Аналитическая геометрия

Бадьин А. В.

Лекция 4. Скалярное, векторное, смешанное произведения

4.1. Скалярное произведение

Определение. Пусть $N = \overline{1,3}$.

Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что x, y — сонаправленные векторы, если $\exists\lambda \in (0, +\infty)(y = \lambda x)$. Будем говорить, что x, y — противоположно направленные векторы, если $\exists\lambda \in (-\infty, 0)(y = \lambda x)$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Пусть: A, $B \in E^N$, $x = \overrightarrow{AB}$. Обозначим, $\|x\| = \rho(A, B)$ $(|x| = \rho(A, B))$. Будем говорить, что $\|x\|$ — норма вектора x (модуль вектора x, длина вектора x).

Определение. Пусть $N = 2$, 3.

Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Пусть $x = \theta \vee y = \theta$. Обозначим, $\varphi(x, y) = 0$. Пусть x, $y \neq \theta$. Пусть: A, B, $C \in E^N$, $x = \overrightarrow{AB}$, $y = \overrightarrow{AC}$. Обозначим, $\varphi(x, y) = \widehat{BAC}$. Будем говорить, что $\varphi(x, y)$ — угол между векторами x, y.

Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Обозначим, $(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cos\big(\varphi(x, y)\big)$. Будем говорить, что (x, y) — скалярное произведение векторов x, y.

Утверждение. *Пусть $N = 2$, 3.*

1. *Справедливо утверждение $\|\theta\| = 0$* (***непосредственно следует из определения нормы вектора***).
2. *Пусть: $x \in \vec{E}^N$, $x \neq \theta$. Тогда $\|x\| > 0$* (***непосредственно следует из определения нормы вектора***).
3. *Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Тогда $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$* (***непосредственно следует из определения угла между векторами***).
4. *Пусть: x, $y \in \vec{E}^N$, x, $y \neq \theta$, x, y — сонаправленные векторы. Тогда $\varphi(x, y) = 0$* (***нетрудно доказать, используя определение угла между векторами***).
5. *Пусть: x, $y \in \vec{E}^N$, x, $y \neq \theta$, x, y — противоположно направленные векторы. Тогда $\varphi(x, y) = \pi$* (***нетрудно доказать, используя определение угла между векторами***).
6. *Пусть: x, $y \in \vec{E}^N$, x, y — линейно независимые векторы. Тогда $\varphi(x, y) \in (0, \pi)$* (***нетрудно доказать, используя определение угла между векторами***).
7. *Пусть $x \in \vec{E}^N$. Тогда $(\theta, x) = 0$* (***непосредственно следует из определения скалярного произведения***).
8. *Пусть $x \in \vec{E}^N$. Тогда $(x, \theta) = 0$* (***непосредственно следует из определения скалярного произведения***).

*9. Пусть: O, $A \in E^N$, $x = \overrightarrow{OA}$, $x \neq \theta$, $y \in \vec{E}^N$; $I_1 \in l_+(O, A)$, $I_2, \ldots, I_N \in E^N$, $\rho(O, I_1), \ldots, \rho(O, I_N) = 1$, $l_*(O, I_1), \ldots, l_*(O, I_N)$ — попарно перпендикулярные прямые; h — аффинная координатная карта в пространстве E^N, соответствующая точкам O, $I_1, \ldots, I_N$. Тогда $(x, y) = \|x\| \cdot [y]^1(h)$ (**нетрудно доказать, используя средства элементарной геометрии**).*

Утверждение. *Пусть $N = 2$, 3.*

1. *Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Тогда $(x, y) = (y, x)$.*
2. *Пусть x, y_1, $y_2 \in \vec{E}^N$. Тогда $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$.*
3. *Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, x, $y \in \vec{E}^N$. Тогда $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$.*
4. *Пусть: $x \in \vec{E}^N$, $x \neq \theta$. Тогда $(x, x) > 0$.*

Доказательство.

1. Очевидно:

$$(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cos\bigl(\varphi(x, y)\bigr) = \|y\| \cdot \|x\| \cos\bigl(\varphi(y, x)\bigr) = (y, x).$$

2. Пусть $x = \theta$. Тогда: $(x, y_1 + y_2) = 0$, $(x, y_1) + (x, y_2) = 0$. Следовательно, $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_1)$.

Пусть $x \neq \theta$. Очевидно, существуют точки O, A, $I_1, \ldots, I_N$, удовлетворяющие условиям: O, $A \in E^N$, $x = \overrightarrow{OA}$, $I_1 \in l_+(O, A)$, $I_2, \ldots, I_N \in E^N$, $\rho(O, I_1), \ldots, \rho(O, I_N) = 1$, $l_*(O, I_1), \ldots, l_*(O, I_N)$ — попарно перпендикулярные прямые. Пусть h — аффинная координатная карта в пространстве E^N, соответствующая точкам O, $I_1, \ldots, I_N$. Тогда:

$$(x, y_1 + y_2) = \|x\| \cdot [y_1 + y_2]^1(h) = \|x\| \bigl([y_1](h) + [y_2](h)\bigr)^1 = \|x\| \bigl([y_1]^1(h) + [y_2]^1(h)\bigr) = \\ = \|x\| \cdot [y_1]^1(h) + \|x\| \cdot [y_2]^1(h) = (x, y_1) + (x, y_2).$$

3. Пусть $x = \theta$. Тогда: $(x, \lambda y) = 0$, $\lambda(x, y) = 0$. Следовательно, $(x, \lambda y) = \lambda(x, y)$.

Пусть $x \neq \theta$. Очевидно, существуют точки O, A, $I_1, \ldots, I_N$, удовлетворяющие условиям: O, $A \in E^N$, $x = \overrightarrow{OA}$, $I_1 \in l_+(O, A)$, $I_2, \ldots, I_N \in E^N$, $\rho(O, I_1), \ldots, \rho(O, I_N) = 1$, $l_*(O, I_1), \ldots, l_*(O, I_N)$ — попарно перпендикулярные прямые. Пусть h — аффинная координатная карта в пространстве E^N, соответствующая точкам O, $I_1, \ldots, I_N$. Тогда:

$$(x, \lambda y) = \|x\| \cdot [\lambda y]^1(h) = \|x\| \bigl(\lambda[y](h)\bigr)^1 = \|x\| \bigl(\lambda[y]^1(h)\bigr) = \lambda\bigl(\|x\| \cdot [y]^1(h)\bigr) = \lambda(x, y).$$

4. Очевидно:

$$(x, x) = \|x\| \cdot \|x\| \cos\bigl(\varphi(x, x)\bigr) = \|x\| \cdot \|x\| > 0. \quad \square$$

Замечание. Пусть $N = 2$, 3.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Так как $\|x\| \geqslant 0$, то:

$$\sqrt{(x, x)} = \sqrt{\|x\| \cdot \|x\| \cos\bigl(\varphi(x, x)\bigr)} = \sqrt{\|x\|^2} = \|x\|.$$

Пусть: x, $y \in \vec{E}^N$, x, $y \neq \theta$. Так как $\varphi(x, y) \in [0, \pi]$, то:

$$\arccos\left(\frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}}\right) = \arccos\left(\frac{\|x\| \cdot \|y\| \cos\bigl(\varphi(x, x)\bigr)}{\|x\| \cdot \|y\|}\right) = \arccos\Bigl(\cos\bigl(\varphi(x, x)\bigr)\Bigr) = \\ = \varphi(x, y).$$

Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Так как $\|x\|$, $\|y\| \geqslant 0$, то:

$$\bigl|(x,y)\bigr| = \Bigl|\|x\| \cdot \|y\| \cos\bigl(\varphi(x,y)\bigr)\Bigr| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| = \sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}.$$

(Неравенство Коши—Буняковского.)

Утверждение. *Пусть $N = 2$, 3.*

1. *Справедливо утверждение $\|\theta\| = 0$. Пусть: $x \in \vec{E}^N$, $x \neq \theta$. Тогда $\|x\| > 0$.*
2. *Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Тогда $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.*
3. *Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \vec{E}^N$. Тогда $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.*

Доказательство.

1. Утверждения обсуждались выше.

2. Очевидно, существуют точки A, B, C, удовлетворяющие условиям: A, B, $C \in E^N$, $x = \overrightarrow{AB}$, $y = \overrightarrow{BC}$. Тогда:

$$\|x + y\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \rho(A,C) \leqslant \rho(A,B) + \rho(B,C) = \|x\| + \|y\|\,.$$

3. Очевидно:

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x,x)} = |\lambda| \cdot \|x\|\,.$$

Замечание. Пусть $N = 2$, 3.

Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Будем писать $x \perp y$ если $(x,y) = 0$. Утверждение $x \perp y$ читается: «вектор x ортогонален вектору y» или «вектор x перпендикулярен вектору y».

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — ортогональная последовательность векторов, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1,r}$, $k \neq m$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — ортонормированная последовательность векторов, если: $x_k \perp x_m$ при: k, $m = \overline{1,r}$, $k \neq m$; $\|x_k\| = 1$ при $k = \overline{1,r}$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in \vec{E}^N$, $x_1, \ldots, x_r$ — ортогональная последовательность векторов, $x_1, \ldots, x_r \neq \theta$. Докажем, что $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{m=1}^{r} \lambda^m x_m = \theta$. Пусть $k = \overline{1,r}$. Так как $x_k \neq \theta$, то:

$$\sum_{m=1}^{r} \lambda^m x_m = \theta,$$
$$\Bigl(x_k, \sum_{m=1}^{r} \lambda^m x_m\Bigr) = (x_k, \theta),$$
$$\sum_{m=1}^{r} \lambda^m (x_k, x_m) = (x_k, \theta),$$
$$\lambda^k (x_k, x_k) = 0,$$
$$\lambda^k = 0.$$

Итак, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_{r+1} \in \vec{E}^N$, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы, $x_{r+1} \perp x_k$ при $k = \overline{1,r}$; $x_{r+1} \neq \theta$. Докажем, что $x_1, \ldots, x_{r+1}$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $\lambda^1, \ldots, \lambda^{r+1} \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{m=1}^{r+1} \lambda^m x_m = \theta$. Так как $x_{r+1} \neq \theta$, то:

$$\begin{gathered}\sum_{m=1}^{r+1} \lambda^m x_m = \theta,\\ \Bigl(x_{r+1}, \sum_{m=1}^{r+1} \lambda^m x_m\Bigr) = (x_{r+1}, \theta),\\ \sum_{m=1}^{r+1} \lambda^m (x_{r+1}, x_m) = (x_{r+1}, \theta),\\ \lambda^{r+1}(x_{r+1}, x_{r+1}) = 0,\\ \lambda^{r+1} = 0.\end{gathered}$$

Тогда $\sum\limits_{m=1}^{r} \lambda^m x_m = \theta$. Так как $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы, то $\lambda^1, \ldots, \lambda^r = 0$. Итак, $x_1, \ldots, x_{r+1}$ — линейно независимые векторы.

Пусть: $x \in \vec{E}^N$, $Q \subseteq \vec{E}^N$. Будем писать $x \perp Q$ если $\forall u \in Q (x \perp u)$. Утверждение $x \perp Q$ читается: «вектор x ортогонален множеству Q» или «вектор x перпендикулярен множеству Q».

Пусть Q_1, $Q_2 \subseteq \vec{E}^N$. Будем писать $Q_1 \perp Q_2$ если $\forall x_1 \in Q_1 \forall x_2 \in Q_2 (x_1 \perp x_2)$. Утверждение $Q_1 \perp Q_2$ читается: «множество Q_1 ортогонально множеству Q_2» или «множество Q_1 перпендикулярно множеству Q_2».

Замечание. Пусть: $N = 2, 3$; e — базис пространства $\vec{E}^N$.

Матрица $g(e)$. Обозначим: $g_{k,m}(e) = (e_k, e_m)$ при k, $m = \overline{1, N}$. Очевидно: $g(e) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $g(e)^T = g(e)$.

Пусть e — ортогональный базис (ОБ). Тогда $g(e)$ — диагональная матрица ($g_{k,m}(e) = 0$ при: k, $m = \overline{1, N}$, $k \neq m$).

Пусть $g(e)$ — диагональная матрица. Тогда e — ортогональный базис.

Пусть e — ортонормированный базис (ОНБ). Тогда $g(e) = I$.

Пусть $g(e) = I$. Тогда e — ортонормированный базис.

Выражение для скалярного произведения в произвольном базисе. Пусть: x, $y \in \vec{E}^N$, $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$. Тогда:

$$(x, y) = (\tilde{x}^k e_k, \tilde{y}^m e_m) = (e_k, e_m)\tilde{x}^k \tilde{y}^m = g_{k,m}(e)\tilde{x}^k \tilde{y}^m.$$

Пусть: $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $(x, y) = A_{k,m}[x]^k(e)[y]^m(e)$ при x, $y \in \vec{E}^N$. Докажем, что $g(e) = A$.

Пусть k, $m = \overline{1, N}$. Тогда:

$$g_{k,m}(e) = (e_k, e_m) = A_{i,j}[e_k]^i(e)[e_m]^j(e) = A_{i,j}\delta^i_k \delta^j_m = A_{k,m}.$$

Следовательно, $g(e) = A$.

Выражение для скалярного произведения в ортогональном базисе. Пусть: x, $y \in \vec{E}^N$, $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$, e — ортогональный базис. Тогда:

$$(x, y) = g_{k,m}(e)\tilde{x}^k \tilde{y}^m = g_{k,k}(e)\tilde{x}^k \tilde{y}^k.$$

Выражение для скалярного произведения в ортонормированном базисе. Пусть: x, $y \in \vec{E}^N$, $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$, e — ортонормированный базис. Тогда:

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{N} g_{k,k}(e)\tilde{x}^k\tilde{y}^k = \sum_{k=1}^{N} \tilde{x}^k\tilde{y}^k.$$

Выражение для координат вектора в ортогональном базисе. Пусть: $x \in \vec{E}^N$, $\tilde{x} = [x](e)$, e — ортогональный базис. Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(e_k, x) = \Big(e_k, \sum_{m=1}^{N} \tilde{x}^m e_m\Big) = \sum_{m=1}^{N}(e_k, e_m)\tilde{x}^m = (e_k, e_k)\tilde{x}^k;$$

$$\tilde{x}^k = \frac{(e_k, x)}{(e_k, e_k)}.$$

Следовательно:

$$x = \sum_{k=1}^{N} \tilde{x}^k e_k = \sum_{k=1}^{N} \frac{(e_k, x)}{(e_k, e_k)} e_k.$$

Выражение для координат вектора в ортонормированном базисе. Пусть: $x \in \vec{E}^N$, $\tilde{x} = [x](e)$, e — ортонормированный базис. Пусть $k = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\tilde{x}^k = \frac{(e_k, x)}{(e_k, e_k)} = (e_k, x).$$

Следовательно:

$$x = \sum_{k=1}^{N} \frac{(e_k, x)}{(e_k, e_k)} e_k = \sum_{k=1}^{N}(e_k, x)e_k.$$

Замечание. Пусть: $N = 2$, 3; $e_1 \in \vec{E}^N$, $e_1 \neq \theta$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что x_1 — ортогональная проекция вектора x на множество $L(e_1)$, если: $x_1 \in L(e_1)$, $x - x_1 \perp L(e_1)$.

Пусть: $x \in \vec{E}^N$, x_1', x_1'' — ортогональные проекции вектора x на множество $L(e_1)$. Докажем, что $x_1' = x_1''$.

Так как: x_1', $x_1'' \in L(e_1)$, $x - x_1'$, $x - x_1'' \perp L(e_1)$, то:

$$\begin{aligned}(x_1' - x_1'', x_1' - x_1'') &= \big((x - x_1'') - (x - x_1'), x_1' - x_1''\big) = \\ &= (x - x_1'', x_1') - (x - x_1'', x_1'') - (x - x_1', x_1') + (x - x_1', x_1'') = 0.\end{aligned}$$

Тогда $x_1' - x_1'' = \theta$. Следовательно, $x_1' = x_1''$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Обозначим, $x_1 = \frac{(e_1,x)}{(e_1,e_1)}e_1$. Докажем, что x_1 — ортогональная проекция вектора x на множество $L(e_1)$.

Очевидно, $x_1 \in L(e_1)$. Пусть $u \in L(e_1)$. Тогда существует число $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $u = \lambda e_1$. Следовательно:

$$(x - x_1, u) = \Big(x - \frac{(e_1, x)}{(e_1, e_1)}e_1, \lambda e_1\Big) = \lambda\Big((x, e_1) - \frac{(e_1, x)}{(e_1, e_1)}(e_1, e_1)\Big) = 0.$$

Тогда $x - x_1 \perp L(e_1)$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Пусть x_1 — ортогональная проекция вектора x на множество $L(e_1)$. Обозначим, $P_{L(e_1)}(x) = x_1$. Будем говорить, что $P_{L(e_1)}$ — оператор ортогонального проектирования на множество $L(e_1)$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Очевидно, $P_{L(e_1)}(x) = \frac{(e_1,x)}{(e_1,e_1)} e_1$.

4.2. Правые и левые базисы пространства $\vec{E}^N$

Определение (матрица перехода). Пусть: $N = \overline{1,3}$; e, e' — базисы пространства $\vec{E}^N$. Обозначим: $\alpha^i_{i'}(e,e') = [e'_{i'}]^i(e)$ при i, $i' = \overline{1,N}$. Очевидно, $\alpha(e,e') \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Будем говорить, что $\alpha(e,e')$ — матрица перехода от базиса e к базису e'.

Утверждение (без доказательства)**.** *Пусть $N = \overline{1,3}$.*

1. *Пусть e — базис пространства $\vec{E}^N$. Тогда $\alpha(e,e) = I$.*
2. *Пусть e, e', e'' — базисы пространства $\vec{E}^N$. Тогда $\alpha(e,e')\alpha(e',e'') = \alpha(e,e'')$.*
3. *Пусть e, e' — базисы пространства $\vec{E}^N$. Тогда $\alpha(e,e')\alpha(e',e) = I$.*

Доказательство.

1. Пусть i, $j = \overline{1,N}$. Тогда: $\alpha^j_i(e,e) = [e_i]^j(e) = \delta^j_i$. Следовательно, $\alpha(e,e) = I$.
2. Пусть $i'' = \overline{1,N}$. Очевидно:

$$e''_{i''} = \alpha^{i'}_{i''}(e',e'')e'_{i'} = \alpha^{i'}_{i''}(e',e'')\big(\alpha^i_{i'}(e,e')e_i\big) = \big(\alpha^i_{i'}(e,e')\alpha^{i'}_{i''}(e',e'')\big)e_i = \big(\alpha(e,e')\alpha(e',e'')\big)^i_{i''}e_i.$$

С другой стороны, $e''_{i''} = \alpha^i_{i''}(e,e'')e_i$. Тогда: $\big(\alpha(e,e')\alpha(e',e'')\big)^i_{i''} = \alpha^i_{i''}(e,e'')$ при $i = \overline{1,N}$. Следовательно, $\alpha(e,e')\alpha(e',e'') = \alpha(e,e'')$.

3. Очевидно: $\alpha(e,e')\alpha(e',e) = \alpha(e,e) = I$. □

Замечание (одинаково ориентированные базисы, противоположно ориентированные базисы). Пусть $N = \overline{1,3}$.

Пусть e, e' — базисы пространства $\vec{E}^N$. Будем говорить, что e, e' — одинаково ориентированные базисы, если $\det\big(\alpha(e,e')\big) > 0$. Будем говорить, что e, e' — противоположно ориентированные базисы, если $\det\big(\alpha(e,e')\big) < 0$.

Пусть e, e' — базисы пространства $\vec{E}^N$. Базисы e, e' являются противоположно ориентированными тогда и только тогда, когда базисы e, e' не являются одинаково ориентированными.

Пусть e — базис пространства $\vec{E}^N$. Тогда e, e — одинаково ориентированные базисы.

Пусть: e, e' — базисы пространства $\vec{E}^N$; e, e' — одинаково ориентированные базисы. Тогда e', e — одинаково ориентированные базисы.

Пусть: e, e', e'' — базисы пространства $\vec{E}^N$; e, e' — одинаково ориентированные базисы, e', e'' — одинаково ориентированные базисы. Тогда e, e'' — одинаково ориентированные базисы.

Пусть: e, e', e'' — базисы пространства $\vec{E}^N$; e, e' — противоположно ориентированные базисы, e', e'' — противоположно ориентированные базисы. Тогда e, e'' — одинаково ориентированные базисы.

Замечание (правые и левые базисы, знак базиса). Пусть: $N = \overline{1,3}$; e_0 — базис пространства $\vec{E}^N$.

Пусть e — базис пространства $\vec{E}^N$. Будем говорить, что e — правый базис, если e, e_0 — одинаково ориентированные базисы. Будем говорить, что e — левый базис, если e, e_0 — противоположно ориентированные базисы.

Очевидно, e_0 — правый базис.

Пусть e — базис пространства $\vec{E}^N$. Базис e является левым тогда и только тогда, когда базис e не является правым.

Пусть e, e' — базисы пространства $\vec{E}^N$. Пусть e, e' — правые базисы. Тогда e, e' — одинаково ориентированные базисы. Пусть e, e' — левые базисы. Тогда e, e' — одинаково ориентированные базисы. Пусть: e — правый базис, e' — левый базис. Тогда e, e' — противоположно ориентированные базисы.

Пусть e — базис пространства $\vec{E}^N$. Пусть e — правый базис. Обозначим, $\operatorname{sgn}(e) = 1$. Пусть e — левый базис. Обозначим, $\operatorname{sgn}(e) = -1$. Будем говорить, что $\operatorname{sgn}(e)$ — знак базиса e.

4.3. Векторное и смешанное произведения

Замечание. Пусть: x, y, $z \in \vec{E}^3$, x, y — линейно независимые векторы, $\|z\| = \|x\| \cdot \|y\| \sin\bigl(\varphi(x, y)\bigr)$, $z \perp x$, y. Докажем, что x, y, z — базис пространства $\vec{E}^3$.

Так как x, y — линейно независимые векторы, то $x, y \neq \theta$. Тогда $\|x\|$, $\|y\| \neq 0$. Так как x, y — линейно независимые векторы, то $\varphi(x, y) \in (0, \pi)$. Тогда: $\|z\| = \|x\| \cdot \|y\| \sin\bigl(\varphi(x, y)\bigr) \neq 0$. Следовательно, $z \neq \theta$. Так как: x, y — линейно независимые векторы, $z \perp x$, y, то x, y, z — линейно независимые векторы. Тогда x, y, z — базис пространства $\vec{E}^3$.

Определение (векторное и смешанное произведения). Пусть x, $y \in \vec{E}^3$. Пусть x, y — линейно зависимые векторы. Обозначим, $[x, y] = \theta$. Пусть x, y — линейно независимые векторы. Обозначим через $[x, y]$ вектор, удовлетворяющий условиям: $[x, y] \in \vec{E}^3$, $\bigl\|[x, y]\bigr\| = \|x\| \cdot \|y\| \sin\bigl(\varphi(x, y)\bigr)$, $[x, y] \perp x$, y; x, y, $[x, y]$ — правый базис. Будем говорить, что $[x, y]$ — векторное произведение векторов x, y.

Пусть x, y, $z \in \vec{E}^3$. Обозначим, $(x, y, z) = \bigl([x, y], z\bigr)$. Будем говорить, что (x, y, z) — смешанное произведение векторов x, y, z.

Замечание («векторное» и «смешанное» произведения). Пусть e — ортонормированный базис пространства E^3.

Пусть x, $y \in \vec{E}^3$. Обозначим, $[x, y]_e = \sum\limits_{k_1, k_2, k_3 = \overline{1,3}} \operatorname{sgn}(e) \tilde{\varepsilon}_{k_1, k_2, k_3} [x]^{k_1}(e) [y]^{k_2}(e) e_{k_3}$. Будем говорить, что $[x, y]_e$ — «векторное» произведение векторов x, y.

Обозначим: $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$. Тогда:

$$[x, y]_e = \sum_{k_1, k_2, k_3 = \overline{1,3}} \operatorname{sgn}(e) \tilde{\varepsilon}_{k_1, k_2, k_3} \tilde{x}^{k_1} \tilde{y}^{k_2} e_{k_3} = \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 & e_1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 & e_2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 & e_3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} e_1 & \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 \\ e_2 & \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 \\ e_3 & \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 \end{vmatrix} =$$

$$= \operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \tilde{x}^1 & \tilde{x}^2 & \tilde{x}^3 \\ \tilde{y}^1 & \tilde{y}^2 & \tilde{y}^3 \end{vmatrix}.$$

Пусть x, y, $z \in \vec{E}^3$. Обозначим, $(x, y, z)_e = \operatorname{sgn}(e) \tilde{\varepsilon}_{k_1, k_2, k_3} [x]^{k_1}(e) [y]^{k_2}(e) [z]^{k_3}(e)$. Будем говорить, что $(x, y, z)_e$ — «смешанное» произведение векторов x, y, z.

Обозначим: $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$, $\tilde{z} = [z](e)$. Тогда:

$$(x, y, z)_e = \operatorname{sgn}(e)\tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,k_3}\tilde{x}^{k_1}\tilde{y}^{k_2}\tilde{z}^{k_3} = \operatorname{sgn}(e)\begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 & \tilde{z}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 & \tilde{z}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 & \tilde{z}^3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(e)\begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{x}^2 & \tilde{x}^3 \\ \tilde{y}^1 & \tilde{y}^2 & \tilde{y}^3 \\ \tilde{z}^1 & \tilde{z}^2 & \tilde{z}^3 \end{vmatrix}.$$

Утверждение. *Пусть e — ортонормированный базис пространства $\vec{E}^3$.*

1. *«Смешанное» произведение линейно по каждому аргументу.*
2. *«Смешанное» произведение антисимметрично.*
3. *Пусть: x, y, $z \in \vec{E}^3$, x, y, z — линейно зависимые векторы. Тогда $(x, y, z)_e = 0$.*
4. *Пусть: x, y, $z \in \vec{E}^3$, x, y, z — линейно независимые векторы, $(x, y, z)_e > 0$. Тогда x, y, z — правый базис пространства $\vec{E}^3$.*
5. *Пусть: x, y, $z \in \vec{E}^3$, x, y, z — линейно независимые векторы, $(x, y, z)_e < 0$. Тогда x, y, z — левый базис пространства $\vec{E}^3$.*
6. *Пусть x, y, $z \in \vec{E}^3$. Тогда $(x, y, z)_e = \big([x, y]_e, z\big)$.*
7. *Пусть x, y, $z \in \vec{E}^3$. Тогда $(x, y, z)_e = \big(x, [y, z]_e\big)$.*
8. *«Векторное» произведение линейно по каждому аргументу.*
9. *«Векторное» произведение антисимметрично.*
10. *Пусть a, b, $c \in \vec{E}^3$. Тогда $\big[a, [b, c]_e\big]_e = b(a, c) - c(a, b)$.*
11. *Пусть x, $y \in \vec{E}^3$. Тогда $\big\|[x, y]_e\big\| = \|x\| \cdot \|y\| \sin\big(\varphi(x, y)\big)$.*
12. *Пусть: x, $y \in \vec{E}^3$, x, y — линейно зависимые векторы. Тогда $[x, y]_e = \theta$.*
13. *Пусть x, $y \in \vec{E}^3$. Тогда $[x, y]_e \perp x$, y.*
14. *Пусть: x, $y \in \vec{E}^3$, x, y — линейно независимые векторы. Тогда x, y, $[x, y]_e$ — правый базис пространства $\vec{E}^3$.*
15. *Пусть x, $y \in \vec{E}^3$. Тогда $[x, y] = [x, y]_e$.*
16. *Пусть x, y, $z \in \vec{E}^3$. Тогда $(x, y, z) = (x, y, z)_e$.*

Доказательство.

1. Утверждение непосредственно следует из определения «смешанного» произведения.
2. Утверждение непосредственно следует из определения «смешанного» произведения.
3. Обозначим: $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$, $\tilde{z} = [z](e)$. Так как x, y, z — линейно зависимые векторы, то $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда:

$$(x, y, z)_e = \operatorname{sgn}(e)\begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 & \tilde{z}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 & \tilde{z}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 & \tilde{z}^3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Так как x, y, z — линейно независимые векторы, то x, y, z — базис пространства $\vec{E}^3$. Обозначим: $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$, $\tilde{z} = [z](e)$. Тогда:

$$\det\big(\alpha(e_1, e_2, e_3, x, y, z)\big) = \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 & \tilde{z}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 & \tilde{z}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 & \tilde{z}^3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(e)\operatorname{sgn}(e)\begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 & \tilde{z}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 & \tilde{z}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 & \tilde{z}^3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(e)(x, y, z)_e.$$

Пусть e — правый базис. Тогда:

$$\det\big(\alpha(e_1, e_2, e_3, x, y, z)\big) = \operatorname{sgn}(e)(x, y, z)_e > 0.$$

Следовательно, e_1, e_2, e_3 и x, y, z — одинаково ориентированные базисы. Так как e — правый базис, то x, y, z — правый базис.

Пусть e — левый базис. Тогда:

$$\det\bigl(\alpha(e_1, e_2, e_3, x, y, z)\bigr) = \operatorname{sgn}(e)(x, y, z)_e < 0.$$

Следовательно, e_1, e_2, e_3 и x, y, z — противоположно ориентированные базисы. Так как e — левый базис, то x, y, z — правый базис.

5. Так как x, y, z — линейно независимые векторы, то x, y, z — базис пространства $\vec{E}^3$. Обозначим: $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$, $\tilde{z} = [z](e)$. Тогда:

$$\det\bigl(\alpha(e_1, e_2, e_3, x, y, z)\bigr) = \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 & \tilde{z}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 & \tilde{z}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 & \tilde{z}^3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(e)\operatorname{sgn}(e) \begin{vmatrix} \tilde{x}^1 & \tilde{y}^1 & \tilde{z}^1 \\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2 & \tilde{z}^2 \\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3 & \tilde{z}^3 \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(e)(x, y, z)_e.$$

Пусть e — правый базис. Тогда:

$$\det\bigl(\alpha(e_1, e_2, e_3, x, y, z)\bigr) = \operatorname{sgn}(e)(x, y, z)_e < 0.$$

Следовательно, e_1, e_2, e_3 и x, y, z — противоположно ориентированные базисы. Так как e — правый базис, то x, y, z — левый базис.

Пусть e — левый базис. Тогда:

$$\det\bigl(\alpha(e_1, e_2, e_3, x, y, z)\bigr) = \operatorname{sgn}(e)(x, y, z)_e > 0.$$

Следовательно, e_1, e_2, e_3 и x, y, z — одинаково ориентированные базисы. Так как e — левый базис, то x, y, z — левый базис.

6. Обозначим: $\tilde{x} = [x](e)$, $\tilde{y} = [y](e)$, $\tilde{z} = [z](e)$. Тогда:

$$\bigl([x, y]_e, z\bigr) = \sum_{j=\overline{1,3}} \bigl[[x, y]_e\bigr]^j(e)\tilde{z}^j = \sum_{j=\overline{1,3}} \Biggl(\sum_{k_1,k_2=\overline{1,3}} \operatorname{sgn}(e)\tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{x}^{k_1}\tilde{y}^{k_2}\Biggr)\tilde{z}^j =$$
$$= \sum_{k_1,k_2,j=\overline{1,3}} \operatorname{sgn}(e)\tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{x}^{k_1}\tilde{y}^{k_2}\tilde{z}^j = (x, y, z)_e.$$

7. Очевидно: $(x, y, z)_e = (y, z, x)_e = \bigl([y, z]_e, x\bigr) = \bigl(x, [y, z]_e\bigr)$.
8. Утверждение непосредственно следует из определения «векторного» произведения.
9. Утверждение непосредственно следует из определения «векторного» произведения.
10. Обозначим: $\tilde{a} = [a](e)$, $\tilde{b} = [b](e)$, $\tilde{c} = [c](e)$. Пусть $j = \overline{1,3}$. Тогда:

$$\Bigl[\bigl[a, [b, c]_e\bigr]_e\Bigr]^j(e) = \sum_{k_1,k_2=\overline{1,3}} \operatorname{sgn}(e)\tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{a}^{k_1}\bigl[[b, c]_e\bigr]^{k_2}(e) =$$
$$= \sum_{k_1,k_2=\overline{1,3}} \operatorname{sgn}(e)\tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{a}^{k_1} \sum_{m_1,m_2=\overline{1,3}} \operatorname{sgn}(e)\tilde{\varepsilon}_{m_1,m_2,k_2}\tilde{b}^{m_1}\tilde{c}^{m_2} =$$
$$= \sum_{k_1,k_2=\overline{1,3}} \sum_{m_1,m_2=\overline{1,3}} \tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{\varepsilon}_{m_1,m_2,k_2}\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{m_1}\tilde{c}^{m_2} =$$
$$= \sum_{\substack{k_1,k_2=\overline{1,3},\\ k_1,\, k_2,\, j \text{ — различные числа}}} \sum_{\substack{m_1,m_2=\overline{1,3},\\ m_1,\, m_2,\, k_2 \text{ — различные числа}}} \tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{\varepsilon}_{m_1,m_2,k_2}\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{m_1}\tilde{c}^{m_2} =$$
$$= \Bigl[m_1 = k_1,\ m_2 = j \text{ либо } m_1 = j,\ m_2 = k_1\Bigr] =$$

$$= \sum_{\substack{k_1,k_2=\overline{1,3},\\ k_1,\,k_2,\,j\text{ — различные числа}}} \Big(\tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{\varepsilon}_{k_1,j,k_2}\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{k_1}\tilde{c}^{j} + \tilde{\varepsilon}_{k_1,k_2,j}\tilde{\varepsilon}_{j,k_1,k_2}\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{j}\tilde{c}^{k_1}\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1,k_2=\overline{1,3},\\ k_1,\,k_2,\,j\text{ — различные числа}}} \Big(\tilde{b}^{j}\tilde{a}^{k_1}\tilde{c}^{k_1} - \tilde{c}^{j}\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{k_1}\Big) = \sum_{\substack{k_1=\overline{1,3},\\ k_1\neq j}}\ \sum_{\substack{k_2=\overline{1,3},\\ k_2\neq k_1,j}} \Big(\tilde{b}^{j}\tilde{a}^{k_1}\tilde{c}^{k_1} - \tilde{c}^{j}\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{k_1}\Big) =$$

$$= \sum_{\substack{k_1=\overline{1,3},\\ k_1\neq j}} \Big(\tilde{b}^{j}\tilde{a}^{k_1}\tilde{c}^{k_1} - \tilde{c}^{j}\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{k_1}\Big) = \sum_{k_1=\overline{1,3}} \Big(\tilde{b}^{j}\tilde{a}^{k_1}\tilde{c}^{k_1} - \tilde{c}^{j}\tilde{a}^{k_1}\tilde{b}^{k_1}\Big) = \tilde{b}^{j}(a,c) - \tilde{c}^{j}(a,b) =$$

$$= \big[b(a,c) - c(a,b)\big]^{j}(e).$$

Следовательно, $\big[a,[b,c]_e\big]_e = b(a,c) - c(a,b)$.

11. Так как: $\|x\|,\ \|y\| \geqslant 0$, $\varphi(x,y)\in[0,\pi]$, то:

$$\big\|[x,y]_e\big\| = \sqrt{\big([x,y]_e,[x,y]_e\big)} = \sqrt{\Big(x,\big[y,[x,y]_e\big]_e\Big)} = \sqrt{\big(x, x(y,y) - y(y,x)\big)} =$$

$$= \sqrt{(x,x)(y,y) - (x,y)^2} = \sqrt{\|x\|^2\,\|y\|^2 - \Big(\|x\|\cdot\|y\|\cos\big(\varphi(x,y)\big)\Big)^2} =$$

$$= \sqrt{\|x\|^2\,\|y\|^2\Big(\sin\big(\varphi(x,y)\big)\Big)^2} = \|x\|\cdot\|y\|\sin\big(\varphi(x,y)\big).$$

12. Пусть $x=\theta \vee y=\theta$. Тогда $\|x\| = 0 \vee \|y\| = 0$. Следовательно: $\big\|[x,y]_e\big\| = \|x\|\cdot\|y\|\sin\big(\varphi(x,y)\big) = 0$. Тогда $[x,y]_e=\theta$.

Пусть $x, y\neq\theta$. Так как x, y — линейно зависимые векторы, то $\varphi(x,y)=0\vee\varphi(x,y)=\pi$. Тогда: $\big\|[x,y]_e\big\| = \|x\|\cdot\|y\|\sin\big(\varphi(x,y)\big) = 0$. Следовательно, $[x,y]_e=\theta$.

13. Так как $x,\ y,\ x$ — линейно зависимые векторы, то: $\big([x,y]_e,x\big) = (x,y,x)_e = 0$. Тогда $[x,y]_e\perp x$. Так как $x,\ y,\ y$ — линейно зависимые векторы, то: $\big([x,y]_e,y\big) = (x,y,y)_e = 0$. Тогда $[x,y]_e\perp y$.

14. Так как: $x,\ y$ — линейно независимые векторы, $\big\|[x,y]_e\big\| = \|x\|\cdot\|y\|\sin\big(\varphi(x,y)\big)$, $[x,y]_e\perp x, y$, то $x,\ y,\ [x,y]_e$ — базис пространства $\vec{E}^3$. Так как $[x,y]_e\neq\theta$, то: $\big(x,y,[x,y]_e\big)_e = \big([x,y]_e,[x,y]_e\big) > 0$. Так как $x,\ y,\ [x,y]_e$ — линейно независимые векторы, то $x,\ y,\ [x,y]_e$ — правый базис пространства E^3.

15. Пусть x, y — линейно зависимые векторы. Тогда: $[x,y]=\theta$, $[x,y]_e=\theta$. Следовательно, $[x,y]=[x,y]_e$.

Пусть $x,\ y$ — линейно независимые векторы. Так как: $[x,y]_e\in\vec{E}^3$, $\big\|[x,y]_e\big\| = \|x\|\cdot\|y\|\sin\big(\varphi(x,y)\big)$, $[x,y]_e\perp x,\ y$; $x,\ y,\ [x,y]_e$ — правый базис, то $[x,y]=[x,y]_e$.

16. Очевидно: $(x,y,z) = \big([x,y],z\big) = \big([x,y]_e,z\big) = (x,y,z)_e$. □

Утверждение.

1. *Пусть: $A,\ B,\ C\in E^3$, S — площадь параллелограмма со сторонами $[A,B]$, $[A,C]$. Тогда $\big\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\big\| = S$.*

2. *Пусть: $A,\ B,\ C,\ D\in E^3$, V — объём параллелепипеда со сторонами $[A,B]$, $[A,C]$, $[A,D]$. Тогда $\big|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\big| = V$.*

3. *Пусть $x,\ y,\ z\in\vec{E}^3$. Векторы $x,\ y,\ z$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда $(x,y,z)=0$.*

4. *Пусть: $x,\ y,\ z\in\vec{E}^3$, $(x,y,z)>0$. Тогда $x,\ y,\ z$ — правый базис пространства $\vec{E}^3$.*

5. *Пусть: $x,\ y,\ z\in\vec{E}^3$, $(x,y,z)<0$. Тогда $x,\ y,\ z$ — левый базис пространства $\vec{E}^3$.*

6. Пусть x, y, $z \in \vec{E}^3$. Тогда $\big[x,[y,z]\big]+\big[z,[x,y]\big]+\big[y,[z,x]\big]=\theta$ (равенство Якоби).

Доказательство.

1. Пусть A, B, C — аффинно зависимые точки. Тогда $S=0$. Так как A, B, C — аффинно зависимые точки, то $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ — линейно зависимые векторы. Тогда $\big\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\big\|=0$. Следовательно, $S=\big\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\big\|$.

Пусть A, B, C — аффинно независимые точки. Обозначим через l прямую, удовлетворяющую условиям: l — прямая в пространстве E^3, $l \subseteq \pi_*(A,B,C)$, $C \in l$, $l \perp l_*(A,B)$. Обозначим через C_1 точку, удовлетворяющую условиям: $C_1 \in l$, $C_1 \in l_*(A,B)$. Пусть: $C_1 \in l_+(A,B)$, $C_1 \neq A$. Тогда:

$$S=\rho(A,B)\rho(C_1,C)=\rho(A,B)\rho(A,C)\sin(\widehat{C_1AC})=\rho(A,B)\rho(A,C)\sin(\widehat{BAC})=$$
$$=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\sin\big(\varphi(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\big)=\big\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\big\|.$$

Пусть $C_1=A$. Тогда:

$$S=\rho(A,B)\rho(C_1,C)=\rho(A,B)\rho(A,C)\sin\Big(\frac{\pi}{2}\Big)=\rho(A,B)\rho(A,C)\sin(\widehat{BAC})=$$
$$=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\sin\big(\varphi(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\big)=\big\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\big\|.$$

Пусть $C_1 \notin l_+(A,B)$. Тогда:

$$S=\rho(A,B)\rho(C_1,C)=\rho(A,B)\rho(A,C)\sin(\widehat{C_1AC})=\rho(A,B)\rho(A,C)\sin(\pi-\widehat{BAC})=$$
$$=\rho(A,B)\rho(A,C)\sin(\widehat{BAC})=\|\overrightarrow{AB}\|\cdot\|\overrightarrow{AC}\|\sin\big(\varphi(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\big)=\big\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\big\|.$$

2. Пусть A, B, C, D — аффинно зависимые точки. Тогда $V=0$. Так как A, B, C, D — аффинно зависимые точки, то $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ — линейно зависимые векторы. Тогда $\big|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\big|=0$. Следовательно, $V=\big|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\big|$.

Пусть A, B, C, D — аффинно независимые точки. Обозначим через S площадь параллелограмма со сторонами $[A,B]$, $[A,C]$. Обозначим через l прямую, удовлетворяющую условиям: l — прямая в пространстве E^3, $D \in l$, $l \perp \pi_*(A,B,C)$. Обозначим через D_1 точку, удовлетворяющую условиям: $D_1 \in l$, $D_1 \in \pi_*(A,B,C)$. Тогда:

$$V=S\rho(D_1,D)=S\rho(A,D)\cos(\widehat{D_1DA})=\big\|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]\big\|\cdot\|\overrightarrow{AD}\|\cdot\left|\cos\Big(\varphi\big([\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}],\overrightarrow{AD}\big)\Big)\right|=$$
$$=\left|\big([\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}],\overrightarrow{AD}\big)\right|=\big|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})\big|.$$

3. Пусть x, y, z — линейно зависимые векторы. Тогда $(x,y,z)=0$.

Пусть $(x,y,z)=0$. Очевидно, существуют точки A, B, C, D, удовлетворяющие условиям: A, B, C, $D \in E^3$, $x=\overrightarrow{AB}$, $y=\overrightarrow{AC}$, $z=\overrightarrow{AD}$. Обозначим через V объём параллелепипеда со сторонами $[A,B]$, $[A,C]$, $[A,D]$. Тогда: $V=\big|(x,y,z)\big|=0$. Следовательно, A, B, C, D — аффинно зависимые точки. Тогда x, y, z — линейно зависимые векторы.

4. Так как $(x,y,z)\neq 0$, то x, y, z — линейно независимые векторы. Так как $(x,y,z)>0$, то x, y, z — правый базис пространства $\vec{E}^3$.

5. Так как $(x,y,z)\neq 0$, то x, y, z — линейно независимые векторы. Так как $(x,y,z)<0$, то x, y, z — левый базис пространства $\vec{E}^3$.

6. Очевидно:

$$\big[x,[y,z]\big]+\big[z,[x,y]\big]+\big[y,[z,x]\big]=$$
$$=y(x,z)-z(x,y)+x(z,y)-y(z,x)+z(y,x)-x(y,z)=\theta. \quad \square$$

Утверждение. *Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}\in\mathbb{R}^3$. Столбцы $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда:*

$$\begin{vmatrix}\tilde{x}^2 & \tilde{y}^2\\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}\tilde{x}^1 & \tilde{y}^1\\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}\tilde{x}^1 & \tilde{y}^1\\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2\end{vmatrix}=0.$$

Доказательство. Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда: $(\tilde{x}^2,\tilde{x}^3)^T$, $(\tilde{y}^2,\tilde{y}^3)^T$ — линейно зависимые столбцы, $(\tilde{x}^1,\tilde{x}^3)^T$, $(\tilde{y}^1,\tilde{y}^3)^T$ — линейно зависимые столбцы, $(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2)^T$, $(\tilde{y}^1,\tilde{y}^2)^T$ — линейно зависимые столбцы. Следовательно:

$$\begin{vmatrix}\tilde{x}^2 & \tilde{y}^2\\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}\tilde{x}^1 & \tilde{y}^1\\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}\tilde{x}^1 & \tilde{y}^1\\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2\end{vmatrix}=0.$$

Пусть:

$$\begin{vmatrix}\tilde{x}^2 & \tilde{y}^2\\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}\tilde{x}^1 & \tilde{y}^1\\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3\end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix}\tilde{x}^1 & \tilde{y}^1\\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2\end{vmatrix}=0.$$

Пусть e — ортонормированный базис пространства E^3. Обозначим: $x=\tilde{x}^k e_k$, $y=\tilde{y}^k e_k$. Тогда:

$$[x,y]=\operatorname{sgn}(e)\begin{vmatrix}\tilde{x}^2 & \tilde{y}^2\\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3\end{vmatrix}e_1-\operatorname{sgn}(e)\begin{vmatrix}\tilde{x}^1 & \tilde{y}^1\\ \tilde{x}^3 & \tilde{y}^3\end{vmatrix}e_2+\operatorname{sgn}(e)\begin{vmatrix}\tilde{x}^1 & \tilde{y}^1\\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2\end{vmatrix}e_3=\theta.$$

Следовательно, x, y — линейно зависимые векторы. Тогда $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — линейно зависимые столбцы. $\square$

Утверждение. *Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}\in\mathbb{R}^2$. Столбцы $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда* $\det(\tilde{x},\tilde{y})=0$.

Доказательство. Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда $\det(\tilde{x},\tilde{y})=0$.

Пусть $\det(\tilde{x},\tilde{y})=0$. Пусть e — ортонормированный базис пространства E^3. Обозначим: $x=\tilde{x}^1e_1+\tilde{x}^2e_2$, $y=\tilde{y}^1e_1+\tilde{y}^2e_2$. Тогда:

$$[x,y]=\operatorname{sgn}(e)\begin{vmatrix}\tilde{x}^2 & \tilde{y}^2\\ 0 & 0\end{vmatrix}e_1-\operatorname{sgn}(e)\begin{vmatrix}\tilde{x}^1 & \tilde{y}^1\\ 0 & 0\end{vmatrix}e_2+\operatorname{sgn}(e)\begin{vmatrix}\tilde{x}^1 & \tilde{y}^1\\ \tilde{x}^2 & \tilde{y}^2\end{vmatrix}e_3=\theta.$$

Следовательно, x, y — линейно зависимые векторы. Тогда $(\tilde{x}^1,\tilde{x}^2,0)^T$, $(\tilde{y}^1,\tilde{y}^2,0)^T$ — линейно зависимые столбцы. Следовательно, $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — линейно зависимые столбцы. $\square$

Утверждение. *Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}\in\mathbb{R}^3$. Столбцы $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда* $\det(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=0$.

Доказательство. Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ — линейно зависимые столбцы. Тогда $\det(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=0$.

Пусть $\det(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=0$. Пусть e — ортонормированный базис пространства E^3. Обозначим: $x=\tilde{x}^k e_k$, $y=\tilde{y}^k e_k$, $z=\tilde{z}^k e_k$. Тогда: $(x,y,z)=\operatorname{sgn}(e)\det(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})=0$. Следовательно, x, y, z — линейно зависимые векторы. Тогда $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, $\tilde{z}$ — линейно зависимые столбцы. $\square$

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.