

Вопросы по курсу «Аналитическая геометрия»

1. Множество \mathbb{R}^N . Сумма столбцов, произведение числа и столбца (основные свойства этих операций). Линейная комбинация столбцов, линейная оболочка столбцов, линейная зависимость (независимость) столбцов.

2. Аффинная (декартова) система координат в пространстве E^2 . Вектор в пространстве E^2 . Координаты вектора. Сумма векторов, произведение числа и вектора (основные свойства этих операций).

3. Линейная комбинация векторов в пространстве E^2 , линейная оболочка векторов, линейная зависимость (независимость) векторов. Линейная зависимость векторов и линейная зависимость столбцов координат. Базис пространства E^2 . Геометрическая интерпретация линейной зависимости двух векторов.

4. Аффинная (декартова) система координат в пространстве E^3 . Вектор в пространстве E^3 . Координаты вектора. Сумма векторов, произведение числа и вектора (основные свойства этих операций).

5. Линейная комбинация векторов в пространстве E^3 , линейная оболочка векторов, линейная зависимость (независимость) векторов. Линейная зависимость векторов и линейная зависимость столбцов координат. Базис пространства E^3 . Геометрическая интерпретация линейной зависимости двух векторов, геометрическая интерпретация линейной зависимости трёх векторов.

6. Матрица, множество $\mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Сумма матриц, произведение числа и матрицы (основные свойства этих операций). Линейная комбинация матриц, линейная оболочка матриц, линейная зависимость (независимость) матриц.

7. Матрица, множество $\mathbb{R}^{N_2 \times N_1}$. Произведение матриц, транспонирование матрицы, след квадратной матрицы.

8. Длина вектора пространства E^2 , угол между векторами, скалярное произведение векторов (основные свойства скалярного произведения). Ортогональные векторы, линейная независимость ортогональных ненулевых векторов. Скалярное произведение в координатах. Ортогональная проекция вектора на линейную оболочку заданного ненулевого вектора.

9. Длина вектора пространства E^3 , угол между векторами, скалярное произведение векторов (основные свойства скалярного произведения). Ортогональные векторы, линейная независимость ортогональных ненулевых векторов. Скалярное произведение в координатах. Ортогональная проекция вектора на линейную оболочку заданного ненулевого вектора.

10. Матрица перехода от одного базиса пространства E^3 к другому базису пространства E^3 . Одинаково ориентированные базисы, правый базис, левый базис. Определение векторного и смешанного произведений. Основные свойства векторного и смешанного произведений.

11. Направляющий вектор прямой в пространстве E^2 , нормаль к прямой. Параметрические уравнения прямой, каноническое уравнение прямой, общее уравнение прямой, нор-

мальное уравнение прямой. Ортогональная проекция точки на прямую, отклонение точки от прямой, расстояние от точки до прямой.

12. Направляющие векторы плоскости в пространстве E^3 , нормаль к плоскости. Параметрические уравнения плоскости, «каноническое» уравнение плоскости, общее уравнение плоскости, нормальное уравнение плоскости. Ортогональная проекция точки на плоскость, отклонение точки от плоскости, расстояние от точки до плоскости.

13. Направляющий вектор прямой в пространстве E^3 , нормаль к прямой. Параметрические уравнения прямой, канонические уравнения прямой, общие уравнения прямой, нормальные уравнения прямой. Ортогональная проекция точки на прямую, расстояние от точки до прямой.

14. Определение линейного пространства. Определение нулевого вектора, существование и единственность нулевого вектора. Существование и единственность решения уравнения: $a + x = y$, $x \in L$ (здесь: L — линейное пространство, $a, y \in L$). Основные свойства суммы векторов и произведения числа и вектора. Примеры линейных пространств.

15. Линейная комбинация векторов линейного пространства, линейная оболочка векторов, линейная зависимость (независимость) векторов. Линейное пространство векторных функций (функций со значениями в линейном пространстве).

16. Подпространство линейного пространства, теорема о том, что линейная оболочка является подпространством, теорема о том, что подпространство является линейным пространством, теорема о пересечении подпространств. Определение аффинного пространства.

17. Базис линейного пространства. Координаты вектора (основные свойства координат вектора). Линейная зависимость векторов и линейная зависимость координат. Простейший базис пространства \mathbb{K}^N , простейший базис пространства $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Размерность линейного пространства. Существование базиса линейного пространства размерности N (здесь N — натуральное число).

18. Определение определителя квадратной матрицы. Простейшие свойства определителя. Существование и единственность функции, удовлетворяющей простейшим свойствам определителя. Перестановка, число беспорядков в перестановке, знак перестановки. Формула, выражающая определитель через компоненты матрицы.

19. Основные свойства определителя. Минор квадратной матрицы A , дополнительный к элементу A_i^j . Формула разложения определителя матрицы A по столбцу с номером i_0 , формула разложения определителя матрицы A по строке с номером j_0 .

20. Минор матрицы, базисные столбцы матрицы, базисные строки матрицы, базисный минор матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о связи между длиной базиса и размерностью линейного пространства, размерность линейной оболочки, теорема о достраивании базиса подпространства Q_1 до базиса подпространства Q_2 (здесь $Q_1 \subseteq Q_2$).

21. Теорема о том, что если определитель матрицы равен нулю, то столбцы матрицы линейно зависимы. Определение ранга матрицы. Различные точки зрения на ранг матрицы. Теорема об операциях, сохраняющих ранг матрицы.

22. Линейный оператор, изоморфизм линейных пространств. Примеры линейных операторов (изоморфизмов). Основные свойства линейного оператора. Произведение линейных операторов (изоморфизмов).

23. Критерий обратимости линейного оператора. Основные свойства линейного обратимого оператора (изоморфизма). Теорема об изоморфности линейных пространств одинаковой конечной размерности.

24. Линейное операторное уравнение. Фундаментальная совокупность решений (ФСР)

линейного однородного уравнения, общий вид решения линейного однородного уравнения. Общий вид решения линейного неоднородного уравнения. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Теорема Кронекера—Капелли.

25. Обратная матрица: определение, существование и единственность, выражение для компонент, основные свойства. Существование и единственность решения уравнения: $Ax = y$, $x \in \mathbb{K}^N$ (здесь: $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $\det(A) \neq 0$, $y \in \mathbb{K}^N$), формулы Крамера. Ситуации, которые могут иметь место при решении уравнения: $Ax = y$, $x \in \mathbb{K}^{N_1}$ (здесь: $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, $y \in \mathbb{K}^{N_2}$).

26. Определение кривой второго порядка, классификация кривых второго порядка (без доказательства). Эллипс. Фокальные свойства эллипса. Фокально-директориальные свойства эллипса. Касательная прямая к эллипсу. Оптическое свойство эллипса.

27. Определение кривой второго порядка, классификация кривых второго порядка (без доказательства). Гипербола. Асимптоты гиперболы. Фокальные свойства гиперболы. Фокально-директориальные свойства гиперболы. Касательная прямая к гиперболе. Оптическое свойство гиперболы.

28. Определение кривой второго порядка, классификация кривых второго порядка (без доказательства). Парабола. Фокальные свойства параболы. Фокально-директориальные свойства параболы. Касательная прямая к параболе. Оптическое свойство параболы.

29. Определение поверхности второго порядка, классификация поверхностей второго порядка (без доказательства). Определение эллипсоида, изображение эллипсоида. Определение однополостного гиперболоида, изображение однополостного гиперболоида. Определение конуса, изображение конуса. Определение двуполостного гиперболоида, изображение двуполостного гиперболоида. Определение эллиптического параболоида, изображение эллиптического параболоида. Определение гиперболического параболоида, изображение гиперболического параболоида.

Список литературы

- [1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.
- [2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.
- [3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.
- [4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.
- [5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.
- [6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.
- [7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.