Линейная алгебра

Бадьин А. В.

Лекция 1. Подпространства линейных пространств

1.1. Операции над множествами векторов

Определение (ПОВТОРЕНИЕ). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq L$. Обозначим:

$$Q_1 + Q_2 = \{x_1 + x_2 \colon x_1 \in Q_1 \wedge x_2 \in Q_2\} = \big\{u \colon \exists x_1 \exists x_2 (x_1 \in Q_1 \wedge x_2 \in Q_2 \wedge u = x_1 + x_2)\big\}.$$

Очевидно, $Q_1 + Q_2 \subseteq L$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $Q \subseteq L$. Обозначим:

$$\lambda Q = \{\lambda x \colon x \in Q\} = \big\{u \colon \exists x (x \in Q \wedge u = \lambda x)\big\}.$$

Очевидно, $\lambda Q \subseteq L$.

Очевидно, $\{\theta\} \subseteq L$.

Рассмотрим множество $P(L)$ (здесь $P(L) = \{Q \colon Q \subseteq L\}$, иными словами, $P(L)$ есть множество всех подмножеств множества L). Обозначим: $F_1(Q_1, Q_2) = Q_1 + Q_2$ при Q_1, $Q_2 \in P(L)$. Будем говорить, что F_1 — стандартная операция сложения на множестве $P(L)$. Обозначим: $F_2(\lambda, Q) = \lambda Q$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, $Q \in P(L)$. Будем говорить, что F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $P(L)$. Будем говорить, что $\{\theta\}$ — стандартный нулевой элемент множества $P(L)$.

Утверждение (ПОВТОРЕНИЕ). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$.

1. *Пусть* Q_1, $Q_2 \subseteq L$. *Тогда* $Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_1$.
2. *Пусть* Q_1, Q_2, $Q_3 \subseteq L$. *Тогда* $(Q_1 + Q_2) + Q_3 = Q_1 + (Q_2 + Q_3)$.
3. *Пусть* $Q \subseteq L$. *Тогда* $Q + \{\theta\} = Q$.
4. *Пусть:* α, $\beta \in \mathbb{K}$, $Q \subseteq L$. *Тогда* $(\alpha\beta)Q = \alpha(\beta Q)$.
5. *Пусть* $Q \subseteq L$. *Тогда* $1Q = Q$.
6. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$, Q_1, $Q_2 \subseteq L$. *Тогда* $\lambda(Q_1 + Q_2) = \lambda Q_1 + \lambda Q_2$.
7. *Справедливо утверждение* $0\varnothing = \varnothing$. *Пусть:* $Q \subseteq L$, $Q \neq \varnothing$. *Тогда* $0Q = \{\theta\}$.
8. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Тогда* $\lambda\{\theta\} = \{\theta\}$.

Доказательство.

1. Пусть $x \in Q_1 + Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Следовательно:

$$x = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \in Q_2 + Q_1.$$

Пусть $x \in Q_2 + Q_1$. Тогда существуют векторы x_2, x_1, удовлетворяющие условиям: $x_2 \in Q_2$, $x_1 \in Q_1$, $x = x_2 + x_1$. Следовательно:

$$x = x_2 + x_1 = x_1 + x_2 \in Q_1 + Q_2.$$

Итак, $Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_1$.

2. Пусть $x \in (Q_1 + Q_2) + Q_3$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_3 \in Q_3$, $x = (x_1 + x_2) + x_3$. Следовательно:

$$x = (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3) \in Q_1 + (Q_2 + Q_3).$$

Пусть $x \in Q_1 + (Q_2 + Q_3)$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_3 \in Q_3$, $x = x_1 + (x_2 + x_3)$. Следовательно:

$$x = x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3 \in (Q_1 + Q_2) + Q_3.$$

Итак, $(Q_1 + Q_2) + Q_3 = Q_1 + (Q_2 + Q_3)$.

3. Пусть $x \in Q + \{\theta\}$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = x_1 + \theta$. Следовательно:

$$x = x_1 + \theta = x_1 \in Q.$$

Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$x = x + \theta \in Q + \{\theta\}.$$

Итак, $Q + \{\theta\} = Q$.

4. Пусть $x \in (\alpha\beta)Q$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = (\alpha\beta)x_1$. Следовательно:

$$x = (\alpha\beta)x_1 = \alpha(\beta x_1) \in \alpha(\beta Q).$$

Пусть $x \in \alpha(\beta Q)$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = \alpha(\beta x_1)$. Следовательно:

$$x = \alpha(\beta x_1) = (\alpha\beta)x_1 \in (\alpha\beta)Q.$$

Итак, $(\alpha\beta)Q = \alpha(\beta Q)$.

5. Пусть $x \in 1Q$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = 1x_1$. Следовательно:

$$x = 1x_1 = x_1 \in Q.$$

Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$x = 1x \in 1Q.$$

Итак, $1Q = Q$.

6. Пусть $x \in \lambda(Q_1 + Q_2)$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = \lambda(x_1 + x_2)$. Следовательно:

$$x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in \lambda Q_1 + \lambda Q_2.$$

Пусть $x \in \lambda Q_1 + \lambda Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q$, $x_2 \in Q_2$, $x = \lambda x_1 + \lambda x_2$. Следовательно:

$$x = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2) \in \lambda(Q_1 + Q_2).$$

Итак, $\lambda(Q_1 + Q_2) = \lambda Q_1 + \lambda Q_2$.

7. Очевидно, $0\varnothing = \varnothing$. Пусть: $Q \subseteq L$, $Q \neq \varnothing$. Пусть $x \in 0Q$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = 0x_1$. Следовательно:

$$x = 0x_1 = \theta \in \{\theta\}.$$

Пусть $x \in \{\theta\}$. Тогда $x = \theta$. Так как $Q \neq \varnothing$, то существует вектор x_1, удовлетворяющий условию $x_1 \in Q$. Тогда:

$$x = \theta = 0x_1 \in 0Q.$$

Итак, $0Q = \{\theta\}$.

8. Пусть $x \in \lambda\{\theta\}$. Тогда $x = \lambda\theta$. Следовательно:

$$x = \lambda\theta = \theta \in \{\theta\}.$$

Пусть $x \in \{\theta\}$. Тогда $x = \theta$. Следовательно:

$$x = \theta = \lambda\theta \in \lambda\{\theta\}. \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r \subseteq L$. *Тогда:*

$$\begin{aligned} Q_1 + \cdots + Q_r = \{x_1 + \cdots + x_r \colon x_1 \in Q_1 \wedge \cdots \wedge x_r \in Q_r\} = \\ = \big\{u \colon \exists x_1 \cdots \exists x_r (x_1 \in Q_1 \wedge \cdots \wedge x_r \in Q_r \wedge u = x_1 + \cdots + x_r)\big\}. \end{aligned}$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; *$L$ — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$.

1. Пусть Q_1, Q_2 — подпространства пространства L. Тогда $Q_1 + Q_2$ — подпространство пространства L.

2. Пусть: $r_1 \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_{r_1} \in L$, $r_2 \in \mathbb{N}$, $y_1, \ldots, y_{r_2} \in L$. *Тогда:*

$$L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2}) = L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2}).$$

3. Пусть Q_1, Q_2 — подпространства пространства L. Тогда Q_1, $Q_2 \subseteq Q_1 + Q_2$.

4. Пусть: Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, $\dim(Q_1) = +\infty \vee \dim(Q_2) = +\infty$. *Тогда* $\dim(Q_1 + Q_2) = +\infty$.

5. Пусть Q_1, Q_2 — подпространства пространства L. Тогда $\dim(Q_1 + Q_2) \leqslant \dim(Q_1) + \dim(Q_2)$.

6. Пусть: Q_1 — подпространство пространства L, $Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_2 \neq \varnothing$. Тогда $Q_1 + Q_2 = Q_1$.

Доказательство.

1. Очевидно, $Q_1 + Q_2 \subseteq L$. Так как Q_1, $Q_2 \neq \varnothing$, то $Q_1 + Q_2 \neq \varnothing$.

Пусть x, $y \in Q_1 + Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, y_1, y_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$, $y_1 \in Q_1$, $y_2 \in Q_2$, $y = y_1 + y_2$. Следовательно:

$$x + y = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) \in Q_1 + Q_2.$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q_1 + Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Следовательно:

$$\lambda x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in Q_1 + Q_2.$$

Итак, $Q_1 + Q_2$ — подпространство пространства L.

2. Пусть $u \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2})$. Тогда существуют векторы u_1, u_2, удовлетворяющие условиям: $u_1 \in L(x_1, \ldots, x_{r_1})$, $u_2 \in L(y_1, \ldots, y_{r_2})$, $u = u_1 + u_2$. Так как $u_1 \in L(x_1, \ldots, x_{r_1})$, то существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $u_1 = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}$. Так как $u_2 \in L(y_1, \ldots, y_{r_2})$, то существуют числа $\beta^1, \ldots, \beta^{r_2} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $u_2 = \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}$. Тогда:

$$u = u_1 + u_2 = (\alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}) + (\beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}) =$$
$$= \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2} \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2}).$$

Пусть $u \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2})$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_1}$, $\beta^1, \ldots, \beta^{r_2} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $u = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}$. Следовательно:

$$u = \alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1} + \beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2} =$$
$$= (\alpha^1 x_1 + \cdots + \alpha^{r_1} x_{r_1}) + (\beta^1 y_1 + \cdots + \beta^{r_2} y_{r_2}) \in L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2}).$$

Итак, $L(x_1, \ldots, x_{r_1}) + L(y_1, \ldots, y_{r_2}) = L(x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2})$.

3. Пусть $x \in Q_1$. Так как $\theta \in Q_2$, то: $x = x + \theta \in Q_1 + Q_2$. Итак, $Q_1 \subseteq Q_1 + Q_2$.

Пусть $x \in Q_2$. Так как $\theta \in Q_1$, то: $x = \theta + x \in Q_1 + Q_2$. Итак, $Q_2 \subseteq Q_1 + Q_2$.

4. Обозначим: $N_1 = \dim(Q_1)$, $N_2 = \dim(Q_2)$. Тогда: N_1, $N_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, $N_1 = +\infty \vee N_2 = +\infty$. Пусть $N_1 = +\infty$. Так как $Q_1 \subseteq Q_1 + Q_2$, то: $\dim(Q_1 + Q_2) \geqslant N_1 = +\infty$. Тогда $\dim(Q_1 + Q_2) = +\infty$.

Пусть $N_2 = +\infty$. Так как $Q_2 \subseteq Q_1 + Q_2$, то: $\dim(Q_1 + Q_2) \geqslant N_2 = +\infty$. Тогда $\dim(Q_1 + Q_2) = +\infty$.

5. Обозначим: $N_1 = \dim(Q_1)$, $N_2 = \dim(Q_2)$. Тогда N_1, $N_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Пусть $N_1 = +\infty$. Тогда:

$$\dim(Q_1 + Q_2) = +\infty = +\infty + N_2 = N_1 + N_2.$$

Пусть $N_2 = +\infty$. Тогда:

$$\dim(Q_1 + Q_2) = +\infty = N_1 + (+\infty) = N_1 + N_2.$$

Пусть $N_1 = 0$. Тогда $Q_1 = \{\theta\}$. Следовательно:

$$\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_2) = N_1 + \dim(Q_2) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2).$$

Пусть $N_2 = 0$. Тогда $Q_2 = \{\theta\}$. Следовательно:

$$\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1) = \dim(Q_1) + N_2 = \dim(Q_1) + \dim(Q_2).$$

Пусть N_1, $N_2 \notin \{0, +\infty\}$. Тогда N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$. Следовательно, существуют векторы $e_1, \ldots, e_{N_1}$, $f_1, \ldots, f_{N_2}$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \ldots, e_{N_1}$ — базис подпространства Q_1, $f_1, \ldots, f_{N_2}$ — базис подпространства Q_2. Тогда:

$$\dim(Q_1 + Q_2) = \dim\bigl(L(e_1, \ldots, e_{N_1}) + L(f_1, \ldots, f_{N_2})\bigr) = \dim\bigl(L(e_1, \ldots, e_{N_1}, f_1, \ldots, f_{N_2})\bigr) =$$
$$= \operatorname{rank}\bigl(\{e_1, \ldots, e_{N_1}, f_1, \ldots, f_{N_2}\}\bigr) \leqslant N_1 + N_2.$$

6. Пусть $x \in Q_1 + Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Так как: $x_2 \in Q_2$, $Q_2 \subseteq Q_1$, то $x_2 \in Q_1$. Тогда: $x = x_1 + x_2 \in Q_1$.

Пусть $x \in Q_1$. Так как $Q_2 \neq \varnothing$, то существует вектор x_2, удовлетворяющий условию $x_2 \in Q_2$. Так как $Q_2 \subseteq Q_1$, то $x_2 \in Q_1$. Тогда: $x = \bigl(x + (-1)x_2\bigr) + x_2 \in Q_1 + Q_2$. Итак, $Q_1 + Q_2 = Q_1$ □

1.2. Линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств

Определение (линейно независимые подпространства, прямая сумма подпространств). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L.

1. Будем говорить, что $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, если:

$$\forall x_1 \in Q_1 \cdots \forall x_r \in Q_r \big(x_1 + \cdots + x_r = \theta \implies x_1 = \theta \wedge \cdots \wedge x_r = \theta\big).$$

2. Пусть $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. Будем говорить, что $Q_1 + \cdots + Q_r$ — прямая сумма подпространств $Q_1, \ldots, Q_r$. Обозначим, $Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_r = Q_1 + \cdots + Q_r$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства L. Очевидно, Q — линейно независимое подпространство.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_r$ *— подпространства пространства* L*. Подпространства* $Q_1, \ldots, Q_r$ *линейно независимы тогда и только тогда, когда:*

$$\forall x_1 \in Q_1 \cdots \forall x_r \in Q_r \forall y_1 \in Q_1 \cdots \forall y_r \in Q_r$$
$$\big(x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r \implies x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_r = y_r\big).$$

Доказательство. Пусть $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $y_1 \in Q_1, \ldots, y_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r$. Тогда: $x_1 - y_1 \in Q_1, \ldots, x_r - y_r \in Q_r$, $(x_1 - y_1) + \cdots + (x_r - y_r) = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то: $x_1 - y_1 = \theta, \ldots, x_r - y_r = \theta$. Тогда: $x_1 = y_1, \ldots, x_r = y_r$.

Пусть:

$$\forall x_1 \in Q_1 \cdots \forall x_r \in Q_r \forall y_1 \in Q_1 \cdots \forall y_r \in Q_r$$
$$\big(x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r \implies x_1 = y_1 \wedge \cdots \wedge x_r = y_r\big).$$

Пусть: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = \theta$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — подпространства пространства L, то: $\theta \in Q_1, \ldots, \theta \in Q_r$. Обозначим, $y_1, \ldots, y_r = \theta$. Тогда: $y_1 \in Q_1, \ldots, y_r \in Q_r$, $y_1 + \cdots + y_r = \theta$. Следовательно: $x_1 \in Q_1, \ldots, x_r \in Q_r$, $y_1 \in Q_1, \ldots, y_r \in Q_r$, $x_1 + \cdots + x_r = y_1 + \cdots + y_r$. Тогда: $x_1 = y_1, \ldots, x_r = y_r$. Следовательно, $x_1, \ldots, x_r = \theta$. Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1, Q_2 *— подпространства пространства* L*. Подпространства* Q_1, Q_2 *линейно независимы тогда и только тогда, когда* $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$*.*

Доказательство. Пусть Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства. Так как Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, то: $\theta \in Q_1$, $\theta \in Q_2$. Тогда $\theta \in Q_1 \cap Q_2$. Пусть $x \in Q_1 \cap Q_2$. Тогда: $x \in Q_1$, $x \in Q_2$. Следовательно: $x \in Q_1$, $(-1)x \in Q_2$, $x + (-1)x = \theta$. Так как Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства, то $x = \theta$. Итак, $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$.

Пусть $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$. Пусть: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_1 + x_2 = \theta$. Тогда: $x_1 \in Q_1$, $x_1 = (-1)x_2 \in Q_2$; $x_2 = (-1)x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$. Следовательно: $x_1 \in Q_1 \cap Q_2$, $x_2 \in Q_1 \cap Q_2$. Так как $Q_1 \cap Q_2 = \{\theta\}$, то: $x_1 = \theta$, $x_2 = \theta$. Итак, Q_1, Q_2 — линейно независимые подпространства. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$.

1. Пусть: $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L, $\sigma \in S_r$. Тогда $Q_{\sigma(1)}, \dots, Q_{\sigma(r)}$ — линейно независимые подпространства.

2. Пусть: $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L, $r_0 \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_{r_0} = \overline{1, r}$, $k_1 < \dots < k_{r_0}$. Тогда $Q_{k_1}, \dots, Q_{k_{r_0}}$ — линейно независимые подпространства.

3. Пусть: $r_0 \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_{r_0} = \overline{1, r}$, $k_1 < \dots < k_{r_0}$, $Q_{k_1}, \dots, Q_{k_{r_0}}$ — линейно независимые подпространства пространства L, $Q_m = \{\theta\}$ при: $m = \overline{1, r}$, $m \notin \{k_1, \dots, k_{r_0}\}$. Тогда $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Доказательство.

1. Пусть: $x_1 \in Q_{\sigma(1)}, \dots, x_r \in Q_{\sigma(r)}$, $x_1 + \dots + x_r = \theta$. Тогда: $x_{\sigma^{-1}(1)} \in Q_1, \dots, x_{\sigma^{-1}(r)} \in Q_r$, $x_{\sigma^{-1}(1)} + \dots + x_{\sigma^{-1}(r)} = \theta$. Так как $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(r)} = \theta$. Тогда $x_1, \dots, x_r = \theta$. Итак, $Q_{\sigma(1)}, \dots, Q_{\sigma(r)}$ — линейно независимые подпространства.

2. Пусть: $x_1 \in Q_{k_1}, \dots, x_{r_0} \in Q_{k_{r_0}}$, $x_1 + \dots + x_{r_0} = \theta$. Пусть: $m = \overline{1, r}$, $m \notin \{k_1, \dots, k_{r_0}\}$. Так как Q_m — подпространство пространства L, то $\theta \in Q_m$. Обозначим: $y_{k_1} = x_1, \dots, y_{k_{r_0}} = x_{r_0}$, $y_m = \theta$ при: $m = \overline{1, r}$, $m \notin \{k_1, \dots, k_{r_0}\}$. Тогда: $y_1 \in Q_1, \dots, y_r \in Q_r$, $y_1 + \dots + y_r = \theta$. Так как $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $y_{k_1}, \dots, y_{k_{r_0}} = \theta$. Тогда $x_1, \dots, x_{r_0} = \theta$. Итак, $Q_{k_1}, \dots, Q_{k_{r_0}}$ — линейно независимые подпространства.

3. Пусть: $x_1 \in Q_1, \dots, x_r \in Q_r$, $x_1 + \dots + x_r = \theta$. Пусть: $m = \overline{1, r}$, $m \notin \{k_1, \dots, k_{r_0}\}$. Так как: $x_m \in Q_m$, $Q_m = \{\theta\}$, то $x_m = \theta$. Тогда: $x_{k_1} \in Q_{k_1}, \dots, x_{k_{r_0}} \in Q_{k_{r_0}}$, $x_{k_1} + \dots + x_{k_{r_0}} = \theta$. Так как $Q_{k_1}, \dots, Q_{k_{r_0}}$ — линейно независимые подпространства, то $x_{k_1}, \dots, x_{k_{r_0}} = \theta$. Итак, $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. $\square$

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $k_0 = \overline{1, r}$, Q_{k_0} — подпространство пространства L, $Q_m = \{\theta\}$ при: $m = \overline{1, r}$, $m \neq k_0$. Так как Q_{k_0} — линейно независимое подпространство, то $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $N_1, \dots, N_r \in \mathbb{N}$.*

1. Пусть: $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L; $x_{k,1}, \dots, x_{k,N_k}$ — линейно независимые векторы подпространства Q_k при $k = \overline{1, r}$. Тогда $x_{1,1}, \dots, x_{1,N_1}, \dots, x_{r,1}, \dots, x_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы подпространства $Q_1 + \dots + Q_r$.

2. Пусть: $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L; $e_{k,1}, \dots, e_{k,N_k}$ — базис подпространства Q_k при $k = \overline{1, r}$. Тогда $e_{1,1}, \dots, e_{1,N_1}, \dots, e_{r,1}, \dots, e_{r,N_r}$ — базис подпространства $Q_1 + \dots + Q_r$.

3. Пусть: $e_{1,1}, \dots, e_{1,N_1}, \dots, e_{r,1}, \dots, e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы пространства L; $Q_k = L(e_{k,1}, \dots, e_{k,N_k})$ при $k = \overline{1, r}$. Тогда $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Доказательство.

1. Пусть: $k = \overline{1, r}$, $m = \overline{1, N_k}$. Тогда: $x_{k,m} \in Q_k \subseteq Q_1 + \dots + Q_r$. Пусть: $\alpha^{k,m} \in \mathbb{K}$ при: $k = \overline{1, r}$, $m = \overline{1, N_k}$; $\sum\limits_{\substack{k = \overline{1, r}, \\ m = \overline{1, N_k}}} \alpha^{k,m} x_{k,m} = \theta$. Тогда: $\sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} x_{k,m} \in Q_k$ при $k = \overline{1, r}$; $\sum\limits_{k=1}^{r} \sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} x_{k,m} = \theta$. Так как $Q_1, \dots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то: $\sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} x_{k,m} = \theta$ при

$k = \overline{1,r}$. Пусть $k = \overline{1,r}$. Так как: $\sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} x_{k,m} = \theta$, $x_{k,1}, \ldots, x_{k,N_k}$ — линейно независимые векторы, то: $\alpha^{k,m} = 0$ при $m = \overline{1,N_k}$. Итак, $x_{1,1}, \ldots, x_{1,N_1}, \ldots, x_{r,1}, \ldots, x_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы.

2. Так как: $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства пространства L; $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$ — линейно независимые векторы подпространства Q_k при $k = \overline{1,r}$, то $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы. Очевидно:

$$Q_1 + \cdots + Q_r = L(e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}) + \cdots + L(e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}) = \\ = L(e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}).$$

Тогда $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — базис подпространства $Q_1 + \cdots + Q_r$.

3. Пусть: $x_k \in Q_k$ при $k = \overline{1,r}$; $\sum\limits_{k=1}^{r} x_k = \theta$. Пусть $k = \overline{1,r}$. Так как $x_k \in Q_k$, то существуют числа $\alpha^{k,1}, \ldots, \alpha^{k,N_k} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $x_k = \sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} e_{k,m}$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{r} \sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} e_{k,m} = \theta$. Следовательно, $\sum\limits_{\substack{k=\overline{1,r}, \\ m=\overline{1,N_k}}} \alpha^{k,m} e_{k,m} = \theta$. Так как $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы, то: $\alpha^{k,m} = 0$ при: $k = \overline{1,r}$, $m = \overline{1,N_k}$. Тогда: $x_k = \sum\limits_{m=1}^{N_k} \alpha^{k,m} e_{k,m} = \theta$ при $k = \overline{1,r}$. Итак, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— подпространства пространства* L*,* $\dim(Q_k) \in \mathbb{N}$ *при* $k = \overline{1,r}$*.*

1. Пусть $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства. Тогда* $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r)$*.*

2. Пусть $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r)$*. Тогда* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства.*

Доказательство. Пусть $k = \overline{1,r}$. Обозначим, $N_k = \dim(Q_k)$. Тогда $N_k \in \mathbb{N}$. Следовательно, существуют векторы $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$, удовлетворяющие условию: $e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k}$ — базис подпространства Q_k.

1. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — базис подпространства $Q_1 + \cdots + Q_r$. Тогда $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = N_1 + \cdots + N_r$.

2. Предположим, что $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — линейно зависимые векторы. Тогда:

$$\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim\bigl(L(e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}) + \cdots + L(e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r})\bigr) = \\ = \dim\bigl(L(e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r})\bigr) = \operatorname{rank}\bigl(\{e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}\}\bigr) < \\ < N_1 + \cdots + N_r.$$

Итак, $e_{1,1}, \ldots, e_{1,N_1}, \ldots, e_{r,1}, \ldots, e_{r,N_r}$ — линейно независимые векторы. Так как: $Q_k = L(e_{k,1}, \ldots, e_{k,N_k})$ при $k = \overline{1,r}$, то $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— подпространства пространства* L*.*

1. Пусть $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства. Тогда* $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r)$*.*

2. Пусть: $\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_1) + \cdots + \dim(Q_r)$, $\dim(Q_k) \neq +\infty$ *при* $k = \overline{1,r}$. *Тогда* $Q_1, \ldots, Q_r$ *— линейно независимые подпространства.*

Доказательство.

1. Пусть $k = \overline{1,r}$. Обозначим, $N_k = \dim(Q_k)$. Тогда $N_k \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Пусть $\exists k = \overline{1,r}(N_k = +\infty)$. Тогда:

$$\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = +\infty = N_1 + \cdots + N_r.$$

Пусть $\forall k = \overline{1,r}(N_k = 0)$. Тогда $\forall k = \overline{1,r}\big(Q_k = \{\theta\}\big)$. Следовательно:

$$\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim\big(\{\theta\}\big) = 0 = N_1 + \cdots + N_r.$$

Пусть: $\forall k = \overline{1,r}(N_k \neq +\infty)$, $\exists k = \overline{1,r}(N_k \neq 0)$. Тогда существует число $r_0 = \overline{1,r}$, существуют числа $k_1, \ldots, k_{r_0} = \overline{1,r}$, удовлетворяющие условиям: $k_1 < \cdots < k_{r_0}$, $N_{k_1}, \ldots, N_{k_{r_0}} \notin \{0, +\infty\}$, $N_m = 0$ при: $m = \overline{1,r}$, $m \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Так как $N_{k_1}, \ldots, N_{k_{r_0}} \notin \{0, +\infty\}$, то $N_{k_1}, \ldots, N_{k_{r_0}} \in \mathbb{N}$. Так как $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства, то $Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_{r_0}}$ — линейно независимые подпространства. Тогда $\dim(Q_{k_1} + \cdots + Q_{k_{r_0}}) = N_{k_1} + \cdots + N_{k_{r_0}}$. Так как: $N_m = 0$ при: $m = \overline{1,r}$, $m \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$, то: $Q_m = \{\theta\}$ при: $m = \overline{1,r}$, $m \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Тогда:

$$\dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = \dim(Q_{k_1} + \cdots + Q_{k_{r_0}}) = N_{k_1} + \cdots + N_{k_{r_0}} = N_1 + \cdots + N_r.$$

2. Пусть $k = \overline{1,r}$. Обозначим, $N_k = \dim(Q_k)$. Тогда: $N_k \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, $N_k \neq +\infty$. Следовательно, $N_k \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $\forall k = \overline{1,r}(N_k = 0)$. Тогда $\forall k = \overline{1,r}\big(Q_k = \{\theta\}\big)$. Следовательно, $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

Пусть $\exists k = \overline{1,r}(N_k \neq 0)$. Тогда существует число $r_0 = \overline{1,r}$, существуют числа $k_1, \ldots, k_{r_0} = \overline{1,r}$, удовлетворяющие условиям: $k_1 < \cdots < k_{r_0}$, $N_{k_1}, \ldots, N_{k_{r_0}} \neq 0$, $N_m = 0$ при: $m = \overline{1,r}$, $m \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Так как $N_{k_1}, \ldots, N_{k_{r_0}} \neq 0$, то $N_{k_1}, \ldots, N_{k_{r_0}} \in \mathbb{N}$. Так как: $N_m = 0$ при: $m = \overline{1,r}$, $m \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$, то: $Q_m = \{\theta\}$ при: $m = \overline{1,r}$, $m \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Тогда:

$$\dim(Q_{k_1} + \cdots + Q_{k_{r_0}}) = \dim(Q_1 + \cdots + Q_r) = N_1 + \cdots + N_r = N_{k_1} + \cdots + N_{k_{r_0}}.$$

Следовательно, $Q_{k_1}, \ldots, Q_{k_{r_0}}$ — линейно независимые подпространства. Так как: $Q_m = \{\theta\}$ при: $m = \overline{1,r}$, $m \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$, то $Q_1, \ldots, Q_r$ — линейно независимые подпространства.

1.3. Линейное дополнение одного подпространства до другого

Утверждение (ПОВТОРЕНИЕ)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1, Q_2 *— подпространства пространства* L, $Q_1 \subseteq Q_2$, $\dim(Q_1) = \dim(Q_2)$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$. *Тогда* $Q_1 = Q_2$.

Доказательство. Обозначим, $N = \dim(Q_2)$. Тогда: $N \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, $\dim(Q_1) = N$, $N \neq +\infty$. Следовательно: $N \in \mathbb{Z}_+$, $\dim(Q_1) = N$.

Пусть $N = 0$. Так как $\dim(Q_1)$, $\dim(Q_2) = N$, то Q_1, $Q_2 = \{\theta\}$. Тогда $Q_1 = Q_2$.

Пусть $N \neq 0$. Тогда $N \in \mathbb{N}$. Так как $\dim(Q_1) = N$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_N$, удовлетворяющие условиям: $e_1, \ldots, e_N \in Q_1$, $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы. Так как $\dim(Q_1) = N$, то $e_1, \ldots, e_N$ — базис подпространства Q_1. Так как: $e_1, \ldots, e_N \in Q_1$, $Q_1 \subseteq Q_2$, то $e_1, \ldots, e_N \in Q_2$. Так как: $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы, $\dim(Q_2) = N$, то $e_1, \ldots, e_N$ — базис подпространства Q_2. Тогда: $Q_1 = L(e_1, \ldots, e_N) = Q_2$. □

Определение (линейное дополнение одного подпространства до другого). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q_1, Q_2 — подпространства пространства L. Будем говорить, что D — линейное дополнение подпространства Q_1 до подпространства Q_2, если: D — подпространство пространства L, $Q_2 = Q_1 + D$; Q_1, D — линейно независимые подпространства.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q_1, Q_2 — подпространства пространства L, D — линейное дополнение подпространства Q_1 до подпространства Q_2.

Так как: Q_1, D — подпространства пространства L, $Q_2 = Q_1 + D$, то $D \subseteq Q_2$.

Так как Q_1, D — линейно независимые подпространства, то $Q_1 \cap D = \{\theta\}$.

Так как: Q_1, D — линейно независимые подпространства, $Q_2 = Q_1 + D$, то $\dim(Q_2) = \dim(Q_1) + \dim(D)$.

Очевидно, Q_1 — линейное дополнение подпространства D до подпространства Q_2.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; Q_1, Q_2 *— подпространства пространства* L, $Q_1 \subseteq Q_2$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$. *Тогда существует линейное дополнение* D *подпространства* Q_1 *до подпространства* Q_2.

Доказательство. Обозначим: $N_1 = \dim(Q_1)$, $N_2 = \dim(Q_2)$. Тогда: N_1, $N_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$, $N_1 \leqslant N_2$, $N_2 \neq +\infty$. Следовательно: N_1, $N_2 \in \mathbb{Z}_+$, $N_1 \leqslant N_2$.

Пусть $N_1 = 0$. Тогда $Q_1 = \{\theta\}$. Обозначим, $D = Q_2$. Тогда: D — подпространство пространства L, $Q_1 + D = \{\theta\} + Q_2 = Q_2$. Так как $Q_1 = \{\theta\}$, то Q_1, D — линейно независимые подпространства.

Пусть $N_1 = N_2$. Так как: $Q_1 \subseteq Q_2$, $N_2 \neq +\infty$, то $Q_1 = Q_2$. Обозначим, $D = \{\theta\}$. Тогда: D — подпространство пространства L, $Q_1 + D = Q_2 + \{\theta\} = Q_2$. Так как $D = \{\theta\}$, то Q_1, D — линейно независимые подпространства.

Пусть $N_1 \notin \{0, N_2\}$. Тогда: N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2$. Так как $N_1 \in \mathbb{N}$, то существуют векторы $e_1, \ldots, e_{N_1}$, удовлетворяющие условию: $e_1, \ldots, e_{N_1}$ — базис подпространства Q_1. Так как: $Q_1 \subseteq Q_2$, N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, $N_1 < N_2$, то существуют векторы $e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2}$, удовлетворяющие условию: $e_1, \ldots, e_{N_2}$ — базис подпространства Q_2. Обозначим, $D = L(e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2})$. Тогда: D — подпространство пространства L,

$$Q_1 + D = L(e_1, \ldots, e_{N_1}) + L(e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2}) = L(e_1, \ldots, e_{N_2}) = Q_2.$$

Так как: $e_1, \ldots, e_{N_2}$ — линейно независимые векторы, $Q_1 = L(e_1, \ldots, e_{N_1})$, $D = L(e_{N_1+1}, \ldots, e_{N_2})$, то Q_1, D — линейно независимые подпространства. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; Q_1, Q_2 *— подпространства пространства* L, D *— линейное дополнение подпространства* $Q_1 \cap Q_2$ *до подпространства* Q_2. *Тогда* D *— линейное дополнение подпространства* Q_1 *до подпространства* $Q_1 + Q_2$.

Доказательство. Так как D — линейное дополнение подпространства $Q_1 \cap Q_2$ до подпространства Q_2, то: $D \subseteq Q_2$, $(Q_1 \cap Q_2) \cap D = \{\theta\}$.

Так как: Q_1 — подпространство пространства L, $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_1 \cap Q_2 \neq \varnothing$, то $Q_1 + Q_1 \cap Q_2 = Q_1$. Тогда:

$$Q_1 + Q_2 = Q_1 + (Q_1 \cap Q_2 + D) = (Q_1 + Q_1 \cap Q_2) + D = Q_1 + D.$$

Так как $D \subseteq Q_2$, то $Q_2 \cap D = D$. Тогда:

$$Q_1 \cap D = Q_1 \cap (Q_2 \cap D) = (Q_1 \cap Q_2) \cap D = \{\theta\}.$$

Следовательно, Q_1, D — линейно независимые подпространства. Итак, D — линейное дополнение подпространства Q_1 до подпространства $Q_1 + Q_2$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*; L — линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*; Q_1, Q_2 — подпространства пространства L,* $\dim(Q_2) \neq +\infty$*. Тогда* $\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2) - \dim(Q_1 \cap Q_2)$.

Доказательство. Так как: $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q_2$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$, то $\dim(Q_1 \cap Q_2) \neq +\infty$.

Так как: $Q_1 \cap Q_2 \subseteq Q_2$, $\dim(Q_2) \neq +\infty$, то существует линейное дополнение D подпространства $Q_1 \cap Q_2$ до подпространства Q_2. Тогда $\dim(Q_2) = \dim(Q_1 \cap Q_2) + \dim(D)$. Следовательно, $\dim(D) = \dim(Q_2) - \dim(Q_1 \cap Q_2)$.

Так как D — линейное дополнение подпространства $Q_1 \cap Q_2$ до подпространства Q_2, то D — линейное дополнение подпространства Q_1 до подпространства $Q_1 + Q_2$. Тогда $\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1) + \dim(D)$. Следовательно, $\dim(Q_1 + Q_2) = \dim(Q_1) + \dim(Q_2) - \dim(Q_1 \cap Q_2)$. □

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[4] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[5] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[6] *Ким Г. Д., Крицков Л. В.* Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том II, часть 1, 2.