Аналитическая геометрия

Бадьин А. В.

Лекция 7. Линейное пространство

7.1. Определение линейного пространства

Замечание. Пусть M — множество.

Пусть: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$. Далее часто будем писать $x + y$ вместо $F(x, y)$.

Пусть: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\forall x \in M \forall y \in M(x + y \in M)$. Тогда: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\mathrm{R}(F) \subseteq M$. Следовательно, $F\colon M^2 \implies M$.

Пусть $F\colon M^2 \implies M$. Тогда: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\mathrm{R}(F) \subseteq M$. Следовательно: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\forall x \in M \forall y \in M(x + y \in M)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество.

Пусть: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \mathbb{K} \times M$. Далее часто будем писать λx вместо $F(\lambda, x)$.

Пусть: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \mathbb{K} \times M$, $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in M(\lambda x \in M)$. Тогда: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \mathbb{K} \times M$, $\mathrm{R}(F) \subseteq M$. Следовательно, $F\colon \mathbb{K} \times M \implies M$.

Пусть $F\colon \mathbb{K} \times M \implies M$. Тогда: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \mathbb{K} \times M$, $\mathrm{R}(F) \subseteq M$. Следовательно: F — функция, $\mathrm{D}(F) = \mathbb{K} \times M$, $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in M(\lambda x \in M)$.

Определение (линейное пространство). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, $F_1\colon M^2 \implies M$, $F_2\colon \mathbb{K} \times M \implies M$.

Пусть существует объект $u \in M$, удовлетворяющий условиям:

1. $x + y = y + x$ при x, $y \in M$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ при x, y, $z \in M$;
3. $x + u = x$ при $x \in M$;
4. $\forall x \in M \exists y \in M(x + y = u)$;
5. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ при: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$;
6. $1x = x$ при $x \in M$;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ при: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$;
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in M$.

Будем говорить, что F_1, F_2 — линейные операции на множестве M.

Будем говорить, что: (M, F_1, F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; M — носитель пространства (M, F_1, F_2); F_1 — операция сложения пространства (M, F_1, F_2); F_2 — операция умножения пространства (M, F_1, F_2); F_1, F_2 — линейные операции пространства (M, F_1, F_2). Будем говорить, что x — вектор пространства (M, F_1, F_2), если $x \in M$. Далее часто будем отождествлять пространство (M, F_1, F_2) и множество M.

Определение (нулевой вектор линейного пространства). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Будем говорить, что u — нулевой вектор пространства L, если: $u \in L$, $\forall x \in L(x + u = x)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*. Существует единственный объект* u*, удовлетворяющий условию:* u *— нулевой вектор пространства* L*.*

Доказательство. Так как L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то существует объект u, удовлетворяющий условию: u — нулевой вектор пространства L.

Пусть u_1, u_2 — нулевые векторы пространства L. Так как: $u_1 \in L$, u_2 — нулевой вектор пространства L, то $u_1 + u_2 = u_1$. Так как: u_1 — нулевой вектор пространства L, $u_2 \in L$, то: $u_1 + u_2 = u_2 + u_1 = u_2$. Тогда $u_1 = u_2$. □

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Далее часто будем обозначать через θ нулевой вектор пространства L.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда* $\forall x \in L \exists y \in L(x + y = \theta)$*.*

Доказательство. Так как L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то существует объект u, удовлетворяющий условиям: u — нулевой вектор пространства L, $\forall x \in L \exists y \in L(x + y = u)$. Так как u, θ — нулевые векторы пространства L, то $u = \theta$. Тогда $\forall x \in L \exists y \in L(x + y = \theta)$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $a, b \in L$*. Существует единственный вектор* x*, удовлетворяющий условиям:* $x \in L$*,* $a + x = b$*.*

Доказательство. Так как $a \in L$, то существует вектор $\tilde{a}$, удовлетворяющий условиям: $\tilde{a} \in L$, $a + \tilde{a} = \theta$.

Пусть: $x \in L$, $a + x = b$. Тогда:

$$\begin{gathered}
\tilde{a} + (a + x) = \tilde{a} + b, \\
(\tilde{a} + a) + x = \tilde{a} + b, \\
(a + \tilde{a}) + x = \tilde{a} + b, \\
\theta + x = \tilde{a} + b, \\
x + \theta = \tilde{a} + b, \\
x = \tilde{a} + b.
\end{gathered}$$

Пусть: $x_1 \in L$, $a + x_1 = b$, $x_2 \in L$, $a + x_2 = b$. Тогда: $x_1 = \tilde{a} + b$, $x_2 = \tilde{a} + b$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Пусть $x = \tilde{a} + b$. Тогда: $x \in L$, $a + x = a + (\tilde{a} + b) = (a + \tilde{a}) + b = \theta + b = b + \theta = b$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. *Пусть* $x \in L$*. Тогда* $0x = \theta$*.*
2. *Пусть* $x \in L$*. Тогда* $x + (-1)x = \theta$*.*
3. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Тогда* $\lambda\theta = \theta$*.*

Доказательство.

1. Очевидно: $0x + 0x = (0 + 0)x = 0x$. С другой стороны, $0x + \theta = 0x$. Тогда $0x = \theta$.
2. Очевидно: $x + (-1)x = 1x + (-1)x = \big(1 + (-1)\big)x = 0x = \theta$.
3. Очевидно: $\lambda\theta = \lambda(0\theta) = 0(\lambda\theta) = \theta$. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть $x \in L$. Обозначим, $-x = (-1)x$. Очевидно: $-x \in L$, $x+(-x) = \theta$. Будем говорить, что $-x$ — противоположный вектор к вектору x.

Пусть x, $y \in L$. Обозначим, $y - x = (-1)x + y$. Очевидно: $y - x \in L$, $x + (y - x) = y$. Будем говорить, что $y - x$ — разность векторов y, x.

Замечание (основные свойства линейного пространства). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; (M, F_1, F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, θ — нулевой элемент пространства (M, F_1, F_2). Тогда: M — множество, $F_1 \colon M^2 \implies M$, $F_2 \colon \mathbb{K} \times M \implies M$, $\theta \in M$.

1. Пусть x, $y \in M$. Тогда $x + y = y + x$.
2. Пусть x, y, $z \in M$. Тогда $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Пусть $x \in M$. Тогда $x + \theta = x$.
4. Пусть $x \in M$. Тогда $x + (-1)x = \theta$.
5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$. Тогда $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
6. Пусть $x \in M$. Тогда $1x = x$.
7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$. Тогда $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in M$. Тогда $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
9. Пусть $x \in M$. Тогда $0x = \theta$.
10. Пусть $\lambda \in \mathbb{K}$. Тогда $\lambda\theta = \theta$.
11. Пусть a, $b \in M$. Существует единственный вектор x, удовлетворяющий условиям: $x \in M$, $a + x = b$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, $F_1 \colon M^2 \implies M$, $F_2 \colon \mathbb{K} \times M \implies M$, $\theta \in M$.

Пусть:

1. $x + y = y + x$ при x, $y \in M$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ при x, y, $z \in M$;
3. $x + \theta = x$ при $x \in M$;
4. $\forall x \in M \exists y \in M (x + y = \theta)$;
5. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ при: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$;
6. $1x = x$ при $x \in M$;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ при: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$;
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in M$.

Очевидно: (M, F_1, F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, θ — нулевой вектор пространства (M, F_1, F_2).

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, $F_1 \colon M^2 \implies M$, $F_2 \colon \mathbb{K} \times M \implies M$, $\theta \in M$.

Пусть:

1. $x + y = y + x$ при x, $y \in M$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ при x, y, $z \in M$;
3. $x + \theta = x$ при $x \in M$;
4. $x + (-1)x = \theta$ при $x \in M$;
5. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ при: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$;
6. $1x = x$ при $x \in M$;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ при: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in M$;
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ при: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in M$.

Очевидно: (M, F_1, F_2) — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, θ — нулевой вектор пространства (M, F_1, F_2).

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $\mathbb{K}^N$.

Пусть x, $y \in \mathbb{K}^N$. Обозначим:

$$x + y = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ \vdots \\ x^N + y^N \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $x+y \in \mathbb{K}^N$. Будем говорить, что $\{x+y\}_{x,y\in\mathbb{K}^N}$ — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^N$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^N$. Обозначим:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \vdots \\ \lambda x^N \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\lambda x \in \mathbb{K}^N$. Будем говорить, что $\{\lambda x\}_{\lambda\in\mathbb{K},\, x\in\mathbb{K}^N}$ — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^N$.

Обозначим:

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\tilde{\theta} \in \mathbb{K}^N$. Будем говорить, что $\tilde{\theta}$ — стандартный нулевой элемент множества $\mathbb{K}^N$.

Утверждение (линейное пространство $\mathbb{K}^N$)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* $N \in \mathbb{N}$*,* F_1 *— стандартная операция сложения на множестве* $\mathbb{K}^N$*,* F_2 *— стандартная внешняя операция умножения на множестве* $\mathbb{K}^N$*,* $\tilde{\theta}$ *— стандартный нулевой элемент множества* $\mathbb{K}^N$*. Тогда:* $(\mathbb{K}^N, F_1, F_2)$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* $\tilde{\theta}$ *— нулевой вектор пространства* $(\mathbb{K}^N, F_1, F_2)$*.*

Доказательство.

1. Пусть x, $y \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(x+y)^j = x^j + y^j = y^j + x^j = (y+x)^j.$$

Следовательно, $x + y = y + x$.

2. Пусть x, y, $z \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\bigl((x+y)+z\bigr)^j = (x^j + y^j) + z^j = x^j + (y^j + z^j) = \bigl(x + (y+z)\bigr)^j.$$

Следовательно, $(x+y)+z = x+(y+z)$.

3. Пусть $x \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(x + \tilde{\theta})^j = x^j + \tilde{\theta}^j = x^j + 0 = x^j.$$

Следовательно, $x + \tilde{\theta} = x$.

4. Пусть $x \in \mathbb{K}$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\bigl(x + (-1)x\bigr)^j = x^j + (-1)x^j = 0 = \tilde{\theta}^j.$$

Следовательно, $x + (-1)x = \tilde{\theta}$.

5. Пусть: $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((\alpha\beta)x\big)^j = (\alpha\beta)x^j = \alpha(\beta x^j) = \big(\alpha(\beta x)\big)^j.$$

Следовательно, $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

6. Пусть $x \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(1x)^j = 1x^j = x^j.$$

Следовательно, $1x = x$.

7. Пусть: $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$, $x \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((\alpha+\beta)x\big)^j = (\alpha+\beta)x^j = \alpha x^j + \beta x^j = (\alpha x + \beta x)^j.$$

Следовательно, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x,\ y \in \mathbb{K}^N$. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(\lambda(x+y)\big)^j = \lambda(x^j + y^j) = \lambda x^j + \lambda y^j = (\lambda x + \lambda y)^j.$$

Следовательно, $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.

Итак: $(\mathbb{K}^N, F_1, F_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $\tilde{\theta}$ — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}^N, F_1, F_2)$. □

Утверждение (линейное пространство $\vec{E}^N$)**.** *Пусть: $N = \overline{1, 3}$, F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\vec{E}^N$, F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\vec{E}^N$, θ — стандартный нулевой элемент множества $\vec{E}^N$. Тогда: $(\vec{E}^N, F_1, F_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, θ — нулевой вектор пространства $(\vec{E}^N, F_1, F_2)$.*

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть $A,\ B \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим:

$$(A+B)_i^j = A_i^j + B_i^j, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}.$$

Очевидно, $A+B \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что $\{A+B\}_{A,B \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}}$ — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Обозначим:

$$(\lambda A)_i^j = \lambda A_i^j, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}.$$

Очевидно, $\lambda A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что $\{\lambda A\}_{\lambda \in \mathbb{K},\, A \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}}$ — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Обозначим:

$$\Theta_i^j = 0, \quad i = \overline{1, N_1},\ j = \overline{1, N_2}.$$

Очевидно, $\Theta \in \mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Будем говорить, что Θ — стандартный нулевой элемент множества $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Утверждение (линейное пространство $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$)**.** *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$, F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, Θ — стандартный нулевой элемент множества $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$. Тогда: $(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, F_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, Θ — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, F_2)$.*

Доказательство.

1. Пусть A, $B \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$(A+B)_i^j = A_i^j + B_i^j = B_i^j + A_i^j = (B+A)_i^j.$$

Следовательно, $A+B=B+A$.

2. Пусть A, B, $C \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\big((A+B)+C\big)_i^j = (A_i^j+B_i^j)+C_i^j = A_i^j+(B_i^j+C_i^j) = \big(A+(B+C)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(A+B)+C = A+(B+C)$.

3. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$(A+\Theta)_i^j = A_i^j + \Theta_i^j = A_i^j + 0 = A_i^j.$$

Следовательно, $A+\Theta = A$.

4. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\big(A+(-1)A\big)_i^j = A_i^j + (-1)A_i^j = 0 = \Theta_i^j.$$

Следовательно, $A+(-1)A=\Theta$.

5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\big((\alpha\beta)A\big)_i^j = (\alpha\beta)A_i^j = \alpha(\beta A_i^j) = \big(\alpha(\beta A)\big)_i^j.$$

Следовательно, $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$.

6. Пусть $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$(1A)_i^j = 1A_i^j = A_i^j.$$

Следовательно, $1A=A$.

7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $A \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\big((\alpha+\beta)A\big)_i^j = (\alpha+\beta)A_i^j = \alpha A_i^j + \beta A_i^j = (\alpha A+\beta A)_i^j.$$

Следовательно, $(\alpha+\beta)A = \alpha A+\beta A$.

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, A, $B \in \mathbb{K}^{N_2\times N_1}$. Пусть $i=\overline{1,N_1}$, $j=\overline{1,N_2}$. Тогда:

$$\big(\lambda(A+B)\big)_i^j = \lambda(A_i^j+B_i^j) = \lambda A_i^j + \lambda B_i^j = (\lambda A+\lambda B)_i^j.$$

Следовательно, $\lambda(A+B) = \lambda A+\lambda B$.

Итак: $(\mathbb{K}^{N_2\times N_1}, F_1, F_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, Θ — нулевой элемент пространства $(\mathbb{K}^{N_2\times N_1}, F_1, F_2)$. □

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим множество $P(L)$ (здесь $P(L) = \{Q\colon Q \subseteq L\}$).

Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq L$. Обозначим:

$$Q_1+Q_2 = \{x_1+x_2\colon x_1\in Q_1 \wedge x_2 \in Q_2\} = \big\{u\colon \exists x_1 \exists x_2 (x_1\in Q_1 \wedge x_2\in Q_2 \wedge u = x_1+x_2)\big\}.$$

Очевидно, $Q_1+Q_2 \subseteq L$. Будем говорить, что $\{Q_1+Q_2\}_{Q_1,Q_2\subseteq L}$ — стандартная операция сложения на множестве $P(L)$.

Пусть: $\lambda\in\mathbb{K}$, $Q\subseteq L$. Обозначим:

$$\lambda Q = \{\lambda x\colon x\in Q\} = \big\{u\colon \exists x(x\in Q \wedge u=\lambda x)\big\}.$$

Очевидно, $\lambda Q\subseteq L$. Будем говорить, что $\{\lambda Q\}_{\lambda\in\mathbb{K},\, Q\subseteq L}$ — стандартная внешняя операция умножения на множестве $P(L)$.

Очевидно, $\{\theta\}\subseteq L$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. *Пусть* Q_1*,* $Q_2 \subseteq L$*. Тогда* $Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_1$*.*
2. *Пусть* Q_1*,* Q_2*,* $Q_3 \subseteq L$*. Тогда* $(Q_1 + Q_2) + Q_3 = Q_1 + (Q_2 + Q_3)$*.*
3. *Пусть* $Q \subseteq L$*. Тогда* $Q + \{\theta\} = Q$*.*
4. *Пусть:* α*,* $\beta \in \mathbb{K}$*,* $Q \subseteq L$*. Тогда* $(\alpha\beta)Q = \alpha(\beta Q)$*.*
5. *Пусть* $Q \subseteq L$*. Тогда* $1Q = Q$*.*
6. *Пусть:* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* Q_1*,* $Q_2 \subseteq L$*. Тогда* $\lambda(Q_1 + Q_2) = \lambda Q_1 + \lambda Q_2$*.*
7. *Справедливо утверждение* $0\varnothing = \varnothing$*. Пусть:* $Q \subseteq L$*,* $Q \neq \varnothing$*. Тогда* $0Q = \{\theta\}$*.*
8. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{K}$*. Тогда* $\lambda\{\theta\} = \{\theta\}$*.*

Доказательство.

1. Пусть $x \in Q_1 + Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = x_1 + x_2$. Следовательно:

$$x = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \in Q_2 + Q_1.$$

Пусть $x \in Q_2 + Q_1$. Тогда существуют векторы x_2, x_1, удовлетворяющие условиям: $x_2 \in Q_2$, $x_1 \in Q_1$, $x = x_2 + x_1$. Следовательно:

$$x = x_2 + x_1 = x_1 + x_2 \in Q_1 + Q_2.$$

Итак, $Q_1 + Q_2 = Q_2 + Q_1$.

2. Пусть $x \in (Q_1 + Q_2) + Q_3$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_3 \in Q_3$, $x = (x_1 + x_2) + x_3$. Следовательно:

$$x = (x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3) \in Q_1 + (Q_2 + Q_3).$$

Пусть $x \in Q_1 + (Q_2 + Q_3)$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x_3 \in Q_3$, $x = x_1 + (x_2 + x_3)$. Следовательно:

$$x = x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3 \in (Q_1 + Q_2) + Q_3.$$

Итак, $(Q_1 + Q_2) + Q_3 = Q_1 + (Q_2 + Q_3)$.

3. Пусть $x \in Q + \{\theta\}$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = x_1 + \theta$. Следовательно:

$$x = x_1 + \theta = x_1 \in Q.$$

Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$x = x + \theta \in Q + \{\theta\}.$$

Итак, $Q + \{\theta\} = Q$.

4. Пусть $x \in (\alpha\beta)Q$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = (\alpha\beta)x_1$. Следовательно:

$$x = (\alpha\beta)x_1 = \alpha(\beta x_1) \in \alpha(\beta Q).$$

Пусть $x \in \alpha(\beta Q)$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = \alpha(\beta x_1)$. Следовательно:

$$x = \alpha(\beta x_1) = (\alpha\beta)x_1 \in (\alpha\beta)Q.$$

Итак, $(\alpha\beta)Q = \alpha(\beta Q)$.

5. Пусть $x \in 1Q$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = 1x_1$. Следовательно:

$$x = 1x_1 = x_1 \in Q.$$

Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$x = 1x \in 1Q.$$

Итак, $1Q = Q$.

6. Пусть $x \in \lambda(Q_1 + Q_2)$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q_1$, $x_2 \in Q_2$, $x = \lambda(x_1 + x_2)$. Следовательно:

$$x = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 \in \lambda Q_1 + \lambda Q_2.$$

Пусть $x \in \lambda Q_1 + \lambda Q_2$. Тогда существуют векторы x_1, x_2, удовлетворяющие условиям: $x_1 \in Q$, $x_2 \in Q_2$, $x = \lambda x_1 + \lambda x_2$. Следовательно:

$$x = \lambda x_1 + \lambda x_2 = \lambda(x_1 + x_2) \in \lambda(Q_1 + Q_2).$$

Итак, $\lambda(Q_1 + Q_2) = \lambda Q_1 + \lambda Q_2$.

7. Очевидно, $0\varnothing = \varnothing$. Пусть: $Q \subseteq L$, $Q \neq \varnothing$. Пусть $x \in 0Q$. Тогда существует вектор x_1, удовлетворяющий условиям: $x_1 \in Q$, $x = 0x_1$. Следовательно:

$$x = 0x_1 = \theta \in \{\theta\}.$$

Пусть $x \in \{\theta\}$. Тогда $x = \theta$. Так как $Q \neq \varnothing$, то существует вектор x_1, удовлетворяющий условию $x_1 \in Q$. Тогда:

$$x = \theta = 0x_1 \in 0Q.$$

Итак, $0Q = \{\theta\}$.

8. Пусть $x \in \lambda\{\theta\}$. Тогда $x = \lambda\theta$. Следовательно:

$$x = \lambda\theta = \theta \in \{\theta\}.$$

Пусть $x \in \{\theta\}$. Тогда $x = \theta$. Следовательно:

$$x = \theta = \lambda\theta \in \lambda\{\theta\}. \quad \square$$

7.2. Линейная комбинация векторов, линейная зависимость векторов

Определение (линейная комбинация векторов). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$.

Будем говорить, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k x_k$ — линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_r$ с коэффициентами $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$.

Далее часто будем писать $\lambda^k x_k$ вместо $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k x_k$ (частный случай *правила суммирования Эйнштейна*).

Определение (линейная оболочка векторов, линейная зависимость векторов, линейная независимость векторов). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$.

Обозначим:

$$L(x_1, \ldots, x_r) = \{\lambda^k x_k \colon \lambda^1 \in \mathbb{K} \wedge \cdots \wedge \lambda^r \in \mathbb{K}\} =$$
$$= \big\{u \colon \exists \lambda^1 \cdots \exists \lambda^r (\lambda^1 \in \mathbb{K} \wedge \cdots \wedge \lambda^r \in \mathbb{K} \wedge u = \lambda^k x_k)\big\}.$$

Очевидно, $L(x_1, \ldots, x_r) \subseteq L$. Будем говорить, что $L(x_1, \ldots, x_r)$ — линейная оболочка векторов $x_1, \ldots, x_r$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда: $x_k = \delta_k^m x_m \in L(x_1, \ldots, x_r)$ (здесь: $\delta_k^m = 0$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$; $\delta_k^m = 1$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k = m$).

Будем говорить, что по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, если для любых чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r$, удовлетворяющих условиям: $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r \in \mathbb{K}$, $\alpha^k x_k = \beta^k x_k$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1, r} (\alpha^k = \beta^k)$.

Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы, если существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1, r} (\lambda^k \neq 0)$.

Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы, если для любых чисел $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, удовлетворяющих условиям: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, $\lambda^k x_k = \theta$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1, r} (\lambda^k = 0)$.

Утверждение (критерий линейной зависимости векторов)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. Пусть $x \in L$*. Вектор* x *является линейно зависимым тогда и только тогда, когда* $x = \theta$*.*

2. Пусть: $r \in \mathbb{Z}$*,* $r \geqslant 2$*,* $x_1, \ldots, x_r \in L$*. Матрицы* $x_1, \ldots, x_r$ *являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда существует номер* $k_0 = \overline{1, r}$*, удовлетворяющий условию* $x_{k_0} \in L(x_1, \ldots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \ldots, x_r)$*.*

Доказательство.

1. Пусть x — линейно зависимый вектор. Тогда существует число $\lambda \in \mathbb{K}$, удовлетворяющее условиям: $\lambda x = \theta$, $\lambda \neq 0$. Следовательно, $x = \theta$.

Пусть $x = \theta$. Тогда $1x = \theta$. Так как $1 \neq 0$, то x — линейно зависимый вектор.

2. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^N \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1, r} (\lambda^k \neq 0)$. Выберем номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $\lambda^{k_0} \neq 0$. Тогда:

$$\lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^{k_0-1} x_{k_0-1} + \lambda^{k_0} x_{k_0} + \lambda^{k_0+1} x_{k_0+1} + \cdots + \lambda^r x_r = \theta,$$
$$x_{k_0} = \frac{-\lambda^1}{\lambda_{k_0}} x_1 + \cdots + \frac{-\lambda^{k_0-1}}{\lambda_{k_0}} x_{k_0-1} + \frac{-\lambda^{k_0+1}}{\lambda_{k_0}} x_{k_0+1} + \cdots + \frac{-\lambda^r}{\lambda_{k_0}} x_r,$$
$$x_{k_0} \in L(x_1, \ldots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \ldots, x_r).$$

Пусть существует номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $x_{k_0} \in L(x_1, \ldots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \ldots, x_r)$. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^{k_0-1}$, $\lambda^{k_0+1}, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию:

$$x_{k_0} = \lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^{k_0-1} x_{k_0-1} + \lambda^{k_0+1} x_{k_0+1} + \cdots + \lambda^r x_r.$$

Следовательно:

$$(-\lambda^1) x_1 + \cdots + (-\lambda^{k_0-1}) x_{k_0-1} + 1 x_{k_0} + (-\lambda^{k_0+1}) x_{k_0+1} + \cdots + (-\lambda^r) x_r = \theta.$$

Так как $1 \neq 0$, то $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. $\square$

Утверждение (критерий линейной независимости векторов)**.** *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in L$*. Векторы* $x_1, \ldots, x_r$ *являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда по любой линейной комбинации векторов* $x_1, \ldots, x_r$ *однозначно восстанавливаются её коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы. Пусть: $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r \in \mathbb{K}$, $\alpha^k x_k = \beta^k x_k$. Тогда $(\alpha^k - \beta^k)x_k = \theta$. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы, то $\forall k = \overline{1,r}(\alpha^k - \beta^k = 0)$. Тогда $\forall k = \overline{1,r}(\alpha^k = \beta^k)$. Следовательно, по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты.

Пусть по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты. Пусть: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, $\lambda^k x_k = \theta$. Тогда:

$$\lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^r x_r = 0x_1 + \cdots + 0x_r.$$

Так как по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, то $\forall k = \overline{1,r}(\lambda^k = 0)$. Тогда $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r, x \in L$*,* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно независимые векторы,* $x_1, \ldots, x_r, x$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $x \in L(x_1, \ldots, x_r)$*.*

Доказательство. Так как $x_1, \ldots, x_r, x$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^{r+1} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^r x_r + \lambda^{r+1} x = \theta$, $\exists k = \overline{1, r+1}(\lambda^k \neq 0)$. Предположим, что $\lambda^{r+1} = 0$. Тогда: $\lambda^1 x_1 + \cdots + \lambda^r x_r = \theta$, $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$ (что противоречит утверждению: $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы). Итак, $\lambda^{r+1} \neq 0$. Тогда:

$$x = \frac{-\lambda^1}{\lambda^{r+1}} x_1 + \cdots + \frac{-\lambda^r}{\lambda^{r+1}} x_r,$$
$$x \in L(x_1, \ldots, x_r). \quad \square$$

Замечание (перестановки).

1. Пусть M — некоторое множество.

   Будем говорить, что σ — перестановка множества M, если: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) = M$.

   Обозначим через $S(M)$ множество всех перестановок множества M.

   Пусть $\sigma_1, \sigma_2 \in S(M)$. Обозначим, $\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Очевидно: $\sigma_2\sigma_1$ — обратимая функция,

$$\mathrm{D}(\sigma_2\sigma_1) = \big\{x \colon x \in \mathrm{D}(\sigma_1) \land \sigma_1(x) \in \mathrm{D}(\sigma_2)\big\} = \big\{x \colon x \in M \land \sigma_1(x) \in M\big\} = \{x \colon x \in M\} = M,$$
$$\mathrm{R}(\sigma_2\sigma_1) = (\sigma_2\sigma_1)[M] = \sigma_2\big[\sigma_1[M]\big] = \sigma_2\big[\mathrm{R}(\sigma_1)\big] = \sigma_2[M] = \mathrm{R}(\sigma_2) = M.$$

Тогда $\sigma_2\sigma_1 \in S(M)$.

   Обозначим: $e(x) = x$ при $x \in M$. Очевидно, $e \in S(M)$.

   Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: σ^{-1} — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma^{-1}) = \mathrm{R}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma^{-1}) = \mathrm{D}(\sigma) = M$. Тогда $\sigma^{-1} \in S(M)$.

   Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S(M)$. Очевидно, $(\sigma_3\sigma_2)\sigma_1 = \sigma_3(\sigma_2\sigma_1)$.

   Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma e = \sigma$, $e\sigma = \sigma$.

   Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma\sigma^{-1} = e$, $\sigma^{-1}\sigma = e$.

2. Пусть: M — некоторое **конечное** множество, σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq M$. Так как $\mathrm{D}(\sigma)$ — конечное множество, то $\mathrm{R}(\sigma)$ — конечное множество. Так как σ — обратимая функция, то: $\operatorname{card}\bigl(\mathrm{R}(\sigma)\bigr) = \operatorname{card}\bigl(\mathrm{D}(\sigma)\bigr) = \operatorname{card}(M)$. Так как: $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq M$, $\operatorname{card}\bigl(\mathrm{R}(\sigma)\bigr) = \operatorname{card}(M)$, то $\mathrm{R}(\sigma) = M$. Тогда $\sigma \in S(M)$.

3. Обозначим, $S_0 = S(\varnothing)$.
Пусть $r \in \mathbb{N}$. Обозначим, $S_r = S\bigl(\{1, \ldots, r\}\bigr)$.

4. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_r = \overline{1, r}$, $k_1, \ldots, k_r$ — различные числа. Обозначим: $\sigma(1) = k_1, \ldots, \sigma(r) = k_r$. Очевидно: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = \{1, \ldots, r\}$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq \{1, \ldots, r\}$. Тогда $\sigma \in S_r$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$*,* $\sigma \in S_r$*,* $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Так как $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 x_{\sigma(1)} + \cdots + \lambda^r x_{\sigma(r)} = \theta$, $\exists m = \overline{1, r}(\lambda^m \neq 0)$. Тогда:

$$\lambda^{\sigma^{-1}(1)} x_1 + \cdots + \lambda^{\sigma^{-1}(r)} x_r = \theta, \quad \exists k = \overline{1, r}(\lambda^{\sigma^{-1}(k)} \neq 0).$$

Следовательно, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$*,* $r_0 \in \mathbb{N}$*,* $k_1, \ldots, k_{r_0} = \overline{1, r}$*,* $k_1 < \cdots < k_{r_0}$*,* $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_0}}$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Так как $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_0}}$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_0} \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $\alpha^1 x_{k_1} + \cdots + \alpha^{r_0} x_{k_{r_0}} = \theta$, $\exists m = \overline{1, r_0}(\alpha^m \neq 0)$. Обозначим: $\beta^{k_1} = \alpha^1, \ldots, \beta^{k_{r_0}} = \alpha^{r_0}$, $\beta^k = 0$ при: $k = \overline{1, r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Тогда:

$$\beta^{k_1} x_{k_1} + \cdots + \beta^{k_{r_0}} x_{k_{r_0}} = \theta, \quad \exists m = \overline{1, r_0}(\beta^{k_m} \neq 0);$$
$$\beta^1 x_1 + \cdots + \beta^r x_r = \theta, \quad \exists k = \overline{1, r}(\beta^k \neq 0).$$

Следовательно, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

7.3. Подпространство линейного пространства

Определение (ядро векторной функции). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; F — функция, $\mathrm{R}(F) \subseteq L$. Обозначим:

$$\ker(F) = \bigl\{x \colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge F(x) = \theta\bigr\}.$$

Множество $\ker(F)$ называется ядром функции F или множеством нулей функции F или множеством корней функции F. Очевидно:

$$\ker(F) = \bigl\{x \colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge F(x) = \theta\bigr\} = \bigl\{x \colon x \in \mathrm{D}(F) \wedge F(x) \in \{\theta\}\bigr\} = \mathrm{D}\bigl(F, \{\theta\}\bigr).$$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — множество, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим множество $\operatorname{Fun}(Q, L)$.

Пусть φ_1, $\varphi_2\colon Q \implies L$. Обозначим:

$$(\varphi_1+\varphi_2)(x) = \varphi_1(x)+\varphi_2(x), \quad x \in Q.$$

Очевидно, $\varphi_1+\varphi_2\colon Q \implies L$. Будем говорить, что $\{\varphi_1+\varphi_2\}_{\varphi_1,\varphi_2\colon Q\implies L}$ — стандартная операция сложения на множестве $\operatorname{Fun}(Q,L)$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi\colon Q \implies L$. Обозначим:

$$(\lambda\varphi)(x) = \lambda\varphi(x), \quad x \in Q.$$

Очевидно, $\lambda\varphi\colon Q \implies L$. Будем говорить, что $\{\lambda\varphi\}_{\lambda\in\mathbb{K},\,\varphi\colon Q\implies L}$ — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\operatorname{Fun}(Q,L)$.

Обозначим:

$$\Theta(x) = \theta, \quad x \in Q.$$

Очевидно, $\Theta\colon Q \implies L$. Будем говорить, что Θ — стандартный нулевой элемент множества $\operatorname{Fun}(Q,L)$.

Утверждение (линейное пространство векторных функций). *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}\}$*;* Q *— множество,* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* F_1 *— стандартная операция сложения на множестве* $\operatorname{Fun}(Q,L)$*,* F_2 *— стандартная внешняя операция умножения на множестве* $\operatorname{Fun}(Q,L)$*,* Θ *— стандартный нулевой элемент множества* $\operatorname{Fun}(Q,L)$*. Тогда:* $\bigl(\operatorname{Fun}(Q,L),F_1,F_2\bigr)$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* Θ *— нулевой вектор пространства* $\bigl(\operatorname{Fun}(Q,L),F_1,F_2\bigr)$.

Доказательство.

1. Пусть φ_1, $\varphi_2\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$(\varphi_1+\varphi_2)(x) = \varphi_1(x)+\varphi_2(x) = \varphi_2(x)+\varphi_1(x) = (\varphi_2+\varphi_1)(x).$$

Следовательно, $\varphi_1+\varphi_2 = \varphi_2+\varphi_1$.

2. Пусть φ_1, φ_2, $\varphi_3\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\bigl((\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_3\bigr)(x) = \bigl(\varphi_1(x)+\varphi_2(x)\bigr)+\varphi_3(x) = \varphi_1(x)+\bigl(\varphi_2(x)+\varphi_3(x)\bigr) = \\ = \bigl(\varphi_1+(\varphi_2+\varphi_3)\bigr)(x).$$

Следовательно, $(\varphi_1+\varphi_2)+\varphi_3 = \varphi_1+(\varphi_2+\varphi_3)$.

3. Пусть $\varphi\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$(\varphi+\Theta)(x) = \varphi(x)+\Theta(x) = \varphi(x)+\theta = \varphi(x).$$

Следовательно, $\varphi+\Theta = \varphi$.

4. Пусть $\varphi\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\bigl(\varphi+(-1)\varphi\bigr)(x) = \varphi(x)+(-1)\varphi(x) = \theta = \Theta(x).$$

Следовательно, $\varphi+(-1)\varphi = \Theta$.

5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $\varphi\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\bigl((\alpha\beta)\varphi\bigr)(x) = (\alpha\beta)\varphi(x) = \alpha\bigl(\beta\varphi(x)\bigr) = \bigl(\alpha(\beta\varphi)\bigr)(x).$$

Следовательно, $(\alpha\beta)\varphi = \alpha(\beta\varphi)$.

6. Пусть $\varphi\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\bigl(1\varphi\bigr)(x) = 1\varphi(x) = \varphi(x).$$

Следовательно, $1\varphi = \varphi$.

7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $\varphi\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\bigl((\alpha+\beta)\varphi\bigr)(x) = (\alpha+\beta)\varphi(x) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(x) = \bigl(\alpha\varphi + \beta\varphi\bigr)(x).$$

Следовательно, $(\alpha+\beta)\varphi = \alpha\varphi + \beta\varphi$.

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, φ_1, $\varphi_2\colon Q \implies L$. Пусть $x \in Q$. Тогда:

$$\bigl(\lambda(\varphi_1+\varphi_2)\bigr)(x) = \lambda\bigl(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)\bigr) = \lambda\varphi_1(x) + \lambda\varphi_2(x) = \bigl(\lambda\varphi_1 + \lambda\varphi_2\bigr)(x).$$

Следовательно, $\lambda(\varphi_1+\varphi_2) = \lambda\varphi_1 + \lambda\varphi_2$.

Итак: $\bigl(\mathrm{Fun}(Q,L), F_1, F_2\bigr)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, Θ — нулевой вектор пространства $\bigl(\mathrm{Fun}(Q,L), F_1, F_2\bigr)$. □

Замечание. Пусть: M — множество, F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$.

Пусть: $Q \subseteq M$, $\tilde{F}$ — ограничение функции F на множество Q^2. Тогда: $\tilde{F}$ — функция, $\mathrm{D}(\tilde{F}) = Q^2$, $\tilde{F}(x,y) = F(x,y)$ при x, $y \in Q$. Далее часто будем писать: $x+y$ вместо $F(x,y)$; $x \oplus y$ вместо $\tilde{F}(x,y)$.

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, F — функция, $\mathrm{D}(F) = \mathbb{K} \times M$.

Пусть: $\mathbb{K}_0 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$; $Q \subseteq M$, $\tilde{F}$ — ограничение функции F на множество $\mathbb{K}_0 \times Q$. Тогда: $\tilde{F}$ — функция, $\mathrm{D}(\tilde{F}) = \mathbb{K}_0 \times Q$, $\tilde{F}(\lambda,x) = F(\lambda,x)$ при: $\lambda \in \mathbb{K}_0$, $x \in Q$. Далее часто будем писать: λx вместо $F(\lambda,x)$; $\lambda \otimes x$ вместо $\tilde{F}(\lambda,x)$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* (M, F_1, F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* θ *— нулевой вектор пространства* (M, F_1, F_2)*.*

Пусть: $\mathbb{K}_0 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*,* $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$*;* $\tilde{F}_2$ *— ограничение функции* F_2 *на множество* $\mathbb{K}_0 \times M$*. Тогда:* $(M, F_1, \tilde{F}_2)$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}_0$*,* θ *— нулевой вектор пространства* $(M, F_1, \tilde{F}_2)$*.*

Доказательство. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}_0$, $x \in M$. Тогда: $\lambda \otimes x = \lambda x \in M$.

1. Пусть x, $y \in M$. Тогда $x+y = y+x$.
2. Пусть x, y, $z \in M$. Тогда $(x+y)+z = x+(y+z)$.
3. Пусть $x \in M$. Тогда $x+\theta = x$.
4. Пусть $x \in M$. Тогда существует объект $y \in M$, удовлетворяющий условию $x+y = \theta$.
5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}_0$, $x \in M$. Тогда:

$$(\alpha\beta) \otimes x = (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) = \alpha \otimes (\beta \otimes x).$$

6. Пусть $x \in M$. Тогда:

$$1 \otimes x = 1x = x.$$

7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}_0$, $x \in M$. Тогда:

$$(\alpha+\beta) \otimes x = (\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x = \alpha \otimes x + \beta \otimes x.$$

8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}_0$, x, $y \in M$. Тогда:

$$\lambda \otimes (x+y) = \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y = \lambda \otimes x + \lambda \otimes y.$$

Итак: $(M, F_1, \tilde{F}_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}_0$, θ — нулевой вектор пространства $(M, F_1, \tilde{F}_2)$. □

Замечание (линейное пространство $\mathbb{K}^N(\mathbb{K}_0)$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; $N \in \mathbb{N}$, F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^N$, F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^N$, $\tilde{\theta}$ — стандартный нулевой элемент множества $\mathbb{K}^N$.

Пусть: $\mathbb{K}_0 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$; $\tilde{F}_2$ — ограничение функции F_2 на множество $\mathbb{K}_0 \times M$. Тогда: $(\mathbb{K}^N, F_1, \tilde{F}_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}_0$, $\tilde{\theta}$ — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}^N, F_1, \tilde{F}_2)$. Обозначим, $\mathbb{K}^N(\mathbb{K}_0) = (\mathbb{K}^N, F_1, \tilde{F}_2)$.

Замечание (линейное пространство $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}(\mathbb{K}_0)$). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; N_1, $N_2 \in \mathbb{N}$, F_1 — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, F_2 — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$, Θ — стандартный нулевой элемент множества $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}$.

Пусть: $\mathbb{K}_0 \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$, $\mathbb{K}_0 \subseteq \mathbb{K}$; $\tilde{F}_2$ — ограничение функции F_2 на множество $\mathbb{K}_0 \times M$. Тогда: $(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, \tilde{F}_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}_0$, Θ — нулевой вектор пространства $(\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, \tilde{F}_2)$. Обозначим, $\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}(\mathbb{K}_0) = (\mathbb{K}^{N_2 \times N_1}, F_1, \tilde{F}_2)$.

Определение (подпространство линейного пространства). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Будем говорить, что Q — подпространство пространства L, если:
1. $Q \subseteq L$;
2. $Q \neq \varnothing$;
3. $\forall x \in Q \forall y \in Q (x + y \in Q)$;
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K} \forall x \in Q (\lambda x \in Q)$.

Замечание (простейшие подпространства). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Очевидно, $\{\theta\}$, L — подпространства пространства L.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in L$. Тогда $L(x_1, \ldots, x_r)$ — подпространство пространства L.*

Доказательство. Очевидно: $L(x_1, \ldots, x_r) \subseteq L$, $0x_1 + \cdots + 0x_r \in L(x_1, \ldots, x_r)$.

Пусть u, $v \in L(x_1, \ldots, x_r)$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условиям: $u = \alpha^k x_k$, $v = \beta^k x_k$. Следовательно:

$$u + v = (\alpha^k x_k) + (\beta^k x_k) = (\alpha^k + \beta^k) x_k \in L(x_1, \ldots, x_r).$$

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $u \in L(x_1, \ldots, x_r)$. Тогда существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^r \in \mathbb{K}$, удовлетворяющие условию $u = \alpha^k x_k$. Следовательно:

$$\lambda u = \lambda(\alpha^k x_k) = (\lambda \alpha^k) x_k \in L(x_1, \ldots, x_r).$$

Итак, $L(x_1, \ldots, x_r)$ — подпространство пространства L. □

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$; Q — подпространство пространства L. Тогда $\theta \in Q$.*

Доказательство. Так как Q — подпространство пространства L, то существует вектор x, удовлетворяющий условию $x \in Q$. Так как Q — подпространство пространства L, то: $\theta = 0x \in Q$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* (M, F_1, F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* θ *— нулевой вектор пространства* (M, F_1, F_2)*.*

Пусть: Q *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*,* $\tilde{F}_1$ *— ограничение функции* F_1 *на множество* Q^2*,* $\tilde{F}_2$ *— ограничение функции* F_2 *на множество* $\mathbb{K} \times Q$*. Тогда:* $(Q, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*,* θ *— нулевой вектор пространства* $(Q, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$*.*

Доказательство. Пусть x, $y \in Q$. Так как Q — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то: $x \oplus y = x + y \in Q$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q$. Так как Q — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то: $\lambda \otimes x = \lambda x \in Q$.

Так как Q — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то $\theta \in Q$.

1. Пусть x, $y \in Q$. Тогда:
$$x \oplus y = x + y = y + x = y \oplus x.$$
2. Пусть x, y, $z \in Q$. Тогда:
$$(x \oplus y) \oplus z = (x + y) + z = x + (y + z) = x \oplus (y \oplus z).$$
3. Пусть $x \in Q$. Тогда:
$$x \oplus \theta = x + \theta = x.$$
4. Пусть $x \in Q$. Тогда:
$$x \oplus (-1) \otimes x = x + (-1)x = \theta.$$
5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in Q$. Тогда:
$$(\alpha\beta) \otimes x = (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x) = \alpha \otimes (\beta \otimes x).$$
6. Пусть $x \in Q$. Тогда:
$$1 \otimes x = 1x = x.$$
7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{K}$, $x \in Q$. Тогда:
$$(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x = \alpha \otimes x \oplus \beta \otimes x.$$
8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, x, $y \in Q$. Тогда:
$$\lambda \otimes (x \oplus y) = \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y = \lambda \otimes x \oplus \lambda \otimes y.$$

Итак: $(Q, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, θ — нулевой вектор пространства $(Q, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* (M, F_1, F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

Пусть: $Q \subseteq M$*,* $\tilde{F}_1$ *— ограничение функции* F_1 *на множество* Q^2*,* $\tilde{F}_2$ *— ограничение функции* F_2 *на множество* $\mathbb{K} \times Q$*,* $(Q, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*. Тогда* Q *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*.*

Доказательство. По условию, $Q \subseteq M$. Так как $(Q, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$ — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, то $Q \neq \varnothing$.

Пусть x, $y \in Q$. Тогда: $x + y = x \oplus y \in Q$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q$. Тогда: $\lambda x = \lambda \otimes x \in Q$.

Итак, Q — подпространство пространства (M, F_1, F_2). □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* (M, F_1, F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

Пусть: Q_1 *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*,* $\tilde{F}_1$ *— ограничение функции* F_1 *на множество* Q_1^2*,* $\tilde{F}_2$ *— ограничение функции* F_2 *на множество* $\mathbb{K} \times Q_1$*.*

Пусть Q_2 *— подпространство пространства* $(Q_1, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$*. Тогда:* $Q_2 \subseteq Q_1$*,* Q_2 *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*.*

Доказательство. Так как Q_1 — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то $Q_1 \subseteq M$. Так как Q_2 — подпространство пространства $(Q_1, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$, то: $Q_2 \subseteq Q_1$, $Q_2 \neq \varnothing$. Так как: $Q_1 \subseteq M$, $Q_2 \subseteq Q_1$, то $Q_2 \subseteq M$.

Пусть x, $y \in Q_2$. Так как Q_2 — подпространство пространства $(Q_1, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$, то: $x + y = x \oplus y \in Q_2$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q_2$. Так как Q_2 — подпространство пространства $(Q_1, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$, то: $\lambda x = \lambda \otimes x \in Q_2$.

Итак: $Q_2 \subseteq Q_1$, Q_2 — подпространство пространства (M, F_1, F_2). □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* (M, F_1, F_2) *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

Пусть: Q_1 *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*,* $\tilde{F}_1$ *— ограничение функции* F_1 *на множество* Q_1^2*,* $\tilde{F}_2$ *— ограничение функции* F_2 *на множество* $\mathbb{K} \times Q_1$*.*

Пусть: $Q_2 \subseteq Q_1$*,* Q_2 *— подпространство пространства* (M, F_1, F_2)*. Тогда* Q_2 *— подпространство пространства* $(Q_1, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$*.*

Доказательство. По условию, $Q_2 \subseteq Q_1$. Так как Q_2 — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то $Q_2 \neq \varnothing$.

Пусть x, $y \in Q_2$. Так как Q_2 — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то: $x \oplus y = x + y \in Q_2$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q_2$. Так как Q_2 — подпространство пространства (M, F_1, F_2), то: $\lambda \otimes x = \lambda x \in Q_2$.

Итак, Q_2 — подпространство пространства $(Q_1, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2)$. □

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* Q_1*,* Q_2 *— подпространства пространства* L*. Тогда* $Q_1 \cap Q_2$ *— подпространство пространства* L*.*

Доказательство. Так как $Q_1 \subseteq L$, то $Q_1 \cap Q_2 \subseteq L$. Так как: $\theta \in Q_1$, $\theta \in Q_2$, то $\theta \in Q_1 \cap Q_2$.

Пусть x_1, $x_2 \in Q_1 \cap Q_2$. Тогда: x_1, $x_2 \in Q_1$, x_1, $x_2 \in Q_2$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in Q_1$, $x_1 + x_2 \in Q_2$. Тогда $x_1 + x_2 \in Q_1 \cap Q_2$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in Q_1 \cap Q_2$. Тогда: $x \in Q_1$, $x \in Q_2$. Следовательно: $\lambda x \in Q_1$, $\lambda x \in Q_2$. Тогда $\lambda x \in Q_1 \cap Q_2$.

Итак, $Q_1 \cap Q_2$ — подпространство пространства L. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* L *— линейное пространство над полем* $\mathbb{K}$*;* I *— множество,* $I \neq \varnothing$*,* Q_α *— подпространство пространства* L *при* $\alpha \in I$*. Тогда* $\bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$ *— подпространство пространства* L*.*

Доказательство. Так как $I \neq \varnothing$, то существует объект α_0, удовлетворяющий условию $\alpha_0 \in I$. Так как $Q_{\alpha_0} \subseteq L$, то $\bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha \subseteq L$. Так как $\forall \alpha \in I (\theta \in Q_\alpha)$, то $\theta \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$.

Пусть x_1, $x_2 \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$. Тогда: x_1, $x_2 \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$. Следовательно: $x_1 + x_2 \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$. Тогда $x_1 + x_2 \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$. Тогда: $x \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$. Следовательно: $\lambda x \in Q_\alpha$ при $\alpha \in I$. Тогда $\lambda x \in \bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$.

Итак, $\bigcap\limits_{\alpha \in I} Q_\alpha$ — подпространство пространства L. $\square$

7.4. Аффинное пространство

Замечание. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$. Далее часто будем писать $\overrightarrow{p_1 p_2}$ вместо $F(p_1, p_2)$.

Пусть: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\forall p_1 \in M \forall p_2 \in M (\overrightarrow{p_1 p_2} \in L)$. Тогда: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\mathrm{R}(F) \subseteq L$. Следовательно, $F\colon M^2 \implies L$.

Пусть $F\colon M^2 \implies L$. Тогда: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\mathrm{R}(F) \subseteq L$. Следовательно: F — функция, $\mathrm{D}(F) = M^2$, $\forall p_1 \in M \forall p_2 \in M (\overrightarrow{p_1 p_2} \in L)$.

Определение (аффинное пространство). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; M — множество, L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, $F\colon M^2 \implies L$.

Пусть:

1. $\exists p (p \in M)$;
2. $\overrightarrow{p_1 p_2} + \overrightarrow{p_2 p_3} = \overrightarrow{p_1 p_3}$ при p_1, p_2, $p_3 \in M$;
3. $\forall p_0 \in M \forall x \in L \exists! p \in M (\overrightarrow{p_0 p} = x)$.

Будем говорить, что F — операция векторизации на множестве M.

Будем говорить, что: (M, L, F) — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$; M — носитель пространства (M, L, F); L — линейное пространство, присоединённое к аффинному пространству (M, L, F); F — операция векторизации пространства (M, L, F). Будем говорить, что p — точка пространства (M, L, F), если $p \in M$. Будем говорить, что x — вектор пространства (M, L, F), если $x \in L$. Далее обычно будем отождествлять пространство (M, L, F) и множество M.

Пусть $Q = (M, L, F)$. Обозначим, $\vec{Q} = L$.

Утверждение. *Пусть:* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$*;* Q *— аффинное пространство над полем* $\mathbb{K}$*.*

1. *Пусть* $p \in Q$*. Тогда* $\overrightarrow{pp} = \theta$*.*
2. *Пусть:* p_1*,* $p_2 \in Q$*,* $\overrightarrow{p_1 p_2} = \theta$*. Тогда* $p_1 = p_2$*.*
3. *Пусть* p_1*,* $p_2 \in Q$*. Тогда* $(-1)\overrightarrow{p_1 p_2} = \overrightarrow{p_2 p_1}$*.*

Доказательство.

1. Очевидно: $\overrightarrow{pp} + \overrightarrow{pp} = \overrightarrow{pp}$. С другой стороны, $\overrightarrow{pp} + \theta = \overrightarrow{pp}$. Тогда $\overrightarrow{pp} = \theta$.
2. Очевидно, $\overrightarrow{p_1p_1} = \theta$. С другой стороны, $\overrightarrow{p_1p_2} = \theta$. Тогда $p_1 = p_2$.
3. Очевидно, $\overrightarrow{p_1p_2} + (-1)\overrightarrow{p_1p_2} = \theta$. С другой стороны: $\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2p_1} = \overrightarrow{p_1p_1} = \theta$. Тогда $(-1)\overrightarrow{p_1p_2} = \overrightarrow{p_2p_1}$. □

Замечание (операция откладывания вектора от точки). Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: $p_0 \in Q$, $x \in \vec{Q}$. Тогда существует единственная точка p, удовлетворяющая условиям: $p \in Q$, $\overrightarrow{p_0p} = x$. Обозначим, $p_0 \oplus x = p$. Далее часто будем писать $p_0 + x$ вместо $p_0 \oplus x$.

Пусть $p_0 \in Q$. Обозначим: $\varphi_{p_0}(p) = \overrightarrow{p_0p}$ при $p \in Q$. Очевидно, $\varphi_{p_0} \colon Q \implies \vec{Q}$. Так как $\forall x \in \vec{Q} \exists! p \in Q(\overrightarrow{p_0p} = x)$, то: φ_{p_0} — обратимая функция, $\mathrm{D}(\varphi_{p_0}) = Q$, $\mathrm{R}(\varphi_{p_0}) = \vec{Q}$.

Пусть: $p_0 \in Q$, $x \in \vec{Q}$. Тогда: $\overrightarrow{p_0\varphi_{p_0}^{-1}(x)} = \varphi_{p_0}\bigl(\varphi_{p_0}^{-1}(x)\bigr) = x$. С другой стороны, $\overrightarrow{p_0(p_0 \oplus x)} = x$. Тогда $\varphi_{p_0}^{-1}(x) = p_0 \oplus x$.

Пусть p_0, $p \in Q$. Тогда: $p_0 \oplus \overrightarrow{p_0p} = \varphi_{p_0}^{-1}\bigl(\varphi_{p_0}(p)\bigr) = p$.

Утверждение. *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$.*

1. *Пусть: $p \in Q$, x, $y \in \vec{Q}$. Тогда $(p \oplus x) \oplus y = p \oplus (x + y)$.*
2. *Пусть $p \in Q$. Тогда $p \oplus \theta = p$.*

Доказательство.

1. Обозначим, $p_1 = p \oplus x$. Тогда: $x = \overrightarrow{p(p \oplus x)} = \overrightarrow{pp_1}$. Обозначим, $p_2 = (p \oplus x) \oplus y$. Тогда $p_2 = p_1 \oplus y$. Следовательно: $y = \overrightarrow{p_1(p_1 \oplus y)} = \overrightarrow{p_1p_2}$. Тогда: $p \oplus (x + y) = p \oplus (\overrightarrow{pp_1} + \overrightarrow{p_1p_2}) = p \oplus \overrightarrow{pp_2} = p_2 = (p \oplus x) \oplus y$.
2. Очевидно: $p \oplus \theta = p \oplus \overrightarrow{pp} = p$. □

Утверждение (аффинное пространство E^N)**.** *Пусть: $N = \overline{1, 3}$, F — стандартная операция векторизации на множестве E^N. Тогда $(E^N, \vec{E}^N, F)$ — аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$.*

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Рассмотрим множество L. Рассмотрим линейное пространство L.

Пусть p_1, $p_2 \in L$. Обозначим, $\overrightarrow{p_1p_2} = p_2 - p_1$. Очевидно, $\overrightarrow{p_1p_2} \in L$. Будем говорить, что $\{\overrightarrow{p_1p_2}\}_{p_1, p_2 \in L}$ — стандартная операция векторизации на множестве L.

Утверждение (пример аффинного пространства)**.** *Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; L — линейное пространство над полем $\mathbb{K}$, F — стандартная операция векторизации на множестве L. Тогда: (L, L, F) — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$, $p_0 \oplus x = p_0 + x$ при p_0, $x \in L$.*

Доказательство.

1. Так как L — линейное пространство, то $\exists p(p \in L)$.
2. Пусть p_1, p_2, $p_3 \in L$. Тогда:

$$\overrightarrow{p_1p_2} + \overrightarrow{p_2p_3} = (p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) = p_3 - p_1 = \overrightarrow{p_1p_3}.$$

3. Пусть p_0, $x \in L$. Докажем, что существует единственный объект p, удовлетворяющий условиям: $p \in L$, $\overrightarrow{p_0p} = x$.

Пусть: $p \in L$, $\overrightarrow{p_0 p} = x$. Тогда:

$$\begin{gathered}\overrightarrow{p_0 p} = x, \\ p - p_0 = x, \\ p = p_0 + x.\end{gathered}$$

Пусть: $p_1 \in L$, $\overrightarrow{p_0 p_1} = x$, $p_2 \in L$, $\overrightarrow{p_0 p_2} = x$. Тогда: $p_1 = p_0 + x$, $p_2 = p_0 + x$. Следовательно, $p_1 = p_2$.

Пусть $p = p_0 + x$. Тогда: $p \in L$, $\overrightarrow{p_0 p} = p - p_0 = (p_0 + x) - p_0 = x$.

Итак, (L, L, F) — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$. Пусть p_0, $x \in L$. Тогда: $p_0 + x \in L$, $\overrightarrow{p_0 (p_0 + x)} = x$. Следовательно, $p_0 \oplus x = p_0 + x$. $\square$

Определение. Пусть: $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}\}$; Q — аффинное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Пусть: $p_0 \in Q$, H — подпространство пространства $\vec{Q}$, $\sigma = \{p \colon p \in Q \wedge \overrightarrow{p_0 p} \in H\}$. Будем говорить, что: σ — аффинное подпространство пространства Q; p_0 — опорная точка аффинного подпространства σ; H — направляющее подпространство аффинного подпространства σ.

Очевидно, $\sigma \subseteq Q$. Очевидно: $p_0 \in Q$, $\overrightarrow{p_0 p_0} = \theta \in H$. Тогда $p_0 \in \sigma$.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.