Задачи по курсу «Аналитическая геометрия»

1.

1.1. **Используя метод Гаусса**, вычислить определитель.
$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 9 & -2 & -7 \\ -3 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

1.2. **Используя метод Гаусса**, вычислить определитель.
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & 9 & 2 & -7 \\ -3 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

1.3. **Используя метод Гаусса**, вычислить определитель.
$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 9 & -2 & -7 \\ -3 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

1.4. **Используя метод Гаусса**, вычислить определитель.
$$\begin{vmatrix} -2 & -4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 9 & -2 & 7 \\ -3 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

1.5. **Используя метод Гаусса**, вычислить определитель.
$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

1.6. **Используя метод Гаусса**, вычислить определитель.
$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -6 & 0 \\ 3 & 9 & -2 & 7 \\ -3 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

1.7. **Используя метод Гаусса**, вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 0 \\ 3 & 9 & -2 & 7 \\ -3 & -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

1.8. **Используя метод Гаусса**, вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 9 & 3 & 7 \\ -3 & -2 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

1.9. **Используя метод Гаусса**, вычислить определитель.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 9 & 3 & 7 \\ -3 & -2 & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

2.

2.1. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3, x_4 по найденному базису.

$x_1 = (1, 0, 1)^T$, $x_2 = (5, 2, 3)^T$, $x_3 = (2, 1, 1)^T$, $x_4 = (4, 1, 3)^T$.

2.2. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3, x_4 по найденному базису.

$x_1 = (1, 1, 1)^T$, $x_2 = (5, 3, 7)^T$, $x_3 = (5, 4, 6)^T$, $x_4 = (2, 1, 3)^T$.

2.3. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3, x_4 по найденному базису.

$x_1 = (1, 0, 2)^T$, $x_2 = (3, 2, 8)^T$, $x_3 = (1, 1, 3)^T$, $x_4 = (2, -1, 3)^T$.

3.

3.1. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; достроить найденный базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до базиса пространства $\mathbb{R}^3$.

$x_1 = (1, 0, 1)^T$, $x_2 = (5, 2, 3)^T$, $x_3 = (2, 1, 1)^T$, $x_4 = (4, 1, 3)^T$.

3.2. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; достроить найденный базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до базиса пространства $\mathbb{R}^3$.

$x_1 = (1, 1, 1)^T$, $x_2 = (5, 3, 7)^T$, $x_3 = (5, 4, 6)^T$, $x_4 = (2, 1, 3)^T$.

3.3. В линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; достроить найденный базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ до базиса пространства $\mathbb{R}^3$.

$x_1 = (1, 0, 2)^T$, $x_2 = (3, 2, 8)^T$, $x_3 = (1, 1, 3)^T$, $x_4 = (2, -1, 3)^T$.

4.

4.1. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3, x_4 по найденному базису.

$x_1(t) = 1 + t^2$, $x_2(t) = 5 + 2t + 3t^2$, $x_3(t) = 2 + t + t^2$, $x_4(t) = 4 + t + 3t^2$ при $t \in \mathbb{R}$.

4.2. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3, x_4 по найденному базису.

$x_1(t) = 1 + t + t^2$, $x_2(t) = 5 + 3t + 7t^2$, $x_3(t) = 5 + 4t + 6t^2$, $x_4(t) = 2 + t + 3t^2$ при $t \in \mathbb{R}$.

4.3. В линейном вещественном пространстве $P_2(\mathbb{R})$ (пространство всех полиномов на вещественной оси степени не выше 2) заданы элементы x_1, x_2, x_3, x_4. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти базис линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; найти размерность линейной оболочки $L(x_1, x_2, x_3, x_4)$; разложить элементы x_1, x_2, x_3, x_4 по найденному базису.

$x_1(t) = 1 + 2t^2$, $x_2(t) = 3 + 2t + 8t^2$, $x_3(t) = 1 + t + 3t^2$, $x_4(t) = 2 - t + 3t^2$ при $t \in \mathbb{R}$.

5.

5.1. Неоднородная СЛАУ задана расширенной матрицей A. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти ФСР соответствующей однородной системы; найти размерность пространства решений соответствующей однородной системы; найти общее решение соответствующей однородной системы; найти частное решение неоднородной системы; найти общее решение неоднородной системы.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 7 \end{array}\right).$$

5.2. Неоднородная СЛАУ задана расширенной матрицей A. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти ФСР соответствующей однородной системы; найти размерность пространства решений соответствующей однородной системы; найти общее решение соответствующей однородной системы; найти частное решение неоднородной системы; найти общее решение неоднородной системы.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 8 & 5 & -8 \end{array}\right).$$

5.3. Неоднородная СЛАУ задана расширенной матрицей A. **Используя метод Гаусса**, выполнить задания: найти ФСР соответствующей однородной системы; найти размерность пространства решений соответствующей однородной системы; найти общее решение соответствующей однородной системы; найти частное решение неоднородной системы; найти общее решение неоднородной системы.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

6.

6.1. Задана матрица A. **Используя метод Гаусса**, найти матрицу A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.2. Задана матрица A. **Используя метод Гаусса**, найти матрицу A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.3. Задана матрица A. **Используя метод Гаусса**, найти матрицу A^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.

7.1. Заданы столбцы e_1, e_2. **Используя метод Гаусса**, составить однородную СЛАУ (с наименьшим числом строк), для которой столбцы e_1, e_2 образуют ФСР.

$e_1 = (-1, -2, 1, 0)^T$, $e_2 = (2, 2, -1, 1)^T$.

7.2. Заданы столбцы e_1, e_2. **Используя метод Гаусса**, составить однородную СЛАУ (с наименьшим числом строк), для которой столбцы e_1, e_2 образуют ФСР.

$e_1 = (1, -2, 0, -1)^T$, $e_2 = (2, -2, 1, -1)^T$.

7.3. Заданы столбцы e_1, e_2. **Используя метод Гаусса**, составить однородную СЛАУ (с наименьшим числом строк), для которой столбцы e_1, e_2 образуют ФСР.

$e_1 = (1, 1, 0, 1)^T$, $e_2 = (2, 1, 1, 1)^T$.

8.

8.1. Рассматривается пространство E^3 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Заданы канонические уравнения двух прямых. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через первую прямую параллельно второй прямой.

$\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-3}{-2}, \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-2}.$

8.2. Рассматривается пространство E^3 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Заданы канонические уравнения двух прямых. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через первую прямую параллельно второй прямой.

$\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{1}, \quad \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+2}{-2}.$

8.3. Рассматривается пространство E^3 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Заданы канонические уравнения двух прямых. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через первую прямую параллельно второй прямой.

$\frac{x}{3} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z+3}{-1}, \quad \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+3}{-1}.$

9.

9.1. Рассматривается пространство E^3 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Заданы координаты точки A и общее уравнение плоскости π. Найти: координаты проекции P точки A на плоскость π; координаты точки S, симметричной точке A относительно плоскости π; расстояние от точки A до плоскости π.

$A: \ (1, 1, -3)^T, \quad \pi: \ x - 3y + 4z - 12 = 0.$

9.2. Рассматривается пространство E^3 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Заданы координаты точки A и общее уравнение плоскости π. Найти: координаты проекции P точки A на плоскость π; координаты точки S, симметричной точке A относительно плоскости π; расстояние от точки A до плоскости π.

$A: \ (0, -1, -3)^T, \quad \pi: \ 2x + 3y + 2z - 8 = 0.$

9.3. Рассматривается пространство E^3 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Заданы координаты точки A и общее уравнение плоскости π. Найти: координаты проекции P точки A на плоскость π; координаты точки S, симметричной точке A относительно плоскости π; расстояние от точки A до плоскости π.

$A:\ (3,-5,4)^T, \quad \pi:\ x+2y-z+5=0.$

10.

10.1. Рассматривается пространство E^3 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Заданы координаты точки A и параметрическое уравнение прямой l. Найти: координаты проекции P точки A на прямую l; координаты точки S, симметричной точке A относительно прямой l; расстояние от точки A до прямой l.

$A:\ (-3,3,0)^T, \quad l:\ x=(-4,4,-3)^T+t(2,0,1)^T.$

10.2. Рассматривается пространство E^3 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Заданы координаты точки A и параметрическое уравнение прямой l. Найти: координаты проекции P точки A на прямую l; координаты точки S, симметричной точке A относительно прямой l; расстояние от точки A до прямой l.

$A:\ (-5,3,1)^T, \quad l:\ x=(-2,5,2)^T+t(2,0,-1)^T.$

10.3. Рассматривается пространство E^3 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Заданы координаты точки A и параметрическое уравнение прямой l. Найти: координаты проекции P точки A на прямую l; координаты точки S, симметричной точке A относительно прямой l; расстояние от точки A до прямой l.

$A:\ (-4,-3,-1)^T, \quad l:\ x=(-2,-3,-3)^T+t(0,1,1)^T.$

11.

11.1. Рассматривается пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Составить каноническое уравнение эллипса по известным данным. Обозначения: D — расстояние между директрисами, K — расстояние между фокусом и соответствующей ему директрисой.

$c=2$, $\varepsilon=1/2$.

11.2. Рассматривается пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Составить каноническое уравнение эллипса по известным данным. Обозначения: D — расстояние между директрисами, K — расстояние между фокусом и соответствующей ему директрисой.

$c=2$, $D=6$.

11.3. Рассматривается пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Составить каноническое уравнение эллипса по известным данным. Обозначения: D — расстояние между директрисами, K — расстояние между фокусом и соответствующей ему директрисой.

$K=3$, $\varepsilon=1/2$.

12.

12.1. Рассматривается пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Заданы: общее уравнение прямой l, координаты точек F_1, F_2. Известно, что прямая l касается эллипса, фокусы которого расположены в точках F_1, F_2. Составить каноническое уравнение этого эллипса и найти его эксцентриситет.

$l:\ x+2y+4=0, \quad F_1:\ (-1,0)^T,\ F_2:\ (1,0)^T.$

12.2. Рассматривается пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Заданы: общее уравнение прямой l, координаты точек F_1, F_2. Известно, что прямая l касается эллипса, фокусы которого расположены в точках F_1, F_2. Составить каноническое уравнение этого эллипса и найти его эксцентриситет.

$l:\ -x+2y+3=0, \quad F_1:\ (-2,0)^T,\ F_2:\ (2,0)^T.$

12.3. Рассматривается пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Заданы: общее уравнение прямой l, координаты точек F_1, F_2. Известно, что прямая l касается эллипса, фокусы которого расположены в точках F_1, F_2. Составить каноническое уравнение этого эллипса и найти его эксцентриситет.

$l:\ 2x + y + 3 = 0, \quad F_1:\ (-1, 0)^T,\ F_2:\ (1, 0)^T.$

13.

13.1. Рассматривается пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет, координаты фокуса и общее уравнение соответствующей директрисы. Представить уравнение эллипса в виде $F(x, y) = 0$, где F — многочлен второй степени.

$1/2,\ (-4, 1)^T, \quad x + y + 1 = 0.$

13.2. Рассматривается пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет, координаты фокуса и общее уравнение соответствующей директрисы. Представить уравнение эллипса в виде $F(x, y) = 0$, где F — многочлен второй степени.

$1/2,\ (-3, 1)^T, \quad -x + y + 1 = 0.$

13.3. Рассматривается пространство E^2 с началом отсчёта O и ортонормированным базисом e_1, e_2. Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет, координаты фокуса и общее уравнение соответствующей директрисы. Представить уравнение эллипса в виде $F(x, y) = 0$, где F — многочлен второй степени.

$1/2,\ (-3, 1)^T, \quad -x + y - 3 = 0.$

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.