\rangle_1^1 \in (TL)_0^0$, то: $\operatorname{tr}\bigl(A(e')\bigr) = \langle A\rangle_1^1(e') = \langle A\rangle_1^1(e) = \operatorname{tr}\bigl(A(e)\bigr)$.

Пусть e — базис пространства L. Обозначим, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\bigl(A(e)\bigr)$.

Пусть e, e' — базисы пространства L. Так как: $A_{i'}^{j'}(e') = A_i^j(e)\alpha_j^{j'}(e',e)\alpha_{i'}^i(e,e')$ при i', $j' = \overline{1, N}$, то $A(e') = \alpha(e',e)A(e)\alpha(e,e')$. Тогда:

$$\begin{gathered}\det\bigl(A(e')\bigr) = \det\bigl(\alpha(e',e)A(e)\alpha(e,e')\bigr) = \det\bigl(\alpha(e',e)\bigr)\det\bigl(A(e)\bigr)\det\bigl(\alpha(e,e')\bigr) = \\ = \det\bigl(A(e)\bigr)\det\bigl(\alpha(e,e')\alpha(e',e)\bigr) = \det\bigl(A(e)\bigr)\det(I) = \det\bigl(A(e)\bigr).\end{gathered}$$

Пусть e — базис пространства L. Обозначим, $\det(A) = \det\bigl(A(e)\bigr)$.

Замечание (ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ МАТЕРИАЛ). Пусть p_1, $p_2 \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим: $\sigma(k) = p_2 + k$ при $k = \overline{1, p_1}$; $\sigma(k) = -p_1 + k$ при $k = \overline{p_1 + 1, p_1 + p_2}$. Очевидно, $\sigma \in S_{p_1+p_2}$.

Утверждение (ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ МАТЕРИАЛ). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$.

1. Пусть: p_1, $q_1 \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_{p_1}^{q_1}$, p_2, $q_2 \in \mathbb{Z}_+$, $B \in (TL)_{p_2}^{q_2}$. *Обозначим:* $\sigma_1(k) = p_2 + k$ *при* $k = \overline{1, p_1}$; $\sigma_1(k) = -p_1 + k$ *при* $k = \overline{p_1 + 1, p_1 + p_2}$; $\sigma_2(k) = q_2 + k$ *при* $k = \overline{1, q_1}$; $\sigma_2(k) = -q_1 + k$ *при* $k = \overline{q_1 + 1, q_1 + q_2}$. *Тогда* $B \otimes A = [A \otimes B]_{\sigma_1}^{\sigma_2}$.

2. Пусть: p, $q \in \mathbb{Z}_+$, $A \in (TL)_p^q$, σ_1, $\sigma_3 \in S_p$, σ_2, $\sigma_4 \in S_q$. *Тогда* $\bigl[[A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\bigr]_{\sigma_3}^{\sigma_4} = [A]_{\sigma_3\sigma_1}^{\sigma_4\sigma_2}$.

Доказательство.

1. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{p_1+p_2}$, $j_1, \ldots, j_{q_1+q_2} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\begin{gathered}(B \otimes A)_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}(e) = B_{i_1,\ldots,i_{p_2}}^{j_1,\ldots,j_{q_2}}(e)A_{i_{p_2+1},\ldots,i_{p_2+p_1}}^{j_{q_2+1},\ldots,j_{q_2+q_1}}(e) = A_{i_{p_2+1},\ldots,i_{p_2+p_1}}^{j_{q_2+1},\ldots,j_{q_2+q_1}}(e)B_{i_1,\ldots,i_{p_2}}^{j_1,\ldots,j_{q_2}}(e) = \\ = A_{i_{\sigma_1(1)},\ldots,i_{\sigma_1(p_1)}}^{j_{\sigma_2(1)},\ldots,j_{\sigma_2(q_1)}}(e)B_{i_{\sigma_1(p_1+1)},\ldots,i_{\sigma_1(p_1+p_2)}}^{j_{\sigma_2(q_1+1)},\ldots,j_{\sigma_2(q_1+q_2)}}(e) = \bigl([A \otimes B]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\bigr)_{i_1,\ldots,i_{p_1+p_2}}^{j_1,\ldots,j_{q_1+q_2}}(e).\end{gathered}$$

2. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_p$, $j_1, \ldots, j_q = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\Big(\big[[A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\big]_{\sigma_3}^{\sigma_4}\Big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e) = \big([A]_{\sigma_1}^{\sigma_2}\big)_{i_{\sigma_3(1)},\ldots,i_{\sigma_3(p)}}^{j_{\sigma_4(1)},\ldots,j_{\sigma_4(q)}}(e) = A_{i_{\sigma_3(\sigma_1(1))},\ldots,i_{\sigma_3(\sigma_1(p))}}^{j_{\sigma_4(\sigma_2(1))},\ldots,j_{\sigma_4(\sigma_2(q))}}(e) =$$
$$= A_{i_{(\sigma_3\sigma_1)(1)},\ldots,i_{(\sigma_3\sigma_1)(p)}}^{j_{(\sigma_4\sigma_2)(1)},\ldots,j_{(\sigma_4\sigma_2)(q)}}(e) = \big([A]_{\sigma_3\sigma_1}^{\sigma_4\sigma_2}\big)_{i_1,\ldots,i_p}^{j_1,\ldots,j_q}(e). \quad \square$$

Определение (ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ МАТЕРИАЛ). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 3$, p_k, $q_k \in \mathbb{Z}_+$, $A_k \in (TL)_{p_k}^{q_k}$ при $k = \overline{1, r}$. Обозначим: $\tilde{p}_k = \sum\limits_{m=1}^{k} p_m$, $\tilde{q}_k = \sum\limits_{m=1}^{k} q_m$ при $k = \overline{1, r}$. Обозначим:

$$(A_1 \otimes \cdots \otimes A_r)_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}(e) = (A_1)_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}(e)(A_2)_{i_{\tilde{p}_1+1},\ldots,i_{\tilde{p}_2}}^{j_{\tilde{q}_1+1},\ldots,j_{\tilde{q}_2}}(e)\cdots(A_r)_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}(e)$$

при: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{\tilde{p}_r}$, $j_1, \ldots, j_{\tilde{q}_r} = \overline{1, N}$. Будем говорить, что $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r$ — прямое произведение тензоров $A_1, \ldots, A_r$.

Утверждение (ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ МАТЕРИАЛ). *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $N \in \mathbb{N}$, $\dim(L) = N$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 3$, p_k, $q_k \in \mathbb{Z}_+$, $A_k \in (TL)_{p_k}^{q_k}$ при $k = \overline{1, r}$. Тогда: $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r = (A_1 \otimes \cdots \otimes A_{r-1}) \otimes A_r$, $A_1 \otimes \cdots \otimes A_r = A_1 \otimes (A_2 \otimes \cdots \otimes A_r)$.*

Доказательство. Обозначим: $\tilde{p}_k = \sum\limits_{m=1}^{k} p_m$, $\tilde{q}_k = \sum\limits_{m=1}^{k} q_m$ при $k = \overline{1, r}$.

1. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{\tilde{p}_r}$, $j_1, \ldots, j_{\tilde{q}_r} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((A_1 \otimes \cdots \otimes A_{r-1}) \otimes A_r\big)_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}(e) =$$
$$= \Big((A_1)_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}(e)\cdots(A_{r-1})_{i_{\tilde{p}_{r-2}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_{r-1}}}^{j_{\tilde{q}_{r-2}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_{r-1}}}(e)\Big)(A_r)_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}(e) =$$
$$= (A_1)_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}(e)\cdots(A_r)_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}(e) = (A_1 \otimes \cdots \otimes A_r)_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}(e).$$

2. Пусть: e — базис пространства L, $i_1, \ldots, i_{\tilde{p}_r}$, $j_1, \ldots, j_{\tilde{q}_r} = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(A_1 \otimes (A_2 \otimes \cdots \otimes A_r)\big)_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}(e) = (A_1)_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}(e)\Big((A_2)_{i_{\tilde{p}_1+1},\ldots,i_{\tilde{p}_2}}^{j_{\tilde{q}_1+1},\ldots,j_{\tilde{q}_2}}(e)\cdots(A_r)_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}(e)\Big) =$$
$$= (A_1)_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_1}}^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_1}}(e)\cdots(A_r)_{i_{\tilde{p}_{r-1}+1},\ldots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_{\tilde{q}_{r-1}+1},\ldots,j_{\tilde{q}_r}}(e) = (A_1 \otimes \cdots \otimes A_r)_{i_1,\ldots,i_{\tilde{p}_r}}^{j_1,\ldots,j_{\tilde{q}_r}}(e). \quad \square$$

2.5. Возможные обобщения

1. Можно рассматривать не наборы чисел из поля $\mathbb{K}$, а наборы объектов более сложной природы. Например, базис e линейного пространства L можно интерпретировать как тензор порядка $\binom{0}{1}$.

2. Можно рассматривать геометрические объекты, определённые не для всех базисов линейного пространства.

3. Можно рассматривать геометрические объекты, у которых разные индексы относятся к разным пространствам. Например, матрицу линейного оператора $A\colon L_1 \implies L_2$ можно интерпретировать как тензор порядка $\binom{0}{1}$ в пространстве L_1 и тензор порядка $\binom{1}{0}$ в пространстве L_2.

4. Можно рассматривать тензоры, у которых по крайней мере часть индексов преобразуется с помощью матриц $\big\{\overline{\alpha_{i'}^{i}(e, e')}\big\}_{i'=\overline{1,N}}^{i=\overline{1,N}}$, $\big\{\overline{\alpha_{i}^{i'}(e', e)}\big\}_{i=\overline{1,N}}^{i'=\overline{1,N}}$ (здесь: $\overline{z} = \mathrm{Re}(z) - i\,\mathrm{Im}(z)$ при $z \in \mathbb{C}$). Например, матрица полуторалинейной формы преобразуется по закону: $A_{i'j'}(e') = A_{ij}(e)\overline{\alpha_{i'}^{i}(e, e')}\alpha_{j'}^{j}(e, e')$ при i', $j' = \overline{1, N}$.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[4] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[5] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.