Аналитическая геометрия

Бадьин А. В.

Лекция 9. Определитель матрицы

9.1. Определение определителя. Теория перестановок

Определение (определитель в пространстве $\mathbb{K}^{N\times N}$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$; $F\colon \mathbb{K}^{N\times N} \implies \mathbb{K}$.

Пусть справедливы утверждения.

1. Пусть: $k = \overline{1, N}$, X, Y, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_{k+1}, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. Тогда:

$$F(A_1, \ldots, A_{k-1}, X + Y, A_{k+1}, \ldots, A_N) =$$
$$= F(A_1, \ldots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \ldots, A_N) + F(A_1, \ldots, A_{k-1}, Y, A_{k+1}, \ldots, A_N).$$

2. Пусть: $k = \overline{1, N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. Тогда:

$$F(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_N) = \lambda F(A_1, \ldots, A_N).$$

3. Пусть: k, $m = \overline{1, N}$, $k < m$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$, $A_k = A_m$. Тогда $F(A_1, \ldots, A_N) = 0$.
4. $F(I) = 1$.

Будем говорить, что F — определитель в пространстве $\mathbb{K}^{N\times N}$.

Замечание. Пусть $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{1\times 1}$. Обозначим, $F(A) = A_1^1$. Очевидно, F — определитель в пространстве $\mathbb{K}^{1\times 1}$.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{2\times 2}$. Обозначим, $F(A) = A_1^1 A_2^2 - A_1^2 A_2^1$. Очевидно, F — определитель в пространстве $\mathbb{K}^{2\times 2}$.

Пусть $A \in \mathbb{K}^{3\times 3}$. Обозначим, $F(A) = A_1^1 A_2^2 A_3^3 + A_1^3 A_2^1 A_3^2 + A_1^2 A_2^3 A_3^1 - A_1^3 A_2^2 A_3^1 - A_1^1 A_2^3 A_3^2 - A_1^2 A_2^1 A_3^3$. Очевидно, F — определитель в пространстве $\mathbb{K}^{3\times 3}$.

Замечание (перестановки).

1. Пусть M — некоторое множество.

   Будем говорить, что σ — перестановка множества M, если: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) = M$.

   Обозначим через $S(M)$ множество всех перестановок множества M.

   Пусть σ_1, $\sigma_2 \in S(M)$. Обозначим, $\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Очевидно: $\sigma_2\sigma_1$ — обратимая функция,

$$\mathrm{D}(\sigma_2\sigma_1) = \big\{x\colon x \in \mathrm{D}(\sigma_1) \land \sigma_1(x) \in \mathrm{D}(\sigma_2)\big\} = \big\{x\colon x \in M \land \sigma_1(x) \in M\big\} = \{x\colon x \in M\} = M,$$
$$\mathrm{R}(\sigma_2\sigma_1) = (\sigma_2\sigma_1)[M] = \sigma_2\big[\sigma_1[M]\big] = \sigma_2\big[\mathrm{R}(\sigma_1)\big] = \sigma_2[M] = \mathrm{R}(\sigma_2) = M.$$

Тогда $\sigma_2\sigma_1 \in S(M)$.

   Обозначим: $e(x) = x$ при $x \in M$. Очевидно, $e \in S(M)$.

Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: σ^{-1} — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma^{-1}) = \mathrm{R}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma^{-1}) = \mathrm{D}(\sigma) = M$. Тогда $\sigma^{-1} \in S(M)$.

Пусть σ_1, σ_2, $\sigma_3 \in S(M)$. Очевидно, $(\sigma_3\sigma_2)\sigma_1 = \sigma_3(\sigma_2\sigma_1)$.

Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma e = \sigma$, $e\sigma = \sigma$.

Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma\sigma^{-1} = e$, $\sigma^{-1}\sigma = e$.

2. Пусть: M — некоторое **конечное** множество; σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq M$. Так как $\mathrm{D}(\sigma)$ — конечное множество, то $\mathrm{R}(\sigma)$ — конечное множество. Так как σ — обратимая функция, то: $\mathrm{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big) = \mathrm{card}\big(\mathrm{D}(\sigma)\big) = \mathrm{card}(M)$. Так как: $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq M$, $\mathrm{card}\big(\mathrm{R}(\sigma)\big) = \mathrm{card}(M)$, то $\mathrm{R}(\sigma) = M$. Тогда $\sigma \in S(M)$.

3. Обозначим, $S_0 = S(\varnothing)$.

Пусть $N \in \mathbb{N}$. Обозначим, $S_N = S\big(\{1, \ldots, N\}\big)$.

4. Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $k_1, \ldots, k_N = \overline{1, N}$, $k_1, \ldots, k_N$ — различные числа. Обозначим: $\sigma(1) = k_1, \ldots, \sigma(N) = k_N$. Очевидно: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = \{1, \ldots, N\}$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq \{1, \ldots, N\}$. Тогда $\sigma \in S_N$.

Замечание (простые и элементарные перестановки). Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Будем говорить, что σ — простая перестановка, если существуют числа k, $m = \overline{1, N}$, удовлетворяющие условиям: $k < m$, $\sigma(k) = m$, $\sigma(m) = k$, $\sigma(i) = i$ при: $i = \overline{1, N}$, $i \neq k$, $i \neq m$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Будем говорить, что σ раскладывается в произведение простых перестановок, если существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — простые перестановки, $\sigma = \sigma_r \cdots \sigma_1$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Будем говорить, что σ — элементарная перестановка, если существует число $k = \overline{1, N-1}$, удовлетворяющее условиям: $\sigma(k) = k+1$, $\sigma(k+1) = k$, $\sigma(i) = i$ при: $i = \overline{1, N}$, $i \neq k$, $i \neq k+1$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Будем говорить, что σ раскладывается в произведение элементарных перестановок, если существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — элементарные перестановки, $\sigma = \sigma_r \cdots \sigma_1$.

Очевидно, e раскладывается в произведение элементарных перестановок.

Утверждение. *Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; $\sigma \in S_N$. Тогда σ раскладывается в произведение элементарных перестановок.*

Доказательство. Достаточно доказать, что для любого числа $\tilde{N} = \overline{1, N}$ существует перестановка $\tilde{\sigma} \in S_N$, удовлетворяющая условиям: $\tilde{\sigma}$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}}$.

Так как $\sigma(1) = \overline{1, N}$, то существует число $k = \overline{1, N}$, удовлетворяющее условию $e(k) = \sigma(1)$. Пусть $k = 1$. Тогда: $e \in S_N$, e раскладывается в произведение элементарных перестановок, $e(1) = \sigma(1)$. Пусть $k \geqslant 2$. Тогда существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — элементарные перестановки, $(e\sigma_r \cdots \sigma_1)(1) = \sigma(1)$. Следовательно: $e\sigma_r \cdots \sigma_1 \in S_N$, $e\sigma_r \cdots \sigma_1$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $(e\sigma_r \cdots \sigma_1)(1) = \sigma(1)$.

Пусть: $\tilde{N} = \overline{1, N-1}$, $\tilde{\sigma} \in S_N$, $\tilde{\sigma}$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}}$. Так как $\sigma(\tilde{N}+1) = \overline{1, N}$, то существует число $k = \overline{1, N}$, удовлетворяющее условию $\tilde{\sigma}(k) = \sigma(\tilde{N}+1)$. Предположим, что $k \leqslant \tilde{N}$. Тогда: $\sigma(\tilde{N}+1) = \tilde{\sigma}(k) = \sigma(k)$. Так как σ — обратимая функция, то $\tilde{N}+1 = k$ (что противоречит утверждению: $k \leqslant \tilde{N}$). Итак, $k \geqslant \tilde{N}+1$. Пусть $k = \tilde{N}+1$. Тогда: $\tilde{\sigma} \in S_N$, $\tilde{\sigma}$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $\tilde{\sigma}(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}+1}$. Пусть $k \geqslant \tilde{N}+2$. Тогда существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — элементарные перестановки, $(\tilde{\sigma}\sigma_r \cdots \sigma_1)(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}+1}$. Следовательно: $\tilde{\sigma}\sigma_r \cdots \sigma_1 \in S_N$, $\tilde{\sigma}\sigma_r \cdots \sigma_1$ раскладывается в произведение элементарных перестановок, $(\tilde{\sigma}\sigma_r \cdots \sigma_1)(i) = \sigma(i)$ при $i = \overline{1, \tilde{N}+1}$. □

Определение. Обозначим: $h(x) = 0$ при $x \in (-\infty, 0)$; $h(x) = 1$ при $x \in [0, +\infty)$. Очевидно, $h\colon \mathbb{R} \implies \mathbb{R}$. Будем говорить, что h — функция Хевисайда.

Определение. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$.

Пусть $\sigma \in S_N$. Обозначим:

$$P(\sigma) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(j)\bigr).$$

Очевидно, $P(\sigma) \in \mathbb{Z}_+$. Будем говорить, что $P(\sigma)$ — число беспорядков в перестановке σ.

Пусть $\sigma \in S_N$. Обозначим, $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{P(\sigma)}$. Очевидно, $\operatorname{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$. Будем говорить, что $\operatorname{sgn}(\sigma)$ — знак перестановки σ.

Очевидно: $P(e) = 0$, $\operatorname{sgn}(e) = 1$.

Определение. Пусть $N = 0$, 1.

Пусть $\sigma \in S_N$. Обозначим, $P(\sigma) = 0$. Будем говорить, что $P(\sigma)$ — число беспорядков в перестановке σ.

Пусть $\sigma \in S_N$. Обозначим, $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$. Будем говорить, что $\operatorname{sgn}(\sigma)$ — знак перестановки σ.

Пусть $\sigma \in S_N$. Очевидно, $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{P(\sigma)}$.

Замечание. Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; $\sigma \in S_N$, $i_0 = \overline{1, N-1}$. Тогда:

$$\begin{gathered} P(\sigma) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant N} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(j)\bigr) = \\ = \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant N, \\ i, j \neq i_0, i_0+1}} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(j)\bigr) + h\bigl(\sigma(i_0) - \sigma(i_0+1)\bigr) + \\ + \sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl(\sigma(i_0) - \sigma(j)\bigr) + \sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl(\sigma(i_0+1) - \sigma(j)\bigr) + \\ + \sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(i_0)\bigr) + \sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl(\sigma(i) - \sigma(i_0+1)\bigr). \end{gathered}$$

Утверждение. *Пусть: $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; σ_1, $\sigma_2 \in S_N$, σ_1 — элементарная перестановка. Тогда:* $\bigl|P(\sigma_2\sigma_1) - P(\sigma_2)\bigr| = 1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1) = -\operatorname{sgn}(\sigma_2)$.

Доказательство. Так как σ_1 — элементарная перестановка, то существует число $i_0 = \overline{1, N-1}$, удовлетворяющее условиям: $\sigma_1(i_0) = i_0 + 1$, $\sigma_1(i_0+1) = i_0$, $\sigma_1(i) = i$ при: $i = \overline{1, N}$, $i \neq i_0$, $i \neq i_0 + 1$. Тогда:

$$\begin{gathered} P(\sigma_2) = \sum_{\substack{1 \leqslant i < j \leqslant N, \\ i, j \neq i_0, i_0+1}} h\bigl(\sigma_2(i) - \sigma_2(j)\bigr) + h\bigl(\sigma_2(i_0) - \sigma_2(i_0+1)\bigr) + \\ + \sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl(\sigma_2(i_0) - \sigma_2(j)\bigr) + \sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl(\sigma_2(i_0+1) - \sigma_2(j)\bigr) + \end{gathered}$$

$$+\sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl(\sigma_2(i)-\sigma_2(i_0)\bigr)+\sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl(\sigma_2(i)-\sigma_2(i_0+1)\bigr);$$

$$\begin{aligned}
P(\sigma_2\sigma_1) = &\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant N,\\ i,\,j\neq i_0,\,i_0+1}} h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i)-(\sigma_2\sigma_1)(j)\bigr)+h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i_0)-(\sigma_2\sigma_1)(i_0+1)\bigr)+\\
&+\sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i_0)-(\sigma_2\sigma_1)(j)\bigr)+\sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i_0+1)-(\sigma_2\sigma_1)(j)\bigr)+\\
&+\sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i)-(\sigma_2\sigma_1)(i_0)\bigr)+\sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl((\sigma_2\sigma_1)(i)-(\sigma_2\sigma_1)(i_0+1)\bigr)=\\
&=\sum_{\substack{1\leqslant i<j\leqslant N,\\ i,\,j\neq i_0,\,i_0+1}} h\bigl(\sigma_2(i)-\sigma_2(j)\bigr)+h\bigl(\sigma_2(i_0+1)-\sigma_2(i_0)\bigr)+\\
&+\sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl(\sigma_2(i_0+1)-\sigma_2(j)\bigr)+\sum_{j=i_0+2}^{N} h\bigl(\sigma_2(i_0)-\sigma_2(j)\bigr)+\\
&+\sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl(\sigma_2(i)-\sigma_2(i_0+1)\bigr)+\sum_{i=1}^{i_0-1} h\bigl(\sigma_2(i)-\sigma_2(i_0)\bigr).
\end{aligned}$$

Следовательно:

$$P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)=h\bigl(\sigma_2(i_0+1)-\sigma_2(i_0)\bigr)-h\bigl(\sigma_2(i_0)-\sigma_2(i_0+1)\bigr).$$

Так как σ_2 — обратимая функция, то $\sigma_2(i_0)\neq\sigma_2(i_0+1)$. Пусть $\sigma_2(i_0)<\sigma_2(i_0+1)$. Тогда $P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)=1$. Следовательно: $\bigl|P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)\bigr|=1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)=-\operatorname{sgn}(\sigma_2)$. Пусть $\sigma_2(i_0)>\sigma_2(i_0+1)$. Тогда $P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)=-1$. Следовательно: $\bigl|P(\sigma_2\sigma_1)-P(\sigma_2)\bigr|=1$, $\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)=-\operatorname{sgn}(\sigma_2)$. □

Утверждение.

1. Пусть: $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 2$; $r\in\mathbb{N}$, $\sigma_1,\dots,\sigma_r\in S_N$, $\sigma_1,\dots,\sigma_r$ — элементарные перестановки. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma_r\cdots\sigma_1)=(-1)^r$.

2. Пусть: $N\in\mathbb{N}$, $N\geqslant 2$; $\sigma\in S_N$, σ — элементарная перестановка. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma)=-1$.

3. Пусть: $N\in\mathbb{Z}_+$; $\sigma_1,\ \sigma_2\in S_N$. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)=\operatorname{sgn}(\sigma_2)\operatorname{sgn}(\sigma_1)$.

4. Пусть: $N\in\mathbb{Z}_+$; $\sigma\in S_N$. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1})=\operatorname{sgn}(\sigma)$.

5. Пусть: $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 2$; $\sigma\in S_N$, σ — простая перестановка. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma)=-1$.

6. Пусть: $N\in\mathbb{Z}$, $N\geqslant 2$; $r\in\mathbb{N}$, $\sigma_1,\dots,\sigma_r\in S_N$, $\sigma_1,\dots,\sigma_r$ — простые перестановки. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma_r\cdots\sigma_1)=(-1)^r$.

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\operatorname{sgn}(\sigma_r\cdots\sigma_1)=\operatorname{sgn}(e\sigma_r\cdots\sigma_1)=(-1)^r\operatorname{sgn}(e)=(-1)^r.$$

2. Очевидно: $\operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^1=-1$.

3. Пусть $N\geqslant 2$. Тогда существует число $r\in\mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_{1,1},\dots,\sigma_{1,r}\in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_{1,1},\dots,\sigma_{1,r}$ — элементарные перестановки, $\sigma_1=\sigma_{1,r}\cdots\sigma_{1,1}$. Следовательно:

$$\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1)=\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_{1,r}\cdots\sigma_{1,1})=\operatorname{sgn}(\sigma_2)(-1)^r=\operatorname{sgn}(\sigma_2)\operatorname{sgn}(\sigma_1).$$

Пусть $N = 0, 1$. Тогда σ_1, $\sigma_2 = e$. Следовательно:

$$\operatorname{sgn}(\sigma_2\sigma_1) = \operatorname{sgn}(ee) = \operatorname{sgn}(e) = \operatorname{sgn}(e)\operatorname{sgn}(e) = \operatorname{sgn}(\sigma_2)\operatorname{sgn}(\sigma_1).$$

4. Очевидно: $\sigma\sigma^{-1} = e$, $\operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(e)$, $\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = 1$, $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.

5. Так как σ — простая перестановка, то существуют числа k, $m = \overline{1, N}$, удовлетворяющие условиям: $k < m$, $\sigma(k) = m$, $\sigma(m) = k$, $\sigma(i) = i$ при: $i = \overline{1, N}$, $i \neq k$, $i \neq m$. Тогда существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2(m-k)-1} \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2(m-k)-1}$ — элементарные перестановки, $\sigma = e\sigma_{2(m-k)-1} \cdots \sigma_1$. Следовательно: $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(e\sigma_{2(m-k)-1} \cdots \sigma_1) = (-1)^{2(m-k)-1}\operatorname{sgn}(e) = -1$.

6. Очевидно: $\operatorname{sgn}(\sigma_r \cdots \sigma_1) = \operatorname{sgn}(\sigma_r) \cdots \operatorname{sgn}(\sigma_1) = (-1)^r$. □

9.2. Существование и единственность определителя

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*;* F *— определитель в пространстве* $\mathbb{K}^{N\times N}$*.*

1. Пусть: k, $m = \overline{1, N}$, $k < m$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$*. Тогда:*

$$F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = -F(A_1, \ldots, A_N).$$

2. Пусть: $\sigma \in S_N$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$*. Тогда:*

$$F(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(A_1, \ldots, A_N).$$

3. Пусть $\sigma \in S_N$*. Тогда:*

$$F(I_{\sigma(1)}, \ldots, I_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

4. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$*. Тогда:*

$$F(A) = F(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N}.$$

5. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$*. Тогда:*

$$F(A) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)}.$$

Доказательство.

1. Очевидно:

$$\begin{gathered}
F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k + A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k + A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0,\\
F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) +\\
+ F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_k, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) +\\
+ F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) +\\
+ F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0,\\
F(A_1, \ldots, A_N) + F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = 0,\\
F(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_k, A_{m+1}, \ldots, A_N) = -F(A_1, \ldots, A_N).
\end{gathered}$$

2. Пусть $N \geqslant 2$. Тогда существует число $r \in \mathbb{N}$, существуют перестановки $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in S_N$, удовлетворяющие условиям: $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ — элементарные перестановки, $\sigma = \sigma_r \cdots \sigma_1$. Следовательно:

$$F(A_{\sigma(1)}, \ldots, A_{\sigma(N)}) = F(A_{(\sigma_r\cdots\sigma_1)(1)}, \ldots, A_{(\sigma_r\cdots\sigma_1)(N)}) = (-1)^r F(A_1, \ldots, A_N) =$$

$$= \operatorname{sgn}(\sigma) F(A_1, \ldots, A_N).$$

Пусть $N = 1$. Тогда $\sigma = e$. Следовательно:

$$F(A_{\sigma(1)}) = F(A_{e(1)}) = F(A_1) = \operatorname{sgn}(e) F(A_1) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(A_1).$$

3. Очевидно:

$$F(I_{\sigma(1)}, \ldots, I_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(I_1, \ldots, I_N) = \operatorname{sgn}(\sigma) F(I) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

4. Очевидно:

$$F(A) = F(A_1, \ldots, A_N) = F(I_{k_1} A_1^{k_1}, \ldots, I_{k_N} A_N^{k_N}) = F(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N}.$$

5. Очевидно:

$$F(A) = F(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N} = \sum_{\substack{k_1, \ldots, k_N = \overline{1, N}, \\ k_1, \ldots, k_N \text{ — различные числа}}} F(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N}) A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_N} F(I_{\sigma(1)}, \ldots, I_{\sigma(N)}) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)}. \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$; F_1, F_2 *— определители в пространстве* $\mathbb{K}^{N \times N}$. *Тогда* $F_1 = F_2$.

Доказательство. Очевидно, $F_1, F_2 \colon \mathbb{K}^{N \times N} \implies \mathbb{K}$. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. Тогда:

$$F_1(A) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} = F_2(A).$$

Следовательно, $F_1 = F_2$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$; $F(A) = \sum\limits_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)}$ *при* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. *Тогда* F *— определитель в пространстве* $\mathbb{K}^{N \times N}$.

Доказательство. Очевидно, $F \colon \mathbb{K}^{N \times N} \implies \mathbb{K}$.

1. Пусть: $k = \overline{1, N}$, X, Y, $A_1, \ldots, A_{k-1}$, $A_{k+1}, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. Тогда:

$$F(A_1, \ldots, A_{k-1}, X + Y, A_{k+1}, \ldots, A_N) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} (X + Y)^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} +$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} Y^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} =$$

$$= F(A_1, \ldots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \ldots, A_N) + F(A_1, \ldots, A_{k-1}, Y, A_{k+1}, \ldots, A_N).$$

2. Пусть: $k = \overline{1, N}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. Тогда:

$$F(A_1, \ldots, A_{k-1}, \lambda A_k, A_{k+1}, \ldots, A_N) =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} (\lambda A_k)^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} =$$

$$= \lambda \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} = \lambda F(A_1, \ldots, A_N).$$

3. Пусть: $k,\ m = \overline{1,N},\ k < m,\ X,\ A_1, \ldots, A_{k-1},\ A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, A_{m+1}, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$. Обозначим: $\sigma_0(k) = m$, $\sigma_0(m) = k$, $\sigma_0(i) = i$ при: $i = \overline{1,N}$, $i \neq k$, $i \neq m$. Тогда: $\sigma_0 \in S_N$, σ_0 — простая перестановка. Обозначим:

$$S_{N,1} = \big\{\sigma\colon \sigma \in S_N \wedge \sigma(k) < \sigma(m)\big\},$$
$$S_{N,2} = \big\{\sigma\colon \sigma \in S_N \wedge \sigma(k) > \sigma(m)\big\}.$$

Тогда: $S_{N,1} \cup S_{N,2} = S_N$, $S_{N,1} \cap S_{N,2} = \varnothing$, $S_{N,1},\ S_{N,2} \neq \varnothing$. Следовательно:

$$F(A_1, \ldots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \ldots, A_{m-1}, X, A_{m+1}, \ldots, A_N) =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} +$$
$$+ \sum_{\sigma \in S_{N,2}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} =$$
$$= [\text{замена: } \tilde\sigma = \sigma\sigma_0,\ \sigma \in S_{N,2};\ \sigma = \tilde\sigma\sigma_0,\ \tilde\sigma \in S_{N,1}] =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} +$$
$$+ \sum_{\tilde\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\tilde\sigma\sigma_0) A_1^{(\tilde\sigma\sigma_0)(1)} \cdots A_{k-1}^{(\tilde\sigma\sigma_0)(k-1)} X^{(\tilde\sigma\sigma_0)(k)} \times$$
$$\times A_{k+1}^{(\tilde\sigma\sigma_0)(k+1)} \cdots A_{m-1}^{(\tilde\sigma\sigma_0)(m-1)} X^{(\tilde\sigma\sigma_0)(m)} A_{m+1}^{(\tilde\sigma\sigma_0)(m+1)} \cdots A_N^{(\tilde\sigma\sigma_0)(N)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\sigma(k-1)} X^{\sigma(k)} A_{k+1}^{\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\sigma(m-1)} X^{\sigma(m)} A_{m+1}^{\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\sigma(N)} -$$
$$- \sum_{\tilde\sigma \in S_{N,1}} \operatorname{sgn}(\tilde\sigma) A_1^{\tilde\sigma(1)} \cdots A_{k-1}^{\tilde\sigma(k-1)} X^{\tilde\sigma(m)} A_{k+1}^{\tilde\sigma(k+1)} \cdots A_{m-1}^{\tilde\sigma(m-1)} X^{\tilde\sigma(k)} A_{m+1}^{\tilde\sigma(m+1)} \cdots A_N^{\tilde\sigma(N)} = 0.$$

4. Очевидно:

$$F(I) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) I_1^{\sigma(1)} \cdots I_N^{\sigma(N)} = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma) \delta_1^{\sigma(1)} \cdots \delta_N^{\sigma(N)} = \operatorname{sgn}(e) \delta_1^{e(1)} \cdots \delta_N^{e(N)} = 1. \quad \square$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$. Обозначим через $\det_N$ определитель в пространстве $\mathbb{K}^{N \times N}$. Далее обычно будем писать $\det$ вместо $\det_N$.

9.3. Основные свойства определителя

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*.*

1. Пусть: $k = \overline{1,N}$*,* $A_1, \ldots, A_{k-1}$*,* $A_{k+1}, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$*. Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_{k-1}, \theta, A_{k+1}, \ldots, A_N) = 0.$$

2. Пусть: $N \geqslant 2$*,* $k = \overline{1,N}$*,* $A_1, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^N$*,* $A_k \in L(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_{k+1}, \ldots, A_N)$*. Тогда:*

$$\det(A_1, \ldots, A_N) = 0.$$

3. *Пусть:* $A_1, \dots, A_N \in \mathbb{K}^N$, $A_1, \dots, A_N \in \mathbb{K}^N$ *— линейно зависимые столбцы. Тогда:*
$$\det(A_1, \dots, A_N) = 0.$$
4. *Пусть:* $N \geqslant 2$, $k = \overline{1, N}$, $A_1, \dots, A_N \in \mathbb{K}^N$, $X \in L(A_1, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_N)$. *Тогда:*
$$\det(A_1, \dots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \dots, A_N) = \det(A_1, \dots, A_N).$$
5. *Пусть:* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $k_1, \dots, k_N = \overline{1, N}$. *Тогда:*
$$\det(A_{k_1}, \dots, A_{k_N}) = \det(A)\det(I_{k_1}, \dots, I_{k_N}).$$
6. *Пусть* A, $B \in \mathbb{K}^{N \times N}$. *Тогда:*
$$\det(BA) = \det(B)\det(A).$$
7. *Пусть* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$. *Тогда:*
$$\det(A^T) = \det(A).$$

Доказательство.

1. Очевидно:
$$\det(A_1, \dots, A_{k-1}, \theta, A_{k+1}, \dots, A_N) = \det(A_1, \dots, A_{k-1}, 0\theta, A_{k+1}, \dots, A_N) =$$
$$= 0\det(A_1, \dots, A_{k-1}, \theta, A_{k+1}, \dots, A_N) = 0.$$

2. Так как $A_k \in L(A_1, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_N)$, то существуют числа $\alpha^1, \dots, \alpha^{k-1}$, $\alpha^{k+1}, \dots, \alpha^N$, удовлетворяющие условиям: $\alpha^1, \dots, \alpha^{k-1}$, $\alpha^{k+1}, \dots, \alpha^N \in \mathbb{K}$, $A_k = \sum\limits_{m=\overline{1,N},\, m \neq k} \alpha^m A_m$. Тогда:
$$\det(A_1, \dots, A_N) = \det\Big(A_1, \dots, A_{k-1}, \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \alpha^m A_m, A_{k+1}, \dots, A_N\Big) =$$
$$= \sum_{m=\overline{1,N},\, m\neq k} \alpha^m \det(A_1, \dots, A_{k-1}, A_m, A_{k+1}, \dots, A_N) = 0.$$

3. Пусть $N \geqslant 2$. Так как $A_1, \dots, A_N$ — линейно зависимые столбцы, то существует номер $k = \overline{1, N}$, удовлетворяющий условию $A_k \in L(A_1, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_N)$. Тогда $\det(A_1, \dots, A_N) = 0$.

Пусть $N = 1$. Так как A_1 — линейно зависимый столбец, то $A_1 = \theta$. Тогда: $\det(A_1) = \det(\theta) = 0$.

4. Очевидно:
$$\det(A_1, \dots, A_{k-1}, A_k + X, A_{k+1}, \dots, A_N) =$$
$$= \det(A_1, \dots, A_N) + \det(A_1, \dots, A_{k-1}, X, A_{k+1}, \dots, A_N) = \det(A_1, \dots, A_N).$$

5. Пусть числа $k_1, \dots, k_N$ не являются различными. Тогда: $\det(A_{k_1}, \dots, A_{k_N}) = 0$, $\det(A)\det(I_{k_1}, \dots, I_{k_N}) = 0$. Следовательно, $\det(A_{k_1}, \dots, A_{k_N}) = \det(A)\det(I_{k_1}, \dots, I_{k_N})$.

Пусть $k_1, \dots, k_N$ — различные числа. Обозначим: $\sigma(1) = k_1, \dots, \sigma(N) = k_N$. Тогда $\sigma \in S_N$. Следовательно:
$$\det(A_{k_1}, \dots, A_{k_N}) = \det(A_{\sigma(1)}, \dots, A_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A_1, \dots, A_N) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A);$$
$$\det(A)\det(I_{k_1}, \dots, I_{k_N}) = \det(A)\det(I_{\sigma(1)}, \dots, I_{\sigma(N)}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A)\det(I_1, \dots, I_N) =$$
$$= \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A)\det(I) = \operatorname{sgn}(\sigma)\det(A).$$

Тогда $\det(A_{k_1}, \dots, A_{k_N}) = \det(A)\det(I_{k_1}, \dots, I_{k_N})$.

6. Очевидно:
$$\det(BA) = \det\big((BA)_1, \ldots, (BA)_N\big) = \det(B_{k_1}A_1^{k_1}, \ldots, B_{k_N}A_N^{k_N}) =$$
$$= \det(B_{k_1}, \ldots, B_{k_N})A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N} = \det(I_{k_1}, \ldots, I_{k_N})\det(B)A_1^{k_1} \cdots A_N^{k_N} = \det(B)\det(A).$$
7. Очевидно:
$$\det(A^T) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma)(A^T)_1^{\sigma(1)} \cdots (A^T)_N^{\sigma(N)} = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma)A^1_{\sigma(1)} \cdots A^N_{\sigma(N)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma^{-1}(1)} \cdots A_N^{\sigma^{-1}(N)} = [\text{замена: } \tilde\sigma = \sigma^{-1},\ \sigma \in S_N;\ \sigma = \tilde\sigma^{-1},\ \tilde\sigma \in S_N] =$$
$$= \sum_{\tilde\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\tilde\sigma^{-1})A_1^{\tilde\sigma(1)} \cdots A_N^{\tilde\sigma(N)} = \sum_{\tilde\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\tilde\sigma)A_1^{\tilde\sigma(1)} \cdots A_N^{\tilde\sigma(N)} = \det(A). \quad \square$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, i, $j = \overline{1, N}$. Обозначим через $\overline{\Delta}_i^j(A)$ определитель матрицы, которая получается из матрицы A вычёркиванием столбца A_i и строки A^j. Будем говорить, что $\overline{\Delta}_i^j(A)$ — минор матрицы A, дополнительный к элементу A_i^j. Будем говорить, что $(-1)^{j+i}\overline{\Delta}_i^j(A)$ — алгебраическое дополнение элемента A_i^j в матрице A.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$*;* $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$. *Тогда:*
$$\det(A_1, \ldots, A_{N-1}, I_N) = \overline{\Delta}_N^N(A).$$

Доказательство. Пусть $\tilde\sigma \in S_{N-1}$. Обозначим: $\varphi(\tilde\sigma)(k) = \tilde\sigma(k)$ при $k = \overline{1, N-1}$; $\varphi(\tilde\sigma)(N) = N$. Тогда: $\varphi(\tilde\sigma) \in S_N$, $\operatorname{sgn}\big(\varphi(\tilde\sigma)\big) = \operatorname{sgn}(\tilde\sigma)$. Очевидно: φ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\varphi) = S_{N-1}$, $\mathrm{R}(\varphi) = \big\{\sigma \colon \sigma \in S_N \land \sigma(N) = N\big\}$. Тогда:
$$\det(A_1, \ldots, A_{N-1}, I_N) = \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{N-1}^{\sigma(N-1)}I_N^{\sigma(N)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{N-1}^{\sigma(N-1)}\delta_N^{\sigma(N)} = \sum_{\sigma \in S_N,\, \sigma(N) = N} \operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{N-1}^{\sigma(N-1)}\delta_N^{\sigma(N)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_N,\, \sigma(N) = N} \operatorname{sgn}(\sigma)A_1^{\sigma(1)} \cdots A_{N-1}^{\sigma(N-1)} = \big[\text{замена: } \sigma = \varphi(\tilde\sigma),\ \tilde\sigma \in S_{N-1}\big] =$$
$$= \sum_{\tilde\sigma \in S_{N-1}} \operatorname{sgn}\big(\varphi(\tilde\sigma)\big)A_1^{\varphi(\tilde\sigma)(1)} \cdots A_{N-1}^{\varphi(\tilde\sigma)(N-1)} = \sum_{\tilde\sigma \in S_{N-1}} \operatorname{sgn}(\tilde\sigma)A_1^{\tilde\sigma(1)} \cdots A_{N-1}^{\tilde\sigma(N-1)} = \overline{\Delta}_N^N(A). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$*;* $A \in \mathbb{K}^{N\times N}$, i_0, $j_0 = \overline{1, N}$. *Тогда:*
$$\det(A_1, \ldots, A_{i_0-1}, I_{j_0}, A_{i_0+1}, \ldots, A_N) = (-1)^{j_0+i_0}\overline{\Delta}_{i_0}^{j_0}(A).$$

Доказательство. Обозначим:
$$B = (A_1, \ldots, A_{i_0-1}, A_{i_0+1}, \ldots, A_N, I_{j_0}),$$
$$C = \begin{pmatrix} B^1 \\ \vdots \\ B^{j_0-1} \\ B^{j_0+1} \\ \vdots \\ B^N \\ B^{j_0} \end{pmatrix}.$$

Тогда:

$$\det(A_1, \ldots, A_{i_0-1}, I_{j_0}, A_{i_0+1}, \ldots, A_N) = (-1)^{N-i_0} \det(A_1, \ldots, A_{i_0-1}, A_{i_0+1}, \ldots, A_N, I_{j_0}) =$$

$$= (-1)^{N-i_0} \det(B) = (-1)^{N-i_0} \det \begin{pmatrix} B^1 \\ \vdots \\ B^{j_0-1} \\ B^{j_0} \\ B^{j_0+1} \\ \vdots \\ B^N \end{pmatrix} = (-1)^{N-i_0}(-1)^{N-j_0} \det \begin{pmatrix} B^1 \\ \vdots \\ B^{j_0-1} \\ B^{j_0+1} \\ \vdots \\ B^N \\ B^{j_0} \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^{N-i_0}(-1)^{N-j_0} \det(C) = (-1)^{N-i_0}(-1)^{N-j_0} \det(C_1, \ldots, C_{N-1}, C_N) =$$

$$= (-1)^{j_0+i_0} \det(C_1, \ldots, C_{N-1}, I_N) = (-1)^{j_0+i_0} \overline{\Delta}_N^N(C) = (-1)^{j_0+i_0} \overline{\Delta}_{i_0}^{j_0}(A). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{Z}$*,* $N \geqslant 2$*;* $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$*,* $i_0 = \overline{1, N}$*. Тогда:*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+i_0} \overline{\Delta}_{i_0}^j(A) A_{i_0}^j.$$

Доказательство. Очевидно:

$$\det(A) = \det(A_1, \ldots, A_{i_0-1}, A_{i_0}, A_{i_0+1}, \ldots, A_N) = \det(A_1, \ldots, A_{i_0-1}, I_j A_{i_0}^j, A_{i_0+1}, \ldots, A_N) =$$

$$= \det(A_1, \ldots, A_{i_0-1}, I_j, A_{i_0+1}, \ldots, A_N) A_{i_0}^j = \sum_{j=1}^{N} (-1)^{j+i_0} \overline{\Delta}_{i_0}^j(A) A_{i_0}^j. \quad \square$$

9.4. Метод Гаусса—Жордана для вычисления определителя

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{Z}$, $N \geqslant 2$; $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$.

Пусть: $\exists i = \overline{1, N}(A_i = \tilde{\theta})$ либо $\exists j = \overline{1, N}(A^j = \tilde{\theta})$. Тогда $\det(A) = 0$. Остановим процесс.

Пусть: $\forall i = \overline{1, N}(A_i \neq \tilde{\theta})$, $\forall j = \overline{1, N}(A^j \neq \tilde{\theta})$, $N = 2$. Тогда $\det(A) = A_1^1 A_2^2 - A_1^2 A_2^1$. Остановим процесс.

Пусть: $\forall i = \overline{1, N}(A_i \neq \tilde{\theta})$, $\forall j = \overline{1, N}(A^j \neq \tilde{\theta})$, $N \geqslant 3$. Обозначим, $N_1 = N - 1$. Тогда: $N_1 \in \mathbb{Z}$, $N_1 \geqslant 2$. Выберем числа i_0, $j_0 = \overline{1, N}$, удовлетворяющие условию $A_{i_0}^{j_0} \neq 0$. Первый вариант. Обнулим элементы, стоящие над элементом $A_{i_0}^{j_0}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $A_{i_0}^{j_0}$. Разложим полученный определитель по столбцу с номером i_0, получим число $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, получим матрицу $B_1 \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$, удовлетворяющую условию $\det(A) = \lambda_1 \det(B_1)$. Второй вариант. Обнулим элементы, стоящие левее элемента $A_{i_0}^{j_0}$, обнулим элементы, стоящие правее элемента $A_{i_0}^{j_0}$. Разложим полученный определитель по строке с номером j_0, получим число $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, получим матрицу $B_1 \in \mathbb{R}^{N_1 \times N_1}$, удовлетворяющую условию $\det(A) = \lambda_1 \det(B_1)$. Перейдём к следующему шагу.

Пусть: $\exists i = \overline{1, N_1}\big((B_1)_i = \tilde{\theta}\big)$ либо $\exists j = \overline{1, N_1}\big((B_1)^j = \tilde{\theta}\big)$. Тогда: $\det(A) = \lambda_1 \det(B_1) = 0$. Остановим процесс.

Пусть: $\forall i = \overline{1, N_1}\big((B_1)_i \neq \tilde{\theta}\big)$, $\forall j = \overline{1, N_1}\big((B_1)^j \neq \tilde{\theta}\big)$, $N_1 = 2$. Тогда: $\det(A) = \lambda_1 \det(B_1) = \lambda_1\big((B_1)_1^1 (B_1)_2^2 - (B_1)_1^2 (B_1)_2^1\big)$. Остановим процесс.

Пусть: $\forall i = \overline{1, N_1}\big((B_1)_i \neq \tilde{\theta}\big)$, $\forall j = \overline{1, N_1}\big((B_1)^j \neq \tilde{\theta}\big)$, $N_1 \geqslant 3$. Обозначим, $N_2 = N_1 - 1$. Тогда: $N_2 \in \mathbb{Z}$, $N_2 \geqslant 2$. Выберем числа i_0, $j_0 = \overline{1, N_1}$, удовлетворяющие условию $(B_1)_{i_0}^{j_0} \neq 0$.

Первый вариант. Обнулим элементы, стоящие над элементом $(B_1)_{i_0}^{j_0}$, обнулим элементы, стоящие под элементом $(B_1)_{i_0}^{j_0}$. Разложим полученный определитель по столбцу с номером i_0, получим число $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, получим матрицу $B_2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$, удовлетворяющую условию $\det(A) = \lambda_2 \det(B_2)$. Второй вариант. Обнулим элементы, стоящие левее элемента $(B_1)_{i_0}^{j_0}$, обнулим элементы, стоящие правее элемента $(B_1)_{i_0}^{j_0}$. Разложим полученный определитель по строке с номером j_0, получим число $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, получим матрицу $B_2 \in \mathbb{R}^{N_2 \times N_2}$, удовлетворяющую условию $\det(A) = \lambda_2 \det(B_2)$. Перейдём к следующему шагу.

Продолжая рассуждения, получим $\det(A)$.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.