Аналитическая геометрия

Бадьин А. В.

Лекция 5. Прямые в пространстве E^2. Прямые и плоскости в пространстве E^3

5.1. Прямые в пространстве E^2

Утверждение. *Пусть: l — прямая в пространстве E^2; $A_0 \in l$, O, I_1 — аффинно независимые точки прямой l, $e_1 = \overrightarrow{OI_1}$. Справедливо утверждение: $A \in l$ тогда и только тогда, когда: $A \in E^2$, $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1)$.*

Доказательство. Пусть $A \in l$. Тогда $A \in E^2$. Пусть $A = A_0$. Тогда: $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{A_0A_0} = \theta \in L(e_1)$.

Пусть $A \neq A_0$. Очевидно, существует точка A', удовлетворяющая условиям: $A' \in E^2$, $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{A_0A}$. Тогда: $A' \neq O$, $l_*(O, A') \parallel l_*(A_0, A)$. Так как: A_0, $A \in l$, A_0, A — аффинно независимые точки, то $l_*(A_0, A) = l$. Так как $l_*(O, A') \parallel l_*(A_0, A)$, то $l_*(O, A') \parallel l$. Так как: $O \in l_*(O, A')$, $O \in l$, то $l_*(O, A') = l$. Так как $A' \in l_*(O, A')$, то $A' \in l$. Тогда $\overrightarrow{OA'} \in L(e_1)$. Следовательно, $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1)$.

Пусть: $A \in E^2$, $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1)$. Пусть $A = A_0$. Тогда: $A = A_0 \in l$.

Пусть $A \neq A_0$. Очевидно, существует точка A', удовлетворяющая условиям: $A' \in E^2$, $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{A_0A}$. Тогда: $A' \neq O$, $l_*(O, A') \parallel l_*(A_0, A)$. Так как $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1)$, то $\overrightarrow{OA'} \in L(e_1)$. Тогда $A' \in l$. Так как: $O \in l$, O, A' — аффинно независимые точки, то $l_*(O, A') = l$. Так как $l_*(A_0, A) \parallel l_*(O, A')$, то $l_*(A_0, A) \parallel l$. Так как: $A_0 \in l_*(A_0, A)$, $A_0 \in l$, то $l_*(A_0, A) = l$. Так как $A \in l_*(A_0, A)$, то $A \in l$. □

Определение. Пусть l — прямая в пространстве E^2.

Пусть: A, $B \in l$, A, B — аффинно независимые точки, $\tau = \overrightarrow{AB}$. Будем говорить, что τ — направляющий вектор прямой l.

Будем говорить, что N — нормаль к прямой l, если: $N \in \vec{E}^2$, $\forall A \in l \forall B \in l (N \perp \overrightarrow{AB})$.

Замечание. Пусть: l — прямая в пространстве E^2, $P_0 \in l$, τ — направляющий вектор прямой l. Очевидно, $\tau \neq \theta$.

Пусть $P \in E^2$. Запишем необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$:

$$\overrightarrow{P_0P} \in L(\tau);$$
$$\exists t \in \mathbb{R}(\overrightarrow{P_0P} = t\tau).$$

Последнее условие обычно записывают в виде уравнения:

$$\overrightarrow{P_0P} = t\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть: $O \in E^2$, e — базис пространства $\vec{E}^2$; $\tilde{x}_0 = h_{O,e}(P_0)$, $\tilde{\tau} = [\tau](e)$. Так как $\tau \neq \theta$, то $\tilde{\tau} \neq \tilde{\theta}$. Пусть: $P \in E^2$, $\tilde{x} = h_{O,e}(P)$. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t\tau, \quad t \in \mathbb{R};$$
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\tau, \quad t \in \mathbb{R};$$
$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 + t\tilde{\tau}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0 \in L(\tilde{\tau}).$$

Так как $\tilde{\tau} \neq \tilde{\theta}$, то последнее условие можно переписать в виде:

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0,\ \tilde{\tau} \text{ — линейно зависимые столбцы;}$$
$$\begin{vmatrix} \tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1 & \tilde{\tau}^1 \\ \tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2 & \tilde{\tau}^2 \end{vmatrix} = 0;$$
$$\tilde{\tau}^2(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) - \tilde{\tau}^1(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) = 0;$$
$$\tilde{\tau}^2(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) = \tilde{\tau}^1(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2).$$

Последнее условие обычно записывают виде пропорции:

$$\frac{\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1}{\tilde{\tau}^1} = \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2}{\tilde{\tau}^2}.$$

Обозначим: $A_1 = \tilde{\tau}^2$, $A_2 = -\tilde{\tau}^1$. Так как $\tilde{\tau} \neq \tilde{\theta}$, то $A_1 \neq 0 \vee A_2 \neq 0$. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$A_1(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) + A_2(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) = 0.$$

Обозначим, $B = -(A_1\tilde{x}_0^1 + A_2\tilde{x}_0^2)$. Тогда последнее условие можно переписать в виде:

$$A_1\tilde{x}^1 + A_2\tilde{x}^2 + B = 0.$$

Пусть e — ортонормированный базис. Обозначим, $N = A_1e_1 + A_2e_2$. Так как $A_1 \neq 0 \vee A_2 \neq 0$, то $N \neq \theta$. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$(N, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0;$$
$$(N, \overrightarrow{OP}) + B = 0.$$

Рассмотрим ортогональную проекцию $P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})$. Обозначим через l_1 прямую, удовлетворяющую условиям: l_1 — прямая в пространстве E^2, $P \in l_1$, $l_1 \perp l$. Обозначим через P_1 точку, удовлетворяющую условиям: $P_1 \in l_1$, $P_1 \in l$. Обозначим через P_2 точку, симметричную точке P относительно прямой l. Очевидно:

$$P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = \frac{(N, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})}{\|N\|^2}N,$$

$$
\begin{gathered}
P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = \overrightarrow{P_1P}, \\
\rho(P, l) = \left\| P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) \right\| = \frac{\left|(N, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})\right|}{\|N\|}, \\
\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP} - P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}), \\
\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP} - 2P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}).
\end{gathered}
$$

Очевидно, утверждение $P \in l$ справедливо тогда и только тогда, когда $P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = \theta$.

Обозначим: $n = \frac{1}{\|N\|}N$, $\delta(P, l; n) = (n, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})$. Очевидно:

$$
\begin{gathered}
\delta(P, l; n) = \frac{(N, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})}{\|N\|}, \\
P_{L(N)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = \delta(P, l; n)n, \\
\rho(P, l) = \left|\delta(P, l; n)\right|.
\end{gathered}
$$

Очевидно, утверждение $P \in l$ справедливо тогда и только тогда, когда $\delta(P, l; n) = 0$. Очевидно, точка P лежит в той (открытой) полуплоскости, в которую направлен вектор N тогда и только тогда, когда $\delta(P, l; n) > 0$. Очевидно, точка P лежит не в той (открытой) полуплоскости, в которую направлен вектор N тогда и только тогда, когда $\delta(P, l; n) < 0$.

5.2. Плоскости в пространстве E^3

Утверждение. *Пусть: π — плоскость в пространстве E^3; $A_0 \in \pi$, O, I_1, I_2 — аффинно независимые точки плоскости π, $e_1 = \overrightarrow{OI_1}$, $e_2 = \overrightarrow{OI_2}$. Справедливо утверждение: $A \in \pi$ тогда и только тогда, когда: $A \in E^3$, $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1, e_2)$.*

Доказательство. Пусть $A \in \pi$. Тогда $A \in E^3$. Пусть $A = A_0$. Тогда: $\overrightarrow{A_0A} = \overrightarrow{A_0A_0} = \theta \in L(e_1, e_2)$.

Пусть $A \neq A_0$. Очевидно, существует точка A', удовлетворяющая условиям: $A' \in E^3$, $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{A_0A}$. Тогда: $A' \neq O$, $l_*(O, A') \parallel l_*(A_0, A)$. Так как: A_0, $A \in l_*(A_0, A)$, A_0, $A \in \pi$, A_0, A — аффинно независимые точки, то $l_*(A_0, A) \subseteq \pi$. Так как $l_*(O, A') \parallel l_*(A_0, A)$, то $l_*(O, A') \parallel \pi$. Так как: $O \in l_*(O, A')$, $O \in \pi$, то $l_*(O, A') \subseteq \pi$. Так как $A' \in l_*(O, A')$, то $A' \in \pi$. Тогда $\overrightarrow{OA'} \in L(e_1, e_2)$. Следовательно, $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1, e_2)$.

Пусть: $A \in E^3$, $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1, e_2)$. Пусть $A = A_0$. Тогда: $A = A_0 \in \pi$.

Пусть $A \neq A_0$. Очевидно, существует точка A', удовлетворяющая условиям: $A' \in E^3$, $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{A_0A}$. Тогда: $A' \neq O$, $l_*(O, A') \parallel l_*(A_0, A)$. Так как $\overrightarrow{A_0A} \in L(e_1, e_2)$, то $\overrightarrow{OA'} \in L(e_1, e_2)$. Тогда $A' \in \pi$. Так как: O, $A' \in l_*(O, A')$, $O \in \pi$, O, A' — аффинно независимые точки, то $l_*(O, A') \subseteq \pi$. Так как $l_*(A_0, A) \parallel l_*(O, A')$, то $l_*(A_0, A) \parallel \pi$. Так как: $A_0 \in l_*(A_0, A)$, $A_0 \in \pi$, то $l_*(A_0, A) \subseteq \pi$. Так как $A \in l_*(A_0, A)$, то $A \in \pi$. □

Определение. Пусть π — плоскость в пространстве E^3.

Пусть: A, B, $C \in \pi$, A, B, C — аффинно независимые точки, $\tau_1 = \overrightarrow{AB}$, $\tau_2\overrightarrow{AC}$. Будем говорить, что τ_1, τ_2 — направляющие векторы плоскости π.

Будем говорить, что N — нормаль к плоскости π, если: $N \in \vec{E}^3$, $\forall A \in \pi \forall B \in \pi (N \perp \overrightarrow{AB})$.

Замечание. Пусть: π — плоскость в пространстве E^3, $P_0 \in \pi$, τ_1, τ_2 — направляющие векторы плоскости π. Очевидно, τ_1, τ_2 — линейно независимые векторы.

Пусть $P \in E^3$. Запишем необходимое и достаточное условие того, что $P \in \pi$:

$$\overrightarrow{P_0P} \in L(\tau_1, \tau_2);$$
$$\exists u^1 \in \mathbb{R} \exists u^2 \in \mathbb{R} (\overrightarrow{P_0P} = u^1\tau_1 + u^2\tau_2).$$

Последнее условие обычно записывают в виде уравнения:

$$\overrightarrow{P_0P} = u^1\tau_1 + u^2\tau_2, \quad u^1 \in \mathbb{R},\, u^2 \in \mathbb{R}.$$

Пусть: $O \in E^3$, e — базис пространства $\vec{E}^3$; $\tilde{x}_0 = h_{O,e}(P_0)$, $\tilde{\tau}_1 = [\tau_1](e)$, $\tilde{\tau}_2 = [\tau_2](e)$. Так как τ_1, τ_2 — линейно независимые векторы, то $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ — линейно независимые столбцы. Пусть: $P \in E^3$, $\tilde{x} = h_{O,e}(P)$. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in \pi$ можно записать в виде:

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = u^1\tau_1 + u^2\tau_2, \quad u^1 \in \mathbb{R},\, u^2 \in \mathbb{R};$$
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + u^1\tau_1 + u^2\tau_2, \quad u^1 \in \mathbb{R},\, u^2 \in \mathbb{R};$$
$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 + u^1\tilde{\tau}_1 + u^2\tilde{\tau}_2, \quad u^1 \in \mathbb{R},\, u^2 \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in \pi$ можно записать в виде:

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0 \in L(\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2).$$

Так как $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ — линейно независимые столбцы, то последнее условие можно переписать в виде:

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0,\ \tilde{\tau}_1,\ \tilde{\tau}_2 \text{ — линейно зависимые столбцы;}$$
$$\begin{vmatrix} \tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1 & \tilde{\tau}_1^1 & \tilde{\tau}_2^1 \\ \tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2 & \tilde{\tau}_1^2 & \tilde{\tau}_2^2 \\ \tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3 & \tilde{\tau}_1^3 & \tilde{\tau}_2^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Обозначим:

$$A_1 = \begin{vmatrix} \tilde{\tau}_1^2 & \tilde{\tau}_2^2 \\ \tilde{\tau}_1^3 & \tilde{\tau}_2^3 \end{vmatrix},\ A_2 = -\begin{vmatrix} \tilde{\tau}_1^1 & \tilde{\tau}_2^1 \\ \tilde{\tau}_1^3 & \tilde{\tau}_2^3 \end{vmatrix},\ A_3 = \begin{vmatrix} \tilde{\tau}_1^1 & \tilde{\tau}_2^1 \\ \tilde{\tau}_1^2 & \tilde{\tau}_2^2 \end{vmatrix}.$$

Так как $\tilde{\tau}_1$, $\tilde{\tau}_2$ — линейно независимые столбцы, то $A_1 \neq 0 \vee A_2 \neq 0 \vee A_3 \neq 0$. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in \pi$ можно записать в виде:

$$A_1(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) + A_2(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) + A_3(\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3) = 0.$$

Обозначим, $B = -(A_1\tilde{x}_0^1 + A_2\tilde{x}_0^2 + A_3\tilde{x}_0^3)$. Тогда последнее условие можно переписать в виде:

$$A_1\tilde{x}^1 + A_2\tilde{x}^2 + A_3\tilde{x}^3 + B = 0.$$

Пусть e — ортонормированный базис. Обозначим, $N = A_1e_1 + A_2e_2 + A_3e_3$. Так как $A_1 \neq 0 \vee A_2 \neq 0 \vee A_3 \neq 0$, то $N \neq \theta$. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in \pi$ можно записать в виде:

$$(N, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0;$$

$$(N,\overrightarrow{OP})+B=0.$$

Рассмотрим ортогональную проекцию $P_{L(N)}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})$. Обозначим через l_1 прямую, удовлетворяющую условиям: l_1 — прямая в пространстве E^3, $P\in l_1$, $l_1\perp\pi$. Обозначим через P_1 точку, удовлетворяющую условиям: $P_1\in l_1$, $P_1\in\pi$. Обозначим через P_2 точку, симметричную точке P относительно плоскости π. Очевидно:

$$P_{L(N)}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})=\frac{(N,\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})}{\|N\|^2}N,$$
$$P_{L(N)}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})=\overrightarrow{P_1P},$$
$$\rho(P,l)=\big\|P_{L(N)}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})\big\|=\frac{\big|(N,\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})\big|}{\|N\|},$$
$$\overrightarrow{OP_1}=\overrightarrow{OP}-P_{L(N)}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0}),$$
$$\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{OP}-2P_{L(N)}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0}).$$

Очевидно, утверждение $P\in\pi$ справедливо тогда и только тогда, когда $P_{L(N)}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})=\theta$.

Обозначим: $n=\frac{1}{\|N\|}N$, $\delta(P,\pi;n)=(n,\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})$. Очевидно:

$$\delta(P,\pi;n)=\frac{(N,\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})}{\|N\|},$$
$$P_{L(N)}(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OP_0})=\delta(P,\pi;n)n,$$
$$\rho(P,l)=\big|\delta(P,\pi;n)\big|.$$

Очевидно, утверждение $P\in\pi$ справедливо тогда и только тогда, когда $\delta(P,\pi;n)=0$. Очевидно, точка P лежит в том (открытом) полупространстве, в которое направлен вектор N тогда и только тогда, когда $\delta(P,\pi;n)>0$. Очевидно, точка P лежит не в том (открытом) полупространстве, в которое направлен вектор N тогда и только тогда, когда $\delta(P,\pi;n)<0$.

5.3. Прямые в пространстве E^3

Утверждение. *Пусть: l — прямая в пространстве E^3; $A_0\in l$, O, I_1 — аффинно независимые точки прямой l, $e_1=\overrightarrow{OI_1}$. Справедливо утверждение: $A\in l$ тогда и только тогда, когда: $A\in E^3$, $\overrightarrow{A_0A}\in L(e_1)$.*

Доказательство. Пусть $A\in l$. Тогда $A\in E^3$. Пусть $A=A_0$. Тогда: $\overrightarrow{A_0A}=\overrightarrow{A_0A_0}=\theta\in L(e_1)$.

Пусть $A\neq A_0$. Очевидно, существует точка A', удовлетворяющая условиям: $A'\in E^2$, $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{A_0A}$. Тогда: $A'\neq O$, $l_*(O,A')\parallel l_*(A_0,A)$. Так как: A_0, $A\in l$, A_0, A — аффинно независимые точки, то $l_*(A_0,A)=l$. Так как $l_*(O,A')\parallel l_*(A_0,A)$, то $l_*(O,A')\parallel l$. Так как: $O\in l_*(O,A')$, $O\in l$, то $l_*(O,A')=l$. Так как $A'\in l_*(O,A')$, то $A'\in l$. Тогда $\overrightarrow{OA'}\in L(e_1)$. Следовательно, $\overrightarrow{A_0A}\in L(e_1)$.

Пусть: $A\in E^3$, $\overrightarrow{A_0A}\in L(e_1)$. Пусть $A=A_0$. Тогда: $A=A_0\in l$.

Пусть $A\neq A_0$. Очевидно, существует точка A', удовлетворяющая условиям: $A'\in E^2$, $\overrightarrow{OA'}=\overrightarrow{A_0A}$. Тогда: $A'\neq O$, $l_*(O,A')\parallel l_*(A_0,A)$. Так как $\overrightarrow{A_0A}\in L(e_1)$, то $\overrightarrow{OA'}\in L(e_1)$.

Тогда $A' \in l$. Так как: $O \in l$, O, A' — аффинно независимые точки, то $l_*(O, A') = l$. Так как $l_*(A_0, A) \parallel l_*(O, A')$, то $l_*(A_0, A) \parallel l$. Так как: $A_0 \in l_*(A_0, A)$, $A_0 \in l$, то $l_*(A_0, A) = l$. Так как $A \in l_*(A_0, A)$, то $A \in l$. □

Определение. Пусть l — прямая в пространстве E^3.

Пусть: A, $B \in l$, A, B — аффинно независимые точки, $\tau = \overrightarrow{AB}$. Будем говорить, что τ — направляющий вектор прямой l.

Будем говорить, что N — нормаль к прямой l, если: $N \in \vec{E}^2$, $\forall A \in l \forall B \in l (N \perp \overrightarrow{AB})$.

Замечание. Пусть: l — прямая в пространстве E^3, $P_0 \in l$, τ — направляющий вектор прямой l. Очевидно, $\tau \neq \theta$.

Пусть $P \in E^3$. Запишем необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$:

$$\overrightarrow{P_0P} \in L(\tau);$$
$$\exists t \in \mathbb{R}(\overrightarrow{P_0P} = t\tau).$$

Последнее условие обычно записывают в виде уравнения:

$$\overrightarrow{P_0P} = t\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Пусть: $O \in E^3$, e — базис пространства $\vec{E}^2$; $\tilde{x}_0 = h_{O,e}(P_0)$, $\tilde{\tau} = [\tau](e)$. Так как $\tau \neq \theta$, то $\tilde{\tau} \neq \tilde{\theta}$. Пусть: $P \in E^3$, $\tilde{x} = h_{O,e}(P)$. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t\tau, \quad t \in \mathbb{R};$$
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + t\tau, \quad t \in \mathbb{R};$$
$$\tilde{x} = \tilde{x}_0 + t\tilde{\tau}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0 \in L(\tilde{\tau}).$$

Так как $\tilde{\tau} \neq \tilde{\theta}$, то последнее условие можно переписать в виде:

$$\tilde{x} - \tilde{x}_0,\ \tilde{\tau} \text{ — линейно зависимые столбцы};$$
$$\begin{vmatrix} \tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2 & \tilde{\tau}^2 \\ \tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3 & \tilde{\tau}^3 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} \tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1 & \tilde{\tau}^1 \\ \tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3 & \tilde{\tau}^3 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\begin{vmatrix} \tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1 & \tilde{\tau}^1 \\ \tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2 & \tilde{\tau}^2 \end{vmatrix} = 0;$$
$$\tilde{\tau}^3(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) - \tilde{\tau}^2(\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3) = 0,$$
$$\tilde{\tau}^3(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) - \tilde{\tau}^1(\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3) = 0,$$
$$\tilde{\tau}^2(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) - \tilde{\tau}^1(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) = 0;$$
$$\tilde{\tau}^3(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) = \tilde{\tau}^2(\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3),$$
$$\tilde{\tau}^3(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) = \tilde{\tau}^1(\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3),$$
$$\tilde{\tau}^2(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) = \tilde{\tau}^1(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2).$$

Последнее условие обычно записывают виде пропорции:

$$\frac{\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1}{\tilde{\tau}^1} = \frac{\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2}{\tilde{\tau}^2} = \frac{\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3}{\tilde{\tau}^3}.$$

Так как $\tilde{\tau} \neq \tilde{\theta}$, то нетрудно доказать, что среди строк $(0, \tilde{\tau}^3, -\tilde{\tau}^2)$, $(\tilde{\tau}^3, 0, -\tilde{\tau}^1)$, $(\tilde{\tau}^2, -\tilde{\tau}^1, 0)$ есть две линейно независимые строки. Нетрудно доказать, что $(0, \tilde{\tau}^3, -\tilde{\tau}^2)$, $(\tilde{\tau}^3, 0, -\tilde{\tau}^1)$, $(\tilde{\tau}^2, -\tilde{\tau}^1, 0)$ — линейно зависимые строки. Тогда существуют числа A_1^1, A_2^1, A_3^1, A_1^2, A_2^2, $A_3^2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: (A_1^1, A_2^1, A_3^1), (A_1^2, A_2^2, A_3^2) — линейно независимые строки; необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$\begin{aligned} A_1^1(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) + A_2^1(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) + A_3^1(\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3) = 0, \\ A_1^2(\tilde{x}^1 - \tilde{x}_0^1) + A_2^2(\tilde{x}^2 - \tilde{x}_0^2) + A_3^2(\tilde{x}^3 - \tilde{x}_0^3) = 0. \end{aligned}$$

Обозначим: $B^1 = -(A_1^1\tilde{x}_0^1 + A_2^1\tilde{x}_0^2 + A_3^1\tilde{x}_0^3)$, $B^2 = -(A_1^2\tilde{x}_0^1 + A_2^2\tilde{x}_0^2 + A_3^2\tilde{x}_0^3)$. Тогда последнее условие можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} A_1^1\tilde{x}^1 + A_2^1\tilde{x}^2 + A_3^1\tilde{x}^3 + B^1 = 0, \\ A_1^2\tilde{x}^1 + A_2^2\tilde{x}^2 + A_3^2\tilde{x}^3 + B^2 = 0. \end{aligned}$$

Пусть e — ортонормированный базис. Обозначим: $N_1 = A_1^1 e_1 + A_2^1 e_2 + A_3^1 e_3$, $N_2 = A_1^2 e_1 + A_2^2 e_2 + A_3^2 e_3$. Так как (A_1^1, A_2^1, A_3^1), (A_1^2, A_2^2, A_3^2) — линейно независимые строки, то N_1, N_2 — линейно независимые векторы. Очевидно, необходимое и достаточное условие того, что $P \in l$ можно записать в виде:

$$\begin{gathered} (N_1, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0, \\ (N_2, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = 0; \\ (N_1, \overrightarrow{OP}) + B^1 = 0, \\ (N_2, \overrightarrow{OP}) + B^2 = 0. \end{gathered}$$

Рассмотрим ортогональную проекцию $P_{L(\tau)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})$. Обозначим через π_1 плоскость, удовлетворяющую условиям: π_1 — плоскость в пространстве E^3, $P \in \pi_1$, $\pi_1 \perp l$. Обозначим через P_1 точку, удовлетворяющую условиям: $P_1 \in \pi_1$, $P_1 \in l$. Обозначим через P_2 точку, симметричную точке P относительно прямой l. Очевидно:

$$\begin{gathered} P_{L(\tau)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = \frac{(\tau, \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})}{\|\tau\|^2}\tau, \\ P_{L(\tau)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}) = \overrightarrow{P_0P_1}, \\ \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_0} + P_{L(\tau)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0}), \\ \overrightarrow{OP_2} = 2\big(\overrightarrow{OP_0} + P_{L(\tau)}(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0})\big) - \overrightarrow{OP}. \end{gathered}$$

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.