Аналитическая геометрия

Бадьин А. В.

Лекция 10. Размерность линейного пространства. Ранг матрицы

10.1. Теорема о базисном миноре

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_r$. Обозначим:

$$\Delta_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}(A) = \begin{vmatrix} A_{i_1}^{j_1} & \cdot & A_{i_r}^{j_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i_1}^{j_r} & \cdot & A_{i_r}^{j_r} \end{vmatrix}.$$

Будем говорить, что $\Delta_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}(A)$ — минор матрицы A порядка r.

Пусть: $r_1 \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_{r_1} = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_{r_1}$, $j_1, \ldots, j_{r_1} = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_{r_1}$; $r_2 \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_{r_2} = \overline{1, N_1}$, $k_1 < \cdots < k_{r_2}$, $m_1, \ldots, m_{r_2} = \overline{1, N_2}$, $m_1 < \cdots < m_{r_2}$. Будем говорить, что минор $\Delta_{k_1,\ldots,k_{r_2}}^{m_1,\ldots,m_{r_2}}(A)$ окаймляет минор $\Delta_{i_1,\ldots,i_{r_1}}^{j_1,\ldots,j_{r_1}}(A)$, если: $r_1 < r_2$, $i_1, \ldots, i_{r_1} \in \{k_1, \ldots, k_{r_2}\}$, $j_1, \ldots, j_{r_1} \in \{m_1, \ldots, m_{r_2}\}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r. Будем говорить, что $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базисные столбцы матрицы A.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ длины r. Будем говорить, что $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базисные строки матрицы A.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_r$, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r; $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ длины r. Будем говорить, что $\Delta_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}(A)$ — базисный минор матрицы A.

Теорема (о базисном миноре). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_r$, $\Delta_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}(A) \neq 0$.

Пусть все миноры матрицы A порядка $r + 1$, окаймляющие минор $\Delta_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}(A)$, равны нулю (если они существуют).

Тогда: $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r; $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ длины r.

Доказательство. Обозначим: $\delta = \Delta_{i_1,\ldots,i_r}^{j_1,\ldots,j_r}(A)$,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{i_1}^{j_1} & \cdot & A_{i_r}^{j_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i_1}^{j_r} & \cdot & A_{i_r}^{j_r} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что $A_{i_1},\dots,A_{i_r}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда $\tilde{A}_1,\dots,\tilde{A}_r$ — линейно зависимые столбцы. Следовательно: $\delta = \det(\tilde{A}_1,\dots,\tilde{A}_r) = 0$ (что противоречит утверждению: $\delta \neq 0$). Итак, $A_{i_1},\dots,A_{i_r}$ — линейно независимые столбцы.

Пусть: $i = \overline{1,N_1}$, $j = \overline{1,N_2}$. Обозначим:

$$B(i,j) = \begin{pmatrix} A^{j_1}_{i_1} & \cdot & A^{j_1}_{i_r} & A^{j_1}_{i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A^{j_r}_{i_1} & \cdot & A^{j_r}_{i_r} & A^{j_r}_{i} \\ A^{j}_{i_1} & \cdot & A^{j}_{i_r} & A^{j}_{i} \end{pmatrix}.$$

Пусть $i \in \{i_1,\dots,i_r\}$. Тогда последний столбец матрицы $B(i,j)$ равен одному из предыдущих столбцов матрицы $B(i,j)$. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$.

Пусть $j \in \{j_1,\dots,j_r\}$. Тогда последняя строка матрицы $B(i,j)$ равна одной из предыдущих строк матрицы $B(i,j)$. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$.

Пусть: $i \notin \{i_1,\dots,i_r\}$, $j \notin \{j_1,\dots,j_r\}$. Тогда $\det\bigl(B(i,j)\bigr)$ равен (с точностью до знака) одному из миноров матрицы A порядка $r+1$, окаймляющих минор δ. Следовательно, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$.

Итак, $\det\bigl(B(i,j)\bigr) = 0$. Тогда:

$$0 = \det\bigl(B(i,j)\bigr) = (-1)^{(r+1)+1}\overline{\Delta}^{r+1}_1\bigl(B(i,j)\bigr)A^j_{i_1} + \dots + (-1)^{(r+1)+r}\overline{\Delta}^{r+1}_r\bigl(B(i,j)\bigr)A^j_{i_r} + \\ + (-1)^{(r+1)+(r+1)}\overline{\Delta}^{r+1}_{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr)A^j_i.$$

Так как: $(-1)^{(r+1)+(r+1)}\overline{\Delta}^{r+1}_{r+1}\bigl(B(i,j)\bigr) = \delta \neq 0$, то:

$$A^j_i = (-1)^{(r+2)+1}\frac{\overline{\Delta}^{r+1}_1\bigl(B(i,j)\bigr)}{\delta}A^j_{i_1} + \dots + (-1)^{(r+2)+r}\frac{\overline{\Delta}^{r+1}_r\bigl(B(i,j)\bigr)}{\delta}A^j_{i_r}.$$

Пусть $k = \overline{1,r}$. Очевидно, число $(-1)^{(r+2)+k}\frac{\overline{\Delta}^{r+1}_k(B(i,j))}{\delta}$ не зависит от выбора номера $j = \overline{1,N_2}$. Обозначим, $C^k(i) = (-1)^{(r+2)+k}\frac{\overline{\Delta}^{r+1}_k(B(i,j))}{\delta}$. Тогда $A^j_i = C^1(i)A^j_{i_1} + \dots + C^r(i)A^j_{i_r}$. Следовательно, $(A_i)^j = \bigl(C^1(i)A_{i_1} + \dots + C^r(i)A_{i_r}\bigr)^j$. В силу произвольности выбора номера $j = \overline{1,N_2}$ получаем, что $A_i = C^1(i)A_{i_1} + \dots + C^r(i)A_{i_r}$.

Аналогично проводятся рассуждения для строк. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$; $Q \subseteq L$, e *— базис множества* Q *длины* r. *Тогда* $\operatorname{rank}(Q) = r$.

Доказательство. Так как e — базис множества Q длины r, то: $r \in \mathbb{N}$, $e \in Q^r$, $e_1,\dots,e_r$ — линейно независимые векторы, $Q \subseteq L(e_1,\dots,e_r)$.

Итак: $e_1,\dots,e_r \in Q$, $e_1,\dots,e_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть $x_1,\dots,x_{r+1} \in Q$. Обозначим: $\tilde{x}^j_i = [x_i]^j(e)$ при: $i = \overline{1,r+1}$, $j = \overline{1,r}$. Очевидно: $\tilde{x} \in \mathbb{K}^{r\times(r+1)}$, $\tilde{x}_1 = [x_1](e),\dots,\tilde{x}_{r+1} = [x_{r+1}](e)$.

Пусть $\tilde{x} = \Theta$ (здесь Θ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{r\times(r+1)}$). Тогда $\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_{r+1} = \tilde{\theta}$ (здесь $\tilde{\theta}$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^r$). Следовательно, $\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_{r+1}$ — линейно зависимые столбцы.

Пусть $\tilde{x} \neq \Theta$. Тогда существует число $r_0 = \overline{1,r}$, существуют числа $i_1,\dots,i_{r_0} = \overline{1,r+1}$, существуют числа $j_1,\dots,j_{r_0} = \overline{1,r}$, удовлетворяющие условиям: $i_1 < \dots < i_{r_0}$, $j_1 < \dots < j_{r_0}$, $\overline{\Delta}^{j_1,\dots,j_{r_0}}_{i_1,\dots,i_{r_0}}(\tilde{x}) \neq 0$, все миноры матрицы $\tilde{x}$ порядка $r+1$, окаймляющие минор

$\overline{\Delta}^{j_1,\ldots,j_{r_0}}_{i_1,\ldots,i_{r_0}}(\tilde{x})$, равны нулю (если они существуют). Следовательно, $\tilde{x}_{i_1},\ldots,\tilde{x}_{i_{r_0}}$ — базис множества $\{\tilde{x}_1,\ldots,\tilde{x}_{r+1}\}$ длины r_0. Так как: $r_0 \leqslant r < r+1$, то $\tilde{x},\ldots,\tilde{x}_{r+1}$ — линейно зависимые столбцы.

Итак, $\tilde{x},\ldots,\tilde{x}_{r+1}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда $x_1,\ldots,x_{r+1}$ — линейно зависимые векторы. Итак, $\operatorname{rank}(Q) = r$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1,\ldots,x_r \in L$*. Тогда* $\dim\bigl(L(x_1,\ldots,x_r)\bigr) = \operatorname{rank}\bigl(\{x_1,\ldots,x_r\}\bigr)$.

Доказательство. Обозначим, $r_0 = \operatorname{rank}\bigl(\{x_1,\ldots,x_r\}\bigr)$. Тогда $r_0 \in \overline{\mathbb{Z}}_+$. Так как $r_0 \leqslant r$, то $r_0 \in \mathbb{Z}_+$.

Пусть $r_0 = 0$. Так как $\operatorname{rank}\bigl(\{x_1,\ldots,x_r\}\bigr) = r_0$, то $x_1,\ldots,x_r = \theta$. Тогда: $\dim\bigl(L(x_1,\ldots,x_r)\bigr) = \operatorname{rank}\bigl(L(x_1,\ldots,x_r)\bigr) = \operatorname{rank}\bigl(\{\theta\}\bigr) = 0 = r_0$.

Пусть $r_0 \neq 0$. Тогда $r_0 \in \mathbb{N}$. Так как $\operatorname{rank}\bigl(\{x_1,\ldots,x_r\}\bigr) = r_0$, то существуют векторы $e_1,\ldots,e_{r_0}$, удовлетворяющие условию: $e_1,\ldots,e_{r_0}$ — базис множества $\{x_1,\ldots,x_r\}$ длины r_0. Тогда $e_1,\ldots,e_{r_0}$ — базис подпространства $L(x_1,\ldots,x_r)$ длины r_0. Следовательно, $\dim\bigl(L(x_1,\ldots,x_r)\bigr) = r_0$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q \subseteq L$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $x_1,\ldots,x_{N_1} \in Q$*,* $x_1,\ldots,x_{N_1}$ *— линейно независимые векторы,* $N_1 < \operatorname{rank}(Q)$*. Тогда существует вектор* $x \in Q$*, удовлетворяющий условию:* $x_1,\ldots,x_{N_1}$*,* x *— линейно независимые векторы.*

Доказательство. Предположим, что для любого вектора $x \in Q$ справедливо утверждение: $x_1,\ldots,x_{N_1}$, x — линейно зависимые векторы.

По условию: $N_1 \in \mathbb{N}$, $x_1,\ldots,x_{N_1} \in Q$, $x_1,\ldots,x_{N_1}$ — линейно независимые векторы.

Пусть $x \in Q$. Так как: $x_1,\ldots,x_{N_1}$ — линейно независимые векторы, $x_1,\ldots,x_{N_1}$, x — линейно зависимые векторы, то $x \in L(x_1,\ldots,x_{N_1})$. Итак, $x_1,\ldots,x_{N_1}$ — базис множества Q. Тогда $\operatorname{rank}(Q) = N_1$ (что противоречит утверждению: $N_1 < \operatorname{rank}(Q)$). Итак, существует вектор $x \in Q$, удовлетворяющий условию: $x_1,\ldots,x_{N_1}$, x — линейно независимые векторы. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q \subseteq L$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $x_1,\ldots,x_{N_1} \in Q$*,* $x_1,\ldots,x_{N_1}$ *— линейно независимые векторы,* $N_2 \in \mathbb{Z}$*,* $N_1 < N_2 \leqslant \operatorname{rank}(Q)$*. Тогда существуют векторы* $x_{N_1+1},\ldots,x_{N_2} \in Q$*, удовлетворяющие условию:* $x_1,\ldots,x_{N_2}$ *— линейно независимые векторы.*

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $Q_2 \subseteq L$*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*,* $\operatorname{rank}(Q_2) = N_2$*;* $Q_1 \subseteq Q_2$*,* $N_1 \in \mathbb{N}$*,* $\operatorname{rank}(Q_1) = N_1$*,* $e_1,\ldots,e_{N_1}$ *— базис множества* Q_1*,* $N_1 < N_2$*. Тогда существуют векторы* $e_{N_1+1},\ldots,e_{N_2}$*, удовлетворяющие условию:* $e_1,\ldots,e_{N_2}$ *— базис множества* Q_2*.*

Доказательство. Так как: $e_1,\ldots,e_{N_1} \in Q_1$, $Q_1 \subseteq Q_2$, то $e_1,\ldots,e_{N_1} \in Q_2$. Так как: $e_1,\ldots,e_{N_1}$ — линейно независимые векторы, $N_1 < N_2 = \operatorname{rank}(Q_2)$, то существуют векторы $e_{N_1+1},\ldots,e_{N_2} \in Q_2$, удовлетворяющие условию: $e_1,\ldots,e_{N_2}$ — линейно независимые векторы. Так как: $\operatorname{rank}(Q_2) = N_2$, $e_1,\ldots,e_{N_2} \in Q_2$, $e_1,\ldots,e_{N_2}$ — линейно независимые векторы, то $e_1,\ldots,e_{N_2}$ — базис множества Q_2. □

10.2. Ранг матрицы

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$*,* $\det(A) = 0$*. Тогда* $A_1, \ldots, A_N$ *— линейно зависимые столбцы.*

Доказательство. Пусть $A = \Theta$ (здесь Θ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{N\times N}$). Тогда $A_1, \ldots, A_N = \tilde{\theta}$ (здесь $\tilde{\theta}$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^N$). Следовательно, $A_1, \ldots, A_N$ — линейно зависимые столбцы.

Пусть $A \neq \Theta$. Тогда существует число $r = \overline{1, N}$, существуют числа $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N}$, существуют числа $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N}$, удовлетворяющие условиям: $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1 < \cdots < j_r$, $\overline{\Delta}^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A) \neq 0$, все миноры матрицы A порядка $r+1$, окаймляющие минор $\overline{\Delta}^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A)$, равны нулю (если они существуют). Следовательно, $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_N\}$ длины r. Так как $\det(A) = 0$, то $r \neq N$. Тогда $r < N$. Следовательно, $A_1, \ldots, A_N$ — линейно зависимые столбцы. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, $j_1 < \cdots < j_r$, $\Delta^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A) \neq 0$.

Пусть все миноры матрицы A порядка $r+1$, окаймляющие минор $\Delta^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A)$, равны нулю (если они существуют).

Тогда: $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r; $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ длины r.

Так как $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r, то $\operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\bigr) = r$. Так как $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис множества $\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}$ длины r, то $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ — базис подпространства $L(A_1, \ldots A_{N_1})$ длины r. Тогда $\dim\bigl(L(A_1, \ldots A_{N_1})\bigr) = r$.

Так как $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ длины r, то $\operatorname{rank}\bigl(\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}\bigr) = r$. Так как $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис множества $\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}$ длины r, то $A^{j_1}, \ldots, A^{j_r}$ — базис подпространства $L(A^1, \ldots, A^{N_2})$ длины r. Тогда $\dim\bigl(L(A^1, \ldots, A^{N_2})\bigr) = r$.

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$; $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим, $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\bigr)$. Будем говорить, что $\operatorname{rank}(A)$ — ранг матрицы A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* N_1*,* $N_2 \in \mathbb{N}$*;* $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

1. *Справедливо утверждение:* $\operatorname{rank}(A) = \dim\bigl(L(A_1, \ldots, A_{N_1})\bigr)$.
2. *Справедливо утверждение:* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}\bigr)$.
3. *Справедливо утверждение:* $\operatorname{rank}(A) = \dim\bigl(L(A^1, \ldots, A^{N_2})\bigr)$.
4. *Пусть:* $r \in \mathbb{N}$*,* $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$*,* $i_1 < \cdots < i_r$*,* $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$*,* $j_1 < \cdots < j_r$*,* $\Delta^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A) \neq 0$*. Пусть все миноры матрицы* A *порядка* $r+1$*, окаймляющие минор* $\Delta^{j_1,\ldots,j_r}_{i_1,\ldots,i_r}(A)$*, равны нулю (если они существуют). Тогда* $\operatorname{rank}(A) = r$.

Доказательство.

1. Очевидно: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\bigr) = \dim\bigl(L(A_1, \ldots, A_{N_1})\bigr)$.

2. Пусть $A = \Theta$ (здесь Θ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$). Тогда: $A_1, \ldots, A_{N_1} = \tilde{\theta}_2$ (здесь $\tilde{\theta}_2$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{N_2 \times 1}$); $A^1, \ldots, A^{N_2} = \tilde{\theta}_1$ (здесь $\tilde{\theta}_1$ — нулевой элемент пространства $\mathbb{K}^{1 \times N_1}$). Следовательно:

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_1, \ldots, A_{N_1}\}\bigr) = \operatorname{rank}\bigl(\{\tilde{\theta}_2\}\bigr) = 0 = \operatorname{rank}\bigl(\{\tilde{\theta}_1\}\bigr) = \operatorname{rank}\bigl(\{A^1, \ldots, A^{N_2}\}\bigr).$$

Пусть $A \neq \Theta$. Тогда существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют числа $i_1, \ldots, i_r = \overline{1, N_1}$, существуют числа $j_1, \ldots, j_r = \overline{1, N_2}$, удовлетворяющие условиям: $i_1 < \cdots < i_r$, $j_1 <$

$\dots < j_r$, $\overline{\Delta}^{j_1,\dots,j_r}_{i_1,\dots,i_r}(A) \neq 0$, все миноры матрицы A порядка $r+1$, окаймляющие минор $\overline{\Delta}^{j_1,\dots,j_r}_{i_1,\dots,i_r}(A)$, равны нулю (если они существуют). Следовательно: $\operatorname{rank}\bigl(\{A_1,\dots,A_{N_1}\}\bigr) = r$, $\operatorname{rank}\bigl(\{A^1,\dots,A^{N_2}\}\bigr) = r$. Тогда: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_1,\dots,A_{N_1}\}\bigr) = r = \operatorname{rank}\bigl(\{A^1,\dots,A^{N_2}\}\bigr)$.

3. Очевидно: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A^1,\dots,A^{N_2}\}\bigr) = \dim\bigl(L(A^1,\dots,A^{N_2})\bigr)$.
4. Очевидно, $\operatorname{rank}\bigl(\{A_1,\dots,A_{N_1}\}\bigr) = r$. Тогда: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_1,\dots,A_{N_1}\}\bigr) = r$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$.

1. Пусть: $A_1,\dots,A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$, $\sigma \in S_{N_1}$. *Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_{\sigma(1)},\dots,A_{\sigma(N_1)}) = \operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{N_1}).$$

2. Пусть: $N_1 \geqslant 2$, $k = \overline{1,N_1}$, $A_1,\dots,A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$, $X \in L(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1})$. *Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{k-1},A_k+X,A_{k+1},\dots,A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{N_1}).$$

3. Пусть: $N_1 \geqslant 2$, $k = \overline{1,N_1}$, $A_1,\dots,A_{k-1}$, $A_{k+1},\dots,A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$. *Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{k-1},\tilde{\theta}_2,A_{k+1},\dots,A_{N_1}).$$

4. Пусть: $N_1 \geqslant 2$, $k = \overline{1,N_1}$, $A_1,\dots,A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$, $A_k \in L(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1})$. *Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{N_1}).$$

5. Пусть: $k = \overline{1,N_1}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \neq 0$, $A_1,\dots,A_{N_1} \in \mathbb{K}^{N_2}$. *Тогда:*

$$\operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{k-1},\lambda A_k,A_{k+1},\dots,A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{N_1}).$$

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\operatorname{rank}(A_{\sigma(1)},\dots,A_{\sigma(N_1)}) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_{\sigma(1)},\dots,A_{\sigma(N_1)}\}\bigr) = \operatorname{rank}\bigl(\{A_1,\dots,A_{N_1}\}\bigr) = \\ = \operatorname{rank}(A_1,\dots,A_{N_1}).$$

2. Достаточно доказать, что:

$$L(A_1,\dots,A_{k-1},A_k+X,A_{k+1},\dots,A_{N_1}) = L(A_1,\dots,A_{N_1}).$$

Так как $X \in L(A_1,\dots,A_{k-1},A_{k+1},\dots,A_{N_1})$, то существуют числа $\alpha^1,\dots,\alpha^{k-1}$, $\alpha^{k+1},\dots,\alpha^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m$.

Пусть $Y \in L(A_1,\dots,A_{k-1},A_k+X,A_{k+1},\dots,A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\beta^1,\dots,\beta^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $Y = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \beta^m A_m + \beta^k(A_k+X)$. Следовательно:

$$Y = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \beta^m A_m + \beta^k(A_k+X) = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \beta^m A_m + \beta^k\Biggl(A_k + \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m\Biggr) = \\ = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} (\beta^m + \beta^k\alpha^m)A_m + \beta^k A_k \in L(A_1,\dots,A_{N_1}).$$

Пусть $Y \in L(A_1, \ldots, A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\beta^1, \ldots, \beta^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $Y = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1}} \beta^m A_m$. Следовательно:

$$Y = \sum_{m=\overline{1,N_1}} \beta^m A_m = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \beta^m A_m + \beta^k A_k =$$
$$= \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} (\beta^m - \beta^k \alpha^m) A_m + \beta^k \Bigg(A_k + \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m \Bigg) =$$
$$= \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} (\beta^m - \beta^k \alpha^m) A_m + \beta^k (A_k + X) \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}).$$

3. Достаточно доказать, что:

$$L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}) = L(A_1, \ldots, A_{k-1}, \tilde{\theta}_2, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}).$$

Пусть $X \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{k-1}$, $\alpha^{k+1}, \ldots, \alpha^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m$. Следовательно:

$$X = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + 1\tilde{\theta}_2 \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, \tilde{\theta}_2, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}).$$

Пусть $X \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, \tilde{\theta}_2, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + \alpha^k \tilde{\theta}_2$. Следовательно:

$$X = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + \alpha^k \tilde{\theta}_2 = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}).$$

4. Так как $A_k \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1})$, то:

$$-A_k \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}).$$

Тогда:

$$\operatorname{rank}(A_1, \ldots, A_{N_1}) = \operatorname{rank}\big(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + (-A_k), A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}\big) =$$
$$= \operatorname{rank}(A_1, \ldots, A_{k-1}, \tilde{\theta}_2, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}) = \operatorname{rank}(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}).$$

5. Достаточно доказать, что:

$$L(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}) = L(A_1, \ldots, A_{N_1}).$$

Пусть $X \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + \alpha^k (\lambda A_k)$. Следовательно:

$$X = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + \alpha^k (\lambda A_k) = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + (\alpha^k \lambda) A_k \in L(A_1, \ldots, A_{N_1}).$$

Пусть $X \in L(A_1, \ldots, A_{N_1})$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{N_1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $X = \sum\limits_{m=\overline{1,N_1}} \alpha^m A_m$. Так как $\lambda \neq 0$, то:

$$X = \sum_{m=\overline{1,N_1}} \alpha^m A_m = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + \alpha^k A_k = \sum_{m=\overline{1,N_1},\, m\neq k} \alpha^m A_m + \frac{\alpha^k}{\lambda} (\lambda A_k) \in$$
$$\in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{N_1}). \quad \square$$

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.