Аналитическая геометрия

Бадьин А. В.

Лекция 2. Векторы в пространствах E^1, E^2, E^3

2.1. Пространство $\mathbb{R}^N$

Определение. Пусть $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество $\mathbb{R}^N$.

Пусть x, $y \in \mathbb{R}^N$. Обозначим:

$$x + y = \begin{pmatrix} x^1 + y^1 \\ \vdots \\ x^N + y^N \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $x+y \in \mathbb{R}^N$. Будем говорить, что $\{x+y\}_{x,y\in\mathbb{R}^N}$ — стандартная операция сложения на множестве $\mathbb{R}^N$.

Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$. Обозначим:

$$\lambda x = \begin{pmatrix} \lambda x^1 \\ \vdots \\ \lambda x^N \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\lambda x \in \mathbb{R}^N$. Будем говорить, что $\{\lambda x\}_{\lambda\in\mathbb{R},\, x\in\mathbb{R}^N}$ — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\mathbb{R}^N$.

Обозначим:

$$\tilde{\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $\tilde{\theta} \in \mathbb{R}^N$. Будем говорить, что $\tilde{\theta}$ — стандартный нулевой элемент множества $\mathbb{R}^N$.

Утверждение. *Пусть $N \in \mathbb{N}$.*

1. *Пусть x, $y \in \mathbb{R}^N$. Тогда $x + y = y + x$.*
2. *Пусть x, y, $z \in \mathbb{R}^N$. Тогда $(x + y) + z = x + (y + z)$.*
3. *Пусть $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда $x + \tilde{\theta} = x$.*
4. *Пусть $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда $x + (-1)x = \tilde{\theta}$.*
5. *Пусть: α, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.*
6. *Пусть $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда $1x = x$.*
7. *Пусть: α, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.*
8. *Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, x, $y \in \mathbb{R}^N$. Тогда $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.*
9. *Пусть $x \in \mathbb{R}^N$. Тогда $0x = \tilde{\theta}$.*

10. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\lambda\tilde{\theta} = \tilde{\theta}$.

11. Пусть a, $b \in \mathbb{R}^N$. *Существует единственный столбец* x, *удовлетворяющий условиям:* $x \in \mathbb{R}^N$, $a + x = b$.

Доказательство.

1. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(x+y)^j = x^j + y^j = y^j + x^j = (y+x)^j.$$

Следовательно, $x + y = y + x$.

2. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((x+y)+z\big)^j = (x^j + y^j) + z^j = x^j + (y^j + z^j) = \big(x + (y+z)\big)^j.$$

Следовательно, $(x+y)+z = x + (y+z)$.

3. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(x+\tilde{\theta})^j = x^j + \tilde{\theta}^j = x^j + 0 = x^j.$$

Следовательно, $x + \tilde{\theta} = x$.

4. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(x + (-1)x\big)^j = x^j + (-1)x^j = 0 = \tilde{\theta}^j.$$

Следовательно, $x + (-1)x = \tilde{\theta}$.

5. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((\alpha\beta)x\big)^j = (\alpha\beta)x^j = \alpha(\beta x^j) = \big(\alpha(\beta x)\big)^j.$$

Следовательно, $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

6. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(1x)^j = 1x^j = x^j.$$

Следовательно, $1x = x$.

7. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big((\alpha+\beta)x\big)^j = (\alpha+\beta)x^j = \alpha x^j + \beta x^j = (\alpha x + \beta x)^j.$$

Следовательно, $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$.

8. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$\big(\lambda(x+y)\big)^j = \lambda(x^j + y^j) = \lambda x^j + \lambda y^j = (\lambda x + \lambda y)^j.$$

Следовательно, $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.

9. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(0x)^j = 0x^j = 0 = \tilde{\theta}^j.$$

Следовательно, $0x = \tilde{\theta}$.

10. Пусть $j = \overline{1, N}$. Тогда:

$$(\lambda\tilde{\theta})^j = \lambda\tilde{\theta}^j = \lambda 0 = 0 = \tilde{\theta}^j.$$

Следовательно, $\lambda\tilde{\theta} = \tilde{\theta}$.

11. Пусть: $x \in \mathbb{R}^N$, $a + x = b$. Тогда:

$$\begin{gathered}
(-1)a + (a + x) = (-1)a + b,\\
\big((-1)a + a\big) + x = (-1)a + b,\\
\big(a + (-1)a\big) + x = (-1)a + b,\\
\tilde{\theta} + x = (-1)a + b,\\
x + \tilde{\theta} = (-1)a + b,\\
x = (-1)a + b.
\end{gathered}$$

Пусть: $x_1 \in \mathbb{R}^N$, $a + x_1 = b$, $x_2 \in \mathbb{R}^N$, $a + x_2 = b$. Тогда: $x_1 = (-1)a + b$, $x_2 = (-1)a + b$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Обозначим, $x = (-1)a + b$. Тогда: $x \in \mathbb{R}^N$, $a + x = a + \big((-1)a + b\big) = \big(a + (-1)a\big) + b = \tilde{\theta} + b = b + \tilde{\theta} = b$. □

Определение. Пусть $N \in \mathbb{N}$.

Пусть $x \in \mathbb{R}^N$. Обозначим, $-x = (-1)x$. Очевидно: $-x \in \mathbb{R}^N$, $x + (-x) = \tilde{\theta}$. Будем говорить, что $-x$ — противоположный столбец к столбцу x.

Пусть x, $y \in \mathbb{R}^N$. Обозначим, $y - x = (-1)x + y$. Очевидно: $y - x \in \mathbb{R}^N$, $x + (y - x) = y$. Будем говорить, что $y - x$ — разность столбцов y, x.

2.2. Линейная комбинация столбцов, линейная зависимость столбцов

Определение (линейная комбинация столбцов). Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^N$.

Будем говорить, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k x_k$ — линейная комбинация столбцов $x_1, \ldots, x_r$ с коэффициентами $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$.

Далее часто будем писать $\lambda^k x_k$ вместо $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k x_k$ (частный случай *правила суммирования Эйнштейна*).

Определение (линейная оболочка столбцов, линейная зависимость столбцов, линейная независимость столбцов). Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^N$.

Обозначим:

$$\begin{gathered}
L(x_1, \ldots, x_r) = \{\lambda^k x_k \colon \lambda^1 \in \mathbb{R} \wedge \cdots \wedge \lambda^r \in \mathbb{R}\} =\\
= \big\{u \colon \exists\lambda^1 \cdots \exists\lambda^r (\lambda^1 \in \mathbb{R} \wedge \cdots \wedge \lambda^r \in \mathbb{R} \wedge u = \lambda^k x_k)\big\}.
\end{gathered}$$

Очевидно, $L(x_1, \ldots, x_r) \subseteq \mathbb{R}^N$. Будем говорить, что $L(x_1, \ldots, x_r)$ — линейная оболочка столбцов $x_1, \ldots, x_r$. Пусть $k = \overline{1, r}$. Тогда: $x_k = \delta_k^m x_m \in L(x_1, \ldots, x_r)$ (здесь: $\delta_k^m = 0$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k \neq m$; $\delta_k^m = 1$ при: k, $m = \overline{1, r}$, $k = m$).

Будем говорить, что по любой линейной комбинации столбцов $x_1, \dots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, если для любых чисел $\alpha^1, \dots, \alpha^r$, $\beta^1, \dots, \beta^r$, удовлетворяющих условиям: $\alpha^1, \dots, \alpha^r$, $\beta^1, \dots, \beta^r \in \mathbb{R}$, $\alpha^k x_k = \beta^k x_k$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1, r}(\alpha^k = \beta^k)$.

Будем говорить, что $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые столбцы, если существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^r$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k x_k = \tilde{\theta}$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$.

Будем говорить, что $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые столбцы, если для любых чисел $\lambda^1, \dots, \lambda^r$, удовлетворяющих условиям: $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k x_k = \tilde{\theta}$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1, r}(\lambda^k = 0)$.

Утверждение (критерий линейной зависимости столбцов)**.** *Пусть $N \in \mathbb{N}$.*

1. Пусть $x \in \mathbb{R}^N$. Столбец x является линейно зависимым тогда и только тогда, когда $x = \tilde{\theta}$.

2. Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^N$. Столбцы $x_1, \dots, x_r$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда существует номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $x_{k_0} \in L(x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \dots, x_r)$.

Доказательство.

1. Пусть x — линейно зависимый столбец. Тогда существует число $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям: $\lambda x = \tilde{\theta}$, $\lambda \neq 0$. Следовательно, $x = \tilde{\theta}$.

Пусть $x = \tilde{\theta}$. Тогда $1x = \tilde{\theta}$. Так как $1 \neq 0$, то x — линейно зависимый столбец.

2. Пусть $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые столбцы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^N \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \tilde{\theta}$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$. Выберем номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $\lambda^{k_0} \neq 0$. Тогда:

$$\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^{k_0-1} x_{k_0-1} + \lambda^{k_0} x_{k_0} + \lambda^{k_0+1} x_{k_0+1} + \dots + \lambda^r x_r = \tilde{\theta},$$

$$x_{k_0} = \frac{-\lambda^1}{\lambda_{k_0}} x_1 + \dots + \frac{-\lambda^{k_0-1}}{\lambda_{k_0}} x_{k_0-1} + \frac{-\lambda^{k_0+1}}{\lambda_{k_0}} x_{k_0+1} + \dots + \frac{-\lambda^r}{\lambda_{k_0}} x_r,$$

$$x_{k_0} \in L(x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \dots, x_r).$$

Пусть существует номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $x_{k_0} \in L(x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \dots, x_r)$. Тогда существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^{k_0-1}$, $\lambda^{k_0+1}, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию:

$$x_{k_0} = \lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^{k_0-1} x_{k_0-1} + \lambda^{k_0+1} x_{k_0+1} + \dots + \lambda^r x_r.$$

Следовательно:

$$(-\lambda^1) x_1 + \dots + (-\lambda^{k_0-1}) x_{k_0-1} + 1 x_{k_0} + (-\lambda^{k_0+1}) x_{k_0+1} + \dots + (-\lambda^r) x_r = \tilde{\theta}.$$

Так как $1 \neq 0$, то $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые столбцы. □

Утверждение (критерий линейной независимости столбцов)**.** *Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{R}^N$. Столбцы $x_1, \dots, x_r$ являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда по любой линейной комбинации столбцов $x_1, \dots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые столбцы. Пусть: $\alpha^1, \dots, \alpha^r$, $\beta^1, \dots, \beta^r \in \mathbb{R}$, $\alpha^k x_k = \beta^k x_k$. Тогда $(\alpha^k - \beta^k) x_k = \tilde{\theta}$. Так как $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые столбцы, то $\forall k = \overline{1, r}(\alpha^k - \beta^k = 0)$. Тогда $\forall k = \overline{1, r}(\alpha^k = \beta^k)$. Следовательно, по любой линейной комбинации столбцов $x_1, \dots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты.

Пусть по любой линейной комбинации столбцов $x_1, \dots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты. Пусть: $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k x_k = \widetilde{\theta}$. Тогда:

$$\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^r x_r = 0x_1 + \dots + 0x_r.$$

Так как по любой линейной комбинации столбцов $x_1, \dots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, то $\forall k = \overline{1, r}(\lambda^k = 0)$. Тогда $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые столбцы. $\square$

Утверждение. *Пусть: $N \in \mathbb{N}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_r$, $x \in \mathbb{R}^N$, $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые столбцы, $x_1, \dots, x_r$, x — линейно зависимые столбцы. Тогда $x \in L(x_1, \dots, x_r)$.*

Доказательство. Так как $x_1, \dots, x_r$, x — линейно зависимые столбцы, то существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^{r+1} \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^r x_r + \lambda^{r+1} x = \widetilde{\theta}$, $\exists k = \overline{1, r+1}(\lambda^k \neq 0)$. Предположим, что $\lambda^{r+1} = 0$. Тогда: $\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^r x_r = \widetilde{\theta}$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$ (что противоречит утверждению: $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые столбцы). Итак, $\lambda^{r+1} \neq 0$. Тогда:

$$x = \frac{-\lambda^1}{\lambda^{r+1}} x_1 + \dots + \frac{-\lambda^r}{\lambda^{r+1}} x_r,$$
$$x \in L(x_1, \dots, x_r). \quad \square$$

Замечание (перестановки).

1. Пусть M — некоторое множество.

Будем говорить, что σ — перестановка множества M, если: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) = M$.

Обозначим через $S(M)$ множество всех перестановок множества M.

Пусть σ_1, $\sigma_2 \in S(M)$. Обозначим, $\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2 \circ \sigma_1$. Очевидно: $\sigma_2\sigma_1$ — обратимая функция,

$$\mathrm{D}(\sigma_2\sigma_1) = \bigl\{x \colon x \in \mathrm{D}(\sigma_1) \wedge \sigma_1(x) \in \mathrm{D}(\sigma_2)\bigr\} = \bigl\{x \colon x \in M \wedge \sigma_1(x) \in M\bigr\} = \{x \colon x \in M\} = M,$$
$$\mathrm{R}(\sigma_2\sigma_1) = (\sigma_2\sigma_1)[M] = \sigma_2\bigl[\sigma_1[M]\bigr] = \sigma_2\bigl[\mathrm{R}(\sigma_1)\bigr] = \sigma_2[M] = \mathrm{R}(\sigma_2) = M.$$

Тогда $\sigma_2\sigma_1 \in S(M)$.

Обозначим: $e(x) = x$ при $x \in M$. Очевидно, $e \in S(M)$.

Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: σ^{-1} — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma^{-1}) = \mathrm{R}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma^{-1}) = \mathrm{D}(\sigma) = M$. Тогда $\sigma^{-1} \in S(M)$.

Пусть σ_1, σ_2, $\sigma_3 \in S(M)$. Очевидно, $(\sigma_3\sigma_2)\sigma_1 = \sigma_3(\sigma_2\sigma_1)$.

Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma e = \sigma$, $e\sigma = \sigma$.

Пусть $\sigma \in S(M)$. Очевидно: $\sigma\sigma^{-1} = e$, $\sigma^{-1}\sigma = e$.

2. Пусть: M — некоторое **конечное** множество, σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = M$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq M$. Так как $\mathrm{D}(\sigma)$ — конечное множество, то $\mathrm{R}(\sigma)$ — конечное множество. Так как σ — обратимая функция, то: $\mathrm{card}\bigl(\mathrm{R}(\sigma)\bigr) = \mathrm{card}\bigl(\mathrm{D}(\sigma)\bigr) = \mathrm{card}(M)$. Так как: $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq M$, $\mathrm{card}\bigl(\mathrm{R}(\sigma)\bigr) = \mathrm{card}(M)$, то $\mathrm{R}(\sigma) = M$. Тогда $\sigma \in S(M)$.

3. Обозначим, $S_0 = S(\varnothing)$.

Пусть $r \in \mathbb{N}$. Обозначим, $S_r = S\bigl(\{1, \dots, r\}\bigr)$.

4. Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $k_1, \dots, k_r = \overline{1, r}$, $k_1, \dots, k_r$ — различные числа. Обозначим: $\sigma(1) = k_1, \dots, \sigma(r) = k_r$. Очевидно: σ — обратимая функция, $\mathrm{D}(\sigma) = \{1, \dots, r\}$, $\mathrm{R}(\sigma) \subseteq \{1, \dots, r\}$. Тогда $\sigma \in S_r$.

Утверждение. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^N$*,* $\sigma \in S_r$*,* $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}$ *— линейно зависимые столбцы. Тогда* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые столбцы.*

Доказательство. Так как $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}$ — линейно зависимые столбцы, то существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 x_{\sigma(1)} + \cdots + \lambda^r x_{\sigma(r)} = \tilde{\theta}$, $\exists m = \overline{1,r}(\lambda^m \neq 0)$. Тогда:

$$\lambda^{\sigma^{-1}(1)} x_1 + \cdots + \lambda^{\sigma^{-1}(r)} x_r = \tilde{\theta}, \quad \exists k = \overline{1,r}(\lambda^{\sigma^{-1}(k)} \neq 0).$$

Следовательно, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые столбцы. □

Утверждение. *Пусть:* $N \in \mathbb{N}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^N$*,* $r_0 \in \mathbb{N}$*,* $k_1, \ldots, k_{r_0} = \overline{1,r}$*,* $k_1 < \cdots < k_{r_0}$*,* $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_0}}$ *— линейно зависимые столбцы. Тогда* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые столбцы.*

Доказательство. Так как $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_0}}$ — линейно зависимые столбцы, то существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_0} \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\alpha^1 x_{k_1} + \cdots + \alpha^{r_0} x_{k_{r_0}} = \tilde{\theta}$, $\exists m = \overline{1,r_0}(\alpha^m \neq 0)$. Обозначим: $\beta^{k_1} = \alpha^1, \ldots, \beta^{k_{r_0}} = \alpha^{r_0}$, $\beta^k = 0$ при: $k = \overline{1,r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Тогда:

$$\beta^{k_1} x_{k_1} + \cdots + \beta^{k_{r_0}} x_{k_{r_0}} = \tilde{\theta}, \quad \exists m = \overline{1,r_0}(\beta^{k_m} \neq 0);$$
$$\beta^1 x_1 + \cdots + \beta^r x_r = \tilde{\theta}, \quad \exists k = \overline{1,r}(\beta^k \neq 0).$$

Следовательно, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые столбцы. □

2.3. Пространства E^1, E^2, E^3

Замечание (пространство E^1). Обозначим через E^1 одномерное евклидово геометрическое пространство. Из аксиом элементарной геометрии непосредственно следует, что $E^1 \neq \varnothing$.

Пусть A, $B \in E^1$. Обозначим через $\rho(A,B)$ расстояние между точками A, B.

Пусть $p_1, p_2 \in E^1$. Будем говорить, что p_1, p_2 — аффинно зависимые точки, если $p_1 = p_2$.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 3$, $p_1, \ldots, p_r \in E^1$. Будем говорить, что $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно зависимые точки.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $p_1, \ldots, p_r \in E^1$. Будем говорить, что $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки, если точки $p_1, \ldots, p_r$ не являются аффинно зависимыми.

Пусть A, B — аффинно независимые точки пространства E^1. Обозначим через $l_+(A,B)$ множество всех точек p, удовлетворяющих условиям: $p \in E^1$ и либо $p = A$, либо точка p лежит между точками A, B, либо $p = B$, либо точка B лежит между точками A, p. Будем говорить, что $l_+(A,B)$ — луч, выходящий из точки A и проходящий через точку B.

Пусть O, I — аффинно независимые точки пространства E^1. Пусть $A \in E^1$. Пусть $A \in l_+(O,I)$. Обозначим, $h(A) = \frac{\rho(O,A)}{\rho(O,I)}$. Пусть $A \notin l_+(O,I)$. Обозначим, $h(A) = -\frac{\rho(O,A)}{\rho(O,I)}$. Очевидно: h — обратимая функция, $\mathrm{D}(h) = E^1$, $\mathrm{R}(h) = \mathbb{R}$. Будем говорить, что h — аффинная координатная карта (аффинная система координат) в пространстве E^1, соответствующая точкам O, I. Пусть $A \in E^1$. Будем говорить, что $h(A)$ — координата точки A в координатной карте h. Очевидно: $h(O) = 0$, $h(I) = 1$.

Замечание (пространство E^2). Обозначим через E^2 двумерное евклидово геометрическое пространство. Из аксиом элементарной геометрии непосредственно следует, что $E^2 \neq \varnothing$.

Пусть A, $B \in E^2$. Обозначим через $\rho(A,B)$ расстояние между точками A, B.

Пусть $p_1, p_2 \in E^2$. Будем говорить, что p_1, p_2 — аффинно зависимые точки, если $p_1 = p_2$.

Пусть p_1, p_2, $p_3 \in E^2$. Будем говорить, что p_1, p_2, p_3 — аффинно зависимые точки, если существует прямая l, удовлетворяющая условиям: l — прямая в пространстве E^2, p_1, p_2, $p_3 \in l$.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 4$, $p_1, \ldots, p_r \in E^2$. Будем говорить, что $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно зависимые точки.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $p_1, \ldots, p_r \in E^2$. Будем говорить, что $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки, если точки $p_1, \ldots, p_r$ не являются аффинно зависимыми.

Пусть l_1, l_2 — прямые в пространстве E^2. Будем писать $l_1 \parallel l_2$, если либо $l_1 \cap l_2 = \varnothing$, либо $l_1 = l_2$. Утверждение $l_1 \parallel l_2$ читается: «прямая l_1 параллельна прямой l_2».

Пусть A, B — аффинно независимые точки пространства E^2. Обозначим через $l_*(A, B)$ прямую, удовлетворяющую условиям: $l_*(A, B)$ — прямая в пространстве E^2, A, $B \in l_*(A, B)$.

Пусть A, B — аффинно независимые точки пространства E^2. Обозначим через $l_+(A, B)$ множество всех точек p, удовлетворяющих условиям: $p \in l_*(A, B)$ и либо $p = A$, либо точка p лежит между точками A, B, либо $p = B$, либо точка B лежит между точками A, p. Будем говорить, что $l_+(A, B)$ — луч, выходящий из точки A и проходящий через точку B.

Пусть O, I_1, I_2 — аффинно независимые точки пространства E^2. Пусть $A \in E^2$. Обозначим через l_1 прямую, удовлетворяющую условиям: l_1 — прямая в пространстве E^2, $A \in l_1$, $l_1 \parallel l_*(O, I_2)$. Обозначим через A_1 точку, удовлетворяющую условиям: $A_1 \in l_1$, $A_1 \in l_*(O, I_1)$. Пусть $A_1 \in l_+(O, I_1)$. Обозначим, $h^1(A) = \frac{\rho(O,A_1)}{\rho(O,I_1)}$. Пусть $A_1 \notin l_+(O, I_1)$. Обозначим, $h^1(A) = -\frac{\rho(O,A_1)}{\rho(O,I_1)}$. Обозначим через l_2 прямую, удовлетворяющую условиям: l_2 — прямая в пространстве E^2, $A \in l_2$, $l_2 \parallel l_*(O, I_1)$. Обозначим через A_2 точку, удовлетворяющую условиям: $A_2 \in l_2$, $A_2 \in l_*(O, I_2)$. Пусть $A_2 \in l_+(O, I_2)$. Обозначим, $h^2(A) = \frac{\rho(O,A_2)}{\rho(O,I_2)}$. Пусть $A_2 \notin l_+(O, I_2)$. Обозначим, $h^2(A) = -\frac{\rho(O,A_2)}{\rho(O,I_2)}$. Очевидно: h — обратимая функция, $\mathrm{D}(h) = E^2$, $\mathrm{R}(h) = \mathbb{R}^2$. Будем говорить, что h — аффинная координатная карта (аффинная система координат) в пространстве E^2, соответствующая точкам O, I_1, I_2. Пусть $A \in E^2$. Будем говорить, что $h(A)$ — столбец координат точки A в координатной карте h. Очевидно: $h^m(O) = 0$ при $m = 1, 2$; $h^m(I_k) = \delta^m_k$ при k, $m = 1, 2$.

Пусть: p_1, p_2, $p_3 \in E^2$, p_1, p_2 — аффинно независимые точки, p_1, p_2, p_3 — аффинно зависимые точки. Очевидно, $p_3 \in l_*(p_1, p_2)$.

Пусть: O, I_1, I_2 — аффинно независимые точки пространства E^2, h — соответствующая аффинная координатная карта. Очевидно: $p \in l_*(O, I_1)$ тогда и только тогда, когда: $p \in E^2$, $h^2(p) = 0$.

Замечание (пространство E^3). Обозначим через E^3 трёхмерное евклидово геометрическое пространство. Из аксиом элементарной геометрии непосредственно следует, что $E^3 \neq \varnothing$.

Пусть A, $B \in E^3$. Обозначим через $\rho(A, B)$ расстояние между точками A, B.

Пусть $p_1, p_2 \in E^3$. Будем говорить, что p_1, p_2 — аффинно зависимые точки, если $p_1 = p_2$.

Пусть p_1, p_2, $p_3 \in E^3$. Будем говорить, что p_1, p_2, p_3 — аффинно зависимые точки, если существует прямая l, удовлетворяющая условиям: l — прямая в пространстве E^3, p_1, p_2, $p_3 \in l$.

Пусть $p_1, p_2, p_3, p_4 \in E^3$. Будем говорить, что p_1, p_2, p_3, p_4 — аффинно зависимые точки, если существует плоскость π, удовлетворяющая условиям: π — плоскость в пространстве E^3, p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \pi$.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 5$, $p_1, \ldots, p_r \in E^3$. Будем говорить, что $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно зависимые точки.

Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $p_1, \ldots, p_r \in E^3$. Будем говорить, что $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки, если точки $p_1, \ldots, p_r$ не являются аффинно зависимыми.

Пусть l_1, l_2 — прямые в пространстве E^3. Будем писать $l_1 \parallel l_2$, если:

1. существует плоскость π, удовлетворяющая условиям: π — плоскость в пространстве E^3, l_1, $l_2 \subseteq \pi$;
2. либо $l_1 \cap l_2 = \varnothing$, либо $l_1 = l_2$.

Утверждение $l_1 \parallel l_2$ читается: «прямая l_1 параллельна прямой l_2».

Пусть A, B — аффинно независимые точки пространства E^3. Обозначим через $l_*(A, B)$ прямую, удовлетворяющую условиям: $l_*(A, B)$ — прямая в пространстве E^3, A, $B \in l_*(A, B)$.

Пусть A, B — аффинно независимые точки пространства E^3. Обозначим через $l_+(A, B)$ множество всех точек p, удовлетворяющих условиям: $p \in l_*(A, B)$ и либо $p = A$, либо точка p лежит между точками A, B, либо $p = B$, либо точка B лежит между точками A, p. Будем говорить, что $l_+(A, B)$ — луч, выходящий из точки A и проходящий через точку B.

Пусть π_1, π_2 — плоскости в пространстве E^3. Будем писать $\pi_1 \parallel \pi_2$, если либо $\pi_1 \cap \pi_2 = \varnothing$, либо $\pi_1 = \pi_2$. Утверждение $\pi_1 \parallel \pi_2$ читается: «плоскость π_1 параллельна плоскости π_2».

Пусть A, B, C — аффинно независимые точки пространства E^3. Обозначим через $\pi_*(A, B, C)$ плоскость, удовлетворяющую условиям: $\pi_*(A, B, C)$ — плоскость в пространстве E^3, A, B, $C \in \pi_*(A, B, C)$.

Пусть: O, I_1, I_2, I_3 — аффинно независимые точки пространства E^3. Пусть $A \in E^3$. Обозначим через π_1 плоскость, удовлетворяющую условиям: π_1 — плоскость в пространстве E^3, $A \in \pi_1$, $\pi_1 \parallel \pi_*(O, I_2, I_3)$. Обозначим через A_1 точку, удовлетворяющую условиям: $A_1 \in \pi_1$, $A_1 \in l_*(O, I_1)$. Пусть $A_1 \in l_+(O, I_1)$. Обозначим, $h^1(A) = \frac{\rho(O,A_1)}{\rho(O,I_1)}$. Пусть $A_1 \notin l_+(O, I_1)$. Обозначим, $h^1(A) = -\frac{\rho(O,A_1)}{\rho(O,I_1)}$. Обозначим через π_2 плоскость, удовлетворяющую условиям: π_2 — плоскость в пространстве E^3, $A \in \pi_2$, $\pi_2 \parallel \pi_*(O, I_1, I_3)$. Обозначим через A_2 точку, удовлетворяющую условиям: $A_2 \in \pi_2$, $A_2 \in l_*(O, I_2)$. Пусть $A_2 \in l_+(O, I_2)$. Обозначим, $h^2(A) = \frac{\rho(O,A_2)}{\rho(O,I_2)}$. Пусть $A_2 \notin l_+(O, I_2)$. Обозначим, $h^2(A) = -\frac{\rho(O,A_2)}{\rho(O,I_2)}$. Обозначим через π_3 плоскость, удовлетворяющую условиям: π_3 — плоскость в пространстве E^3, $A \in \pi_3$, $\pi_3 \parallel \pi_*(O, I_1, I_2)$. Обозначим через A_3 точку, удовлетворяющую условиям: $A_3 \in \pi_3$, $A_3 \in l_*(O, I_3)$. Пусть $A_3 \in l_+(O, I_3)$. Обозначим, $h^3(A) = \frac{\rho(O,A_3)}{\rho(O,I_3)}$. Пусть $A_3 \notin l_+(O, I_3)$. Обозначим, $h^3(A) = -\frac{\rho(O,A_3)}{\rho(O,I_3)}$. Очевидно: h — обратимая функция, $\mathrm{D}(h) = E^3$, $\mathrm{R}(h) = \mathbb{R}^3$. Будем говорить, что h — аффинная координатная карта (аффинная система координат) в пространстве E^3, соответствующая точкам O, I_1, I_2, I_3. Пусть $A \in E^3$. Будем говорить, что $h(A)$ — столбец координат точки A в координатной карте h. Очевидно: $h^m(O) = 0$ при $m = \overline{1,3}$; $h^m(I_k) = \delta^m_k$ при k, $m = \overline{1,3}$.

Пусть: p_1, p_2, $p_3 \in E^3$, p_1, p_2 — аффинно независимые точки, p_1, p_2, p_3 — аффинно зависимые точки. Очевидно, $p_3 \in l_*(p_1, p_2)$.

Пусть: p_1, p_2, p_3, $p_4 \in E^3$, p_1, p_2, p_3 — аффинно независимые точки, p_1, p_2, p_3, p_4 — аффинно зависимые точки. Очевидно, $p_4 \in \pi_*(p_1, p_2, p_3)$.

Пусть: O, I_1, I_2, I_3 — аффинно независимые точки пространства E^3, h — соответствующая аффинная координатная карта. Очевидно: $p \in l_*(O, I_1)$ тогда и только тогда, когда: $p \in E^3$, $h^2(p)$, $h^3(p) = 0$.

Пусть: O, I_1, I_2, I_3 — аффинно независимые точки пространства E^3, h — соответствующая аффинная координатная карта. Очевидно: $p \in \pi_*(O, I_1, I_2)$ тогда и только тогда, когда: $p \in E^3$, $h^3(p) = 0$.

Утверждение (непосредственно следует из определения аффинно зависимых точек).

Пусть: $N = \overline{1,3}$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $p_1, \dots, p_r \in E^N$, $\sigma \in S_r$, $p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(r)}$ *— аффинно зависимые точки. Тогда* $p_1, \dots, p_r$ *— аффинно зависимые точки.*

Утверждение (нетрудно доказать, используя определение аффинно зависимых точек и средства элементарной геометрии)**.** *Пусть:* $N = \overline{1,3}$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $p_1, \dots, p_r \in E^N$, $r_0 \in \mathbb{Z}$, $r_0 \geqslant 2$, $k_1, \dots, k_{r_0} = \overline{1,r}$, $k_1 < \dots < k_{r_0}$, $p_{k_1}, \dots, p_{k_{r_0}}$ *— аффинно зависимые точки. Тогда* $p_1, \dots, p_r$ *— аффинно зависимые точки.*

Утверждение (нетрудно доказать, используя определение аффинно зависимых точек и средства элементарной геометрии)**.** *Пусть:* $N = \overline{1,3}$; $r = \overline{2,N}$, $p_1, \dots, p_r \in E^N$, $p_1, \dots, p_r$ *— аффинно независимые точки. Существуют точки* $p_{r+1}, \dots, p_{N+1}$*, удовлетворяющие условиям:* $p_{r+1}, \dots, p_{N+1} \in E^N$, $p_1, \dots, p_{N+1}$ *— аффинно независимые точки.*

Определение (эквивалентность упорядоченных пар точек). Пусть: $N = \overline{1,3}$; $u_1, u_2 \in (E^N)^2$. Пусть: $A_1 = u_1^1$, $B_1 = u_1^2$, $A_2 = u_2^1$, $B_2 = u_2^2$, C_1 — середина отрезка $[A_1, B_2]$, C_2 — середина отрезка $[A_2, B_1]$. Будем писать $u_1 \approx u_2$, если $C_1 = C_2$. Утверждение $u_1 \approx u_2$ читается: «упорядоченная пара точек u_1 эквивалентна упорядоченной паре точек u_2».

Утверждение (нетрудно доказать, используя определение эквивалентности упорядоченных пар точек и средства элементарной геометрии)**.** *Пусть* $N = \overline{1,3}$.

1. *Пусть:* A_1, B_1, A_2, $B_2 \in E^N$, $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$. *Тогда* $\rho(A_1, B_1) = \rho(A_2, B_2)$.
2. *Пусть:* A_1, B_1, A_2, $B_2 \in E^N$, $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$, $A_1 \neq B_1$. *Тогда:* $A_2 \neq B_2$, $l_*(A_1, B_1) \parallel l_*(A_2, B_2)$.

Утверждение (выражение для координат середины отрезка; нетрудно доказать, используя определение аффинной координатной карты и теорему Фалеса)**.** *Пусть:* $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \dots, I_N$ *— аффинно независимые точки пространства* E^N*,* h *— соответствующая аффинная координатная карта;* A, $B \in E^N$, C *— середина отрезка* $[A, B]$*. Тогда* $h(C) = \frac{1}{2}\big(h(A) + h(B)\big)$.

Утверждение (критерий эквивалентности упорядоченных пар точек)**.** *Пусть:* $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \dots, I_N$ *— аффинно независимые точки пространства* E^N*,* h *— соответствующая аффинная координатная карта;* A_1, B_1, A_2, $B_2 \in E^N$*. Утверждение* $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$ *справедливо тогда и только тогда, когда* $h(B_1) - h(A_1) = h(B_2) - h(A_2)$.

Доказательство. Пусть $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$. Тогда:

$$\begin{gathered} C_1 = C_2, \\ h(C_1) = h(C_2), \\ \frac{1}{2}\big(h(A_1) + h(B_2)\big) = \frac{1}{2}\big(h(A_2) + h(B_1)\big), \\ h(B_1) - h(A_1) = h(B_2) - h(A_2). \end{gathered}$$

Пусть $h(B_1) - h(A_1) = h(B_2) - h(A_2)$. Тогда:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\big(h(A_1) + h(B_2)\big) = \frac{1}{2}\big(h(A_2) + h(B_1)\big), \\ h(C_1) = h(C_2), \\ C_1 = C_2, \\ (A_1, B_1) \approx (A_2, B_2). \quad \square \end{gathered}$$

Утверждение. *Пусть* $N = \overline{1,3}$.

1. *Пусть* $u \in (E^N)^2$. *Тогда* $u \approx u$.
2. *Пусть:* u_1, $u_2 \in (E^N)^2$, $u_1 \approx u_2$. *Тогда* $u_2 \approx u_1$.
3. *Пусть:* u_1, u_2, $u_3 \in (E^N)^2$, $u_1 \approx u_2$, $u_2 \approx u_3$. *Тогда* $u_1 \approx u_3$.

Доказательство.

1. Утверждение непосредственно следует из определения эквивалентности упорядоченных пар точек.

2. Утверждение непосредственно следует из определения эквивалентности упорядоченных пар точек.

3. Обозначим: $A_1 = u_1^1$, $B_1 = u_1^2$, $A_2 = u_2^1$, $B_2 = u_2^2$, $A_3 = u_3^1$, $B_3 = u_3^2$. Так как: $u_1 \approx u_2$, $u_2 \approx u_3$, то: $h(B_1) - h(A_1) = h(B_2) - h(A_2)$, $h(B_2) - h(A_2) = h(B_3) - h(A_3)$. Тогда $h(B_1) - h(A_1) = h(B_3) - h(A_3)$. Следовательно, $u_1 \approx u_3$. □

Определение (вектор пространства E^N). Пусть $N = \overline{1,3}$.

Пусть A, $B \in E^N$. Обозначим:

$$\overrightarrow{AB} = \big\{u\colon u \in (E^N)^2 \wedge u \approx (A,B)\big\}.$$

Будем говорить, что x — вектор пространства E^N, если существуют точки A, B, удовлетворяющие условиям: A, $B \in E^N$, $x = \overrightarrow{AB}$.

Обозначим через $\vec{E}^N$ множество всех векторов пространства E^N.

Пусть A, $B \in E^N$. Очевидно, $\overrightarrow{AB} \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что $\{\overrightarrow{AB}\}_{A,B\in E^N}$ — стандартная операция векторизации на множестве E^N.

Утверждение (первый критерий равенства векторов). *Пусть:* $N = \overline{1,3}$; A_1, B_1, A_2, $B_2 \in E^N$. *Утверждение* $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$ *справедливо тогда и только тогда, когда* $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$.

Доказательство. Пусть $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$. Так как: $(A_1, B_1) \in (E^N)^2$, $(A_1, B_1) \approx (A_1, B_1)$, то $(A_1, B_1) \in \overrightarrow{A_1B_1}$. Так как $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$, то $(A_1, B_1) \in \overrightarrow{A_2B_2}$. Тогда $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$.

Пусть $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$. Тогда $(A_2, B_2) \approx (A_1, B_1)$.

Пусть $u \in \overrightarrow{A_1B_1}$. Тогда: $u \in (E^N)^2$, $u \approx (A_1, B_1)$. Так как $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$, то: $u \in (E^N)^2$, $u \approx (A_2, B_2)$. Тогда $u \in \overrightarrow{A_2B_2}$.

Пусть $u \in \overrightarrow{A_2B_2}$. Тогда: $u \in (E^N)^2$, $u \approx (A_2, B_2)$. Так как $(A_2, B_2) \approx (A_1, B_1)$, то: $u \in (E^N)^2$, $u \approx (A_1, B_1)$. Тогда $u \in \overrightarrow{A_1B_1}$. Итак, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$. □

Определение (координаты вектора). Пусть: $N = \overline{1,3}$; $O, I_1, \ldots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, h — соответствующая аффинная координатная карта; $x \in \vec{E}^N$. Пусть: A, $B \in E^N$, $x = \overrightarrow{AB}$. Обозначим, $[x](h) = h(B) - h(A)$. Будем говорить, что $[x](h)$ — столбец координат вектора x в координатной карте h. **Корректность определения координат вектора непосредственно следует из: определения вектора; первого критерия равенства векторов, критерия эквивалентности упорядоченных пар точек.**

Утверждение (второй критерий равенства векторов). *Пусть:* $N = \overline{1,3}$; $O, I_1, \ldots, I_N$ — *аффинно независимые точки пространства* E^N, h — *соответствующая аффинная координатная карта;* x, $y \in \vec{E}^N$. *Утверждение* $x = y$ *справедливо тогда и только тогда, когда* $[x](h) = [y](h)$.

Доказательство. Пусть $x = y$. Тогда $[x](h) = [y](h)$.

Пусть $[x](h) = [y](h)$. Выберем точки A_1, B_1, A_2, B_2, удовлетворяющие условиям: A_1, B_1, A_2, $B_2 \in E^N$, $x = \overrightarrow{A_1B_1}$, $y = \overrightarrow{A_2B_2}$. Тогда $h(B_1) - h(A_1) = h(B_2) - h(A_2)$. Следовательно $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$. Тогда $x = y$. □

Определение. Пусть: $N = \overline{1,3}$; $\lambda \in \mathbb{R}$, A, $B \in E^N$. Пусть $A = B$. Обозначим, $P_*(\lambda, A, B) = A$. Пусть: $A \neq B$, $\lambda \geqslant 0$. Обозначим через $P_*(\lambda, A, B)$ точку, удовлетворяющую условиям: $P_*(\lambda, A, B) \in l_+(A, B)$, $\rho\big(A, P_*(\lambda, A, B)\big) = \lambda\rho(A, B)$. Пусть: $A \neq B$, $\lambda < 0$. Обозначим через $P_*(\lambda, A, B)$ точку, удовлетворяющую условиям: $P_*(\lambda, A, B) \in l_*(A, B)$, $P_*(\lambda, A, B) \notin l_+(A, B)$, $\rho\big(A, P_*(\lambda, A, B)\big) = (-\lambda)\rho(A, B)$.

Утверждение 2.1. *Пусть: $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \ldots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, h — соответствующая аффинная координатная карта.*

1. Справедливо утверждение $\forall A \in E^N \forall x \in \vec{E}^N \exists! B \in E^N (\overrightarrow{AB} = x)$.

2. Пусть: A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, $C_2 \in E^N$, $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$, $(B_1, C_1) \approx (B_2, C_2)$. Тогда $(A_1, C_1) \approx (A_2, C_2)$.

3. Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, A, $B \in E^N$. Тогда $h\big(P_*(\lambda, A, B)\big) - h(A) = \lambda\big(h(B) - h(A)\big)$.

4. Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, A_1, B_1, A_2, $B_2 \in E^N$, $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$. Тогда $\big(A_1, P_*(\lambda, A_1, B_1)\big) \approx \big(A_2, P_*(\lambda, A_2, B_2)\big)$.

5. Пусть A_1, $A_2 \in E^N$. Тогда $(A_1, A_1) \approx (A_2, A_2)$.

Доказательство.

1. Пусть: $A \in E^N$, $x \in \vec{E}^N$.

Пусть: $B \in E^N$, $\overrightarrow{AB} = x$. Тогда:

$$\begin{gathered}
[\overrightarrow{AB}](h) = [x](h), \\
h(B) - h(A) = [x](h), \\
h(B) = h(A) + [x](h), \\
B = h^{-1}\big(h(A) + [x](h)\big).
\end{gathered}$$

Пусть: $B_1 \in E^N$, $\overrightarrow{AB_1} = x$, $B_2 \in E^N$, $\overrightarrow{AB_2} = x$. Тогда: $B_1 = h^{-1}\big(h(A) + [x](h)\big)$, $B_2 = h^{-1}\big(h(A) + [x](h)\big)$. Следовательно, $B_1 = B_2$.

Пусть $B = h^{-1}\big(h(A) + [x](h)\big)$. Тогда: $B \in E^N$,

$$[\overrightarrow{AB}](h) = h(B) - h(A) = h\Big(h^{-1}\big(h(A) + [x](h)\big)\Big) - h(A) = \big(h(A) + [x](h)\big) - h(A) = [x](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов: $B \in E^N$, $\overrightarrow{AB} = x$.

2. Так как: $(A_1, B_1) \approx (A_2, B_2)$, $(B_1, C_1) \approx (B_2, C_2)$, то: $h(B_1) - h(A_1) = h(B_2) - h(A_2)$, $h(C_1) - h(B_1) = h(C_2) - h(B_2)$. Тогда:

$$\begin{aligned}
h(C_1) - h(A_1) &= \big(h(C_1) - h(B_1)\big) + \big(h(B_1) - h(A_1)\big) = \\
&= \big(h(C_2) - h(B_2)\big) + \big(h(B_2) - h(A_2)\big) = h(C_2) - h(A_2).
\end{aligned}$$

Следовательно, $(A_1, C_1) \approx (A_2, C_2)$.

3. Утверждение нетрудно доказать, используя определение аффинной координатной карты и теорему Фалеса.

4. Так как $(A_1,B_1)\approx(A_2,B_2)$, то $h(B_1)-h(A_1)=h(B_2)-h(A_2)$. Тогда:

$$h\big(P_*(\lambda,A_1,B_1)\big)-h(A_1)=\lambda\big(h(B_1)-h(A_1)\big)=\lambda\big(h(B_2)-h(A_2)\big)=\\ =h\big(P_*(\lambda,A_2,B_2)\big)-h(A_2).$$

Следовательно, $\big(A_1,P_*(\lambda,A_1,B_1)\big)\approx\big(A_2,P_*(\lambda,A_2,B_2)\big)$.

5. Утверждение непосредственно следует из определения эквивалентности упорядоченных пар точек. □

Утверждение (нетрудно доказать, используя второй пункт утверждения (2.1) и средства элементарной геометрии)**.** *Пусть* $N=\overline{1,3}$.

1. Пусть: A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, $C_2\in E^N$, $(A_1,B_1)\approx(A_2,B_2)$, $(A_1,C_1)\approx(A_2,C_2)$. *Тогда* $\triangle B_1A_1C_1\cong\triangle B_2A_2C_2$.

2. Пусть: A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, $C_2\in E^N$, $(A_1,B_1)\approx(A_2,B_2)$, $(A_1,C_1)\approx(A_2,C_2)$, $A_1\neq B_1$, $A_1\neq C_1$. *Тогда:* $A_2\neq B_2$, $A_2\neq C_2$, $\widehat{B_1A_1C_1}=\widehat{B_2A_2C_2}$.

Определение. Пусть $N=\overline{1,3}$.

Пусть x, $y\in\vec{E}^N$. Пусть: A, B, $C\in E^N$, $x=\overrightarrow{AB}$, $y=\overrightarrow{BC}$. Обозначим, $x+y=\overrightarrow{AC}$. Очевидно, $x+y\in\vec{E}^N$. Будем говорить, что $\{x+y\}_{x,y\in\vec{E}^N}$ — стандартная операция сложения на множестве $\vec{E}^N$. **Корректность определения стандартной операции сложения на множестве $\vec{E}^N$ непосредственно следует из: определения вектора, первого пункта утверждения 2.1; первого критерия равенства векторов, второго пункта утверждения 2.1.**

Пусть: $\lambda\in\mathbb{R}$, $x\in\vec{E}^N$. Пусть: A, $B\in E^N$, $x=\overrightarrow{AB}$. Обозначим, $\lambda x=\overrightarrow{AP_*(\lambda,A,B)}$. Очевидно, $\lambda x\in\vec{E}^N$. Будем говорить, что $\{\lambda x\}_{\lambda\in\mathbb{R},\,x\in\vec{E}^N}$ — стандартная внешняя операция умножения на множестве $\vec{E}^N$. **Корректность определения стандартной внешней операции умножения на множестве $\vec{E}^N$ непосредственно следует из: определения вектора; первого критерия равенства векторов, четвёртого пункта утверждения 2.1.**

Пусть $A\in E^N$. Обозначим, $\theta=\overrightarrow{AA}$. Очевидно, $\theta\in\vec{E}^N$. Будем говорить, что θ — стандартный нулевой элемент множества $\vec{E}^N$. **Корректность определения стандартного нулевого элемента множества $\vec{E}^N$ непосредственно следует из: утверждения $E^N\neq\varnothing$; пятого пункта утверждения 2.1, первого критерия равенства векторов.**

Утверждение. *Пусть:* $N=\overline{1,3}$; O, $I_1,\dots,I_N$ *— аффинно независимые точки пространства* E^N, h *— соответствующая аффинная координатная карта.*

1. Пусть x, $y\in\vec{E}^N$. *Тогда* $[x+y](h)=[x](h)+[y](h)$.

2. Пусть: $\lambda\in\mathbb{R}$, $x\in\vec{E}^N$. *Тогда* $[\lambda x](h)=\lambda[x](h)$.

3. Справедливо утверждение $[\theta](h)=\tilde{\theta}$.

Доказательство.

1. Выберем точки A, B, C, удовлетворяющие условиям: A, B, $C\in E^N$, $x=\overrightarrow{AB}$, $y=\overrightarrow{BC}$. Тогда:

$$[x+y](h)=[\overrightarrow{AC}](h)=h(C)-h(A)=\big(h(B)-h(A)\big)+\big(h(C)-h(B)\big)=[x](h)+[y](h).$$

2. Выберем точки, удовлетворяющие условиям: A, $B\in E^N$, $x=\overrightarrow{AB}$. Тогда:

$$[\lambda x](h)=\big[\overrightarrow{AP_*(\lambda,A,B)}\big](h)=h\big(P_*(\lambda,A,B)\big)-h(A)=\lambda\big(h(B)-h(A)\big)=\lambda[x](h).$$

3. Выберем точку A, удовлетворяющую условию $A \in E^N$. Тогда:

$$[\theta](h) = [\overrightarrow{AA}](h) = h(A) - h(A) = \tilde{\theta}. \quad \square$$

Утверждение. *Пусть* $N = \overline{1,3}$.

1. Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. *Тогда* $x + y = y + x$.
2. Пусть x, y, $z \in \vec{E}^N$. *Тогда* $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Пусть $x \in \vec{E}^N$. *Тогда* $x + \theta = x$.
4. Пусть $x \in \vec{E}^N$. *Тогда* $x + (-1)x = \theta$.
5. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \vec{E}^N$. *Тогда* $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
6. Пусть $x \in \vec{E}^N$. *Тогда* $1x = x$.
7. Пусть: α, $\beta \in \mathbb{R}$, $x \in \vec{E}^N$. *Тогда* $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
8. Пусть: $\lambda \in \mathbb{R}$, x, $y \in \vec{E}^N$. *Тогда* $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$.
9. Пусть $x \in \vec{E}^N$. *Тогда* $0x = \theta$.
10. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда* $\lambda\theta = \theta$.
11. Пусть a, $b \in \vec{E}^N$. *Существует единственный вектор* x, *удовлетворяющий условиям:* $x \in \vec{E}^N$, $a + x = b$.

Доказательство. Пусть: $O, I_1, \ldots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, h — соответствующая аффинная координатная карта.

1. Очевидно:

$$[x + y](h) = [x](h) + [y](h) = [y](h) + [x](h) = [y + x](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $x + y = y + x$.

2. Очевидно:

$$\big[(x + y) + z\big](h) = \big([x](h) + [y](h)\big) + [z](h) = [x](h) + \big([x](h) + [y](h)\big) = \big[x + (y + z)\big](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

3. Очевидно:

$$[x + \theta](h) = [x](h) + \tilde{\theta} = [x](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $x + \theta = x$.

4. Очевидно:

$$\big[x + (-1)x\big](h) = [x](h) + (-1)[x](h) = \tilde{\theta} = [\theta](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $x + (-1)x = \theta$.

5. Очевидно:

$$\big[(\alpha\beta)x\big](h) = (\alpha\beta)[x](h) = \alpha\big(\beta[x](h)\big) = \big[\alpha(\beta x)\big](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

6. Очевидно:

$$[1x](h) = 1[x](h) = [x](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $1x = x$.

7. Очевидно:

$$\big[(\alpha+\beta)x\big](h) = (\alpha+\beta)[x](h) = \alpha[x](h) + \beta[x](h) = [\alpha x + \beta x](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$.

8. Очевидно:

$$\big[\lambda(x+y)\big](h) = \lambda\big([x](h) + [y](h)\big) = \lambda[x](h) + \lambda[y](h) = [\lambda x + \lambda y](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$.

9. Очевидно:

$$[0x](h) = 0[x](h) = \tilde{\theta} = [\theta](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $0x = \theta$.

10. Очевидно:

$$[\lambda\theta](h) = \lambda[\theta](h) = \lambda\tilde{\theta} = \tilde{\theta} = [\theta](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $\lambda\theta = \theta$.

11. Пусть: $x \in \vec{E}^N$, $a + x = b$. Тогда:

$$\begin{gathered}
(-1)a + (a + x) = (-1)a + b,\\
\big((-1)a + a\big) + x = (-1)a + b,\\
\big(a + (-1)a\big) + x = (-1)a + b,\\
\theta + x = (-1)a + b,\\
x + \theta = (-1)a + b,\\
x = (-1)a + b.
\end{gathered}$$

Пусть: $x_1 \in \vec{E}^N$, $a + x_1 = b$, $x_2 \in \vec{E}^N$, $a + x_2 = b$. Тогда: $x_1 = (-1)a + b$, $x_2 = (-1)a + b$. Следовательно, $x_1 = x_2$.

Обозначим, $x = (-1)a + b$. Тогда: $x \in \vec{E}^N$, $a + x = a + \big((-1)a + b\big) = \big(a + (-1)a\big) + b = \theta + b = b + \theta = b$. □

Определение. Пусть $N = \overline{1,3}$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Обозначим, $-x = (-1)x$. Очевидно: $-x \in \vec{E}^N$, $x + (-x) = \theta$. Будем говорить, что $-x$ — противоположный вектор к вектору x.

Пусть x, $y \in \vec{E}^N$. Обозначим, $y - x = (-1)x + y$. Очевидно: $y - x \in \vec{E}^N$, $x + (y - x) = y$. Будем говорить, что $y - x$ — разность векторов y, x.

Утверждение. *Пусть $N = \overline{1,3}$.*

1. *Справедливо утверждение $E^N \neq \varnothing$.*
2. *Пусть A, B, $C \in E^N$. Тогда $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.*
3. *Справедливо утверждение $\forall A \in E^N \forall x \in \vec{E}^N \exists! B \in E^N (\overrightarrow{AB} = x)$.*
4. *Пусть $A \in E^N$. Тогда $\overrightarrow{AA} = \theta$.*
5. *Пусть: A, $B \in E^N$, $\overrightarrow{AB} = \theta$. Тогда $A = B$.*
6. *Пусть A, $B \in E^N$. Тогда $(-1)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.*

Доказательство.

1. Утверждение обсуждалось выше.

2. Утверждение непосредственно следует из определения суммы векторов.
3. Утверждение обсуждалось выше.
4. Утверждение непосредственно следует из определения нулевого вектора.
5. Очевидно, $\overrightarrow{AA} = \theta$. По условию, $\overrightarrow{AB} = \theta$. Тогда $A = B$.
6. Очевидно, $\overrightarrow{AB} + (-1)\overrightarrow{AB} = \theta$. С другой стороны: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \theta$. Тогда $(-1)\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. □

2.4. Линейная комбинация векторов, линейная зависимость векторов

Определение (линейная комбинация векторов). Пусть: $N = \overline{1,3}$; $r \in \mathbb{N}$, $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $x_1, \ldots, x_r \in \vec{E}^N$.

Будем говорить, что $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k x_k$ — линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_r$ с коэффициентами $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$.

Далее часто будем писать $\lambda^k x_k$ вместо $\sum\limits_{k=1}^{N} \lambda^k x_k$ (частный случай *правила суммирования Эйнштейна*).

Определение (линейная оболочка векторов, линейная зависимость векторов, линейная независимость векторов). Пусть: $N = \overline{1,3}$; $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_r \in \vec{E}^N$.

Обозначим:

$$\begin{gathered} L(x_1, \ldots, x_r) = \{\lambda^k x_k \colon \lambda^1 \in \mathbb{R} \wedge \cdots \wedge \lambda^r \in \mathbb{R}\} = \\ = \bigl\{u \colon \exists \lambda^1 \cdots \exists \lambda^r (\lambda^1 \in \mathbb{R} \wedge \cdots \wedge \lambda^r \in \mathbb{R} \wedge u = \lambda^k x_k)\bigr\}. \end{gathered}$$

Очевидно, $L(x_1, \ldots, x_r) \subseteq \vec{E}^N$. Будем говорить, что $L(x_1, \ldots, x_r)$ — линейная оболочка векторов $x_1, \ldots, x_r$. Пусть $k = \overline{1,r}$. Тогда: $x_k = \delta_k^m x_m \in L(x_1, \ldots, x_r)$.

Будем говорить, что по любой линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, если для любых чисел $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r$, удовлетворяющих условиям: $\alpha^1, \ldots, \alpha^r$, $\beta^1, \ldots, \beta^r \in \mathbb{R}$, $\alpha^k x_k = \beta^k x_k$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1,r}(\alpha^k = \beta^k)$.

Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы, если существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$.

Будем говорить, что $x_1, \ldots, x_r$ — линейно независимые векторы, если для любых чисел $\lambda^1, \ldots, \lambda^r$, удовлетворяющих условиям: $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k x_k = \theta$, справедливо утверждение $\forall k = \overline{1,r}(\lambda^k = 0)$.

Утверждение (критерий линейной зависимости векторов)**.** *Пусть $N = \overline{1,3}$.*

1. Пусть $x \in \vec{E}^N$. Вектор x является линейно зависимым тогда и только тогда, когда $x = \theta$.

2. Пусть: $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $x_1, \ldots, x_r \in \vec{E}^N$. Векторы $x_1, \ldots, x_r$ являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда существует номер $k_0 = \overline{1,r}$, удовлетворяющий условию $x_{k_0} \in L(x_1, \ldots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \ldots, x_r)$.

Доказательство.

1. Пусть x — линейно зависимый вектор. Тогда существует число $\lambda \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условиям: $\lambda x = \theta$, $\lambda \neq 0$. Следовательно, $x = \theta$.

Пусть $x = \theta$. Тогда $1x = \theta$. Так как $1 \neq 0$, то x — линейно зависимый вектор.

2. Пусть $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^N \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$. Выберем номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $\lambda^{k_0} \neq 0$. Тогда:

$$\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^{k_0-1} x_{k_0-1} + \lambda^{k_0} x_{k_0} + \lambda^{k_0+1} x_{k_0+1} + \dots + \lambda^r x_r = \theta,$$
$$x_{k_0} = \frac{-\lambda^1}{\lambda_{k_0}} x_1 + \dots + \frac{-\lambda^{k_0-1}}{\lambda_{k_0}} x_{k_0-1} + \frac{-\lambda^{k_0+1}}{\lambda_{k_0}} x_{k_0+1} + \dots + \frac{-\lambda^r}{\lambda_{k_0}} x_r,$$
$$x_{k_0} \in L(x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \dots, x_r).$$

Пусть существует номер $k_0 = \overline{1, r}$, удовлетворяющий условию $x_{k_0} \in L(x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0+1}, \dots, x_r)$. Тогда существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^{k_0-1}$, $\lambda^{k_0+1}, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условию:

$$x_{k_0} = \lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^{k_0-1} x_{k_0-1} + \lambda^{k_0+1} x_{k_0+1} + \dots + \lambda^r x_r.$$

Следовательно:

$$(-\lambda^1) x_1 + \dots + (-\lambda^{k_0-1}) x_{k_0-1} + 1 x_{k_0} + (-\lambda_{k_0+1}) x_{k_0+1} + \dots + (-\lambda^r) x_r = \theta.$$

Так как $1 \neq 0$, то $x_1, \dots, x_r$ — линейно зависимые векторы. $\square$

Утверждение (критерий линейной независимости векторов)**.** *Пусть:* $N = \overline{1, 3}$*;* $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_r \in \vec{E}^N$. *Векторы* $x_1, \dots, x_r$ *являются линейно независимыми тогда и только тогда, когда по любой линейной комбинации векторов* $x_1, \dots, x_r$ *однозначно восстанавливаются её коэффициенты.*

Доказательство. Пусть $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые векторы. Пусть: $\alpha^1, \dots, \alpha^r$, $\beta^1, \dots, \beta^r \in \mathbb{R}$, $\alpha^k x_k = \beta^k x_k$. Тогда $(\alpha^k - \beta^k) x_k = \theta$. Так как $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые векторы, то $\forall k = \overline{1, r}(\alpha^k - \beta^k = 0)$. Тогда $\forall k = \overline{1, r}(\alpha^k = \beta^k)$. Следовательно, по любой линейной комбинации векторов $x_1, \dots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты.

Пусть по любой линейной комбинации векторов $x_1, \dots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты. Пусть: $\lambda^1, \dots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, $\lambda^k x_k = \theta$. Тогда:

$$\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^r x_r = 0 x_1 + \dots + 0 x_r.$$

Так как по любой линейной комбинации векторов $x_1, \dots, x_r$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты, то $\forall k = \overline{1, r}(\lambda^k = 0)$. Тогда $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые векторы. $\square$

Утверждение. *Пусть:* $N = \overline{1, 3}$*;* $r \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_r, x \in \vec{E}^N$, $x_1, \dots, x_r$ *— линейно независимые векторы,* $x_1, \dots, x_r, x$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $x \in L(x_1, \dots, x_r)$.

Доказательство. Так как $x_1, \dots, x_r, x$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\lambda^1, \dots, \lambda^{r+1} \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^r x_r + \lambda^{r+1} x = \theta$, $\exists k = \overline{1, r+1}(\lambda^k \neq 0)$. Предположим, что $\lambda^{r+1} = 0$. Тогда: $\lambda^1 x_1 + \dots + \lambda^r x_r = \theta$, $\exists k = \overline{1, r}(\lambda^k \neq 0)$ (что противоречит утверждению: $x_1, \dots, x_r$ — линейно независимые векторы). Итак, $\lambda^{r+1} \neq 0$. Тогда:

$$x = \frac{-\lambda^1}{\lambda^{r+1}} x_1 + \dots + \frac{-\lambda^r}{\lambda^{r+1}} x_r,$$
$$x \in L(x_1, \dots, x_r). \quad \square$$

Утверждение. *Пусть:* $N = \overline{1,3}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in \vec{E}^N$*,* $\sigma \in S_r$*,* $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Так как $x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(r)}$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^1 x_{\sigma(1)} + \cdots + \lambda^r x_{\sigma(r)} = \theta$, $\exists m = \overline{1,r}(\lambda^m \neq 0)$. Тогда:

$$\lambda^{\sigma^{-1}(1)} x_1 + \cdots + \lambda^{\sigma^{-1}(r)} x_r = \theta, \quad \exists k = \overline{1,r}(\lambda^{\sigma^{-1}(k)} \neq 0).$$

Следовательно, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Утверждение. *Пусть:* $N = \overline{1,3}$*;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in \vec{E}^N$*,* $r_0 \in \mathbb{N}$*,* $k_1, \ldots, k_{r_0} = \overline{1,r}$*,* $k_1 < \cdots < k_{r_0}$*,* $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_0}}$ *— линейно зависимые векторы. Тогда* $x_1, \ldots, x_r$ *— линейно зависимые векторы.*

Доказательство. Так как $x_{k_1}, \ldots, x_{k_{r_0}}$ — линейно зависимые векторы, то существуют числа $\alpha^1, \ldots, \alpha^{r_0} \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\alpha^1 x_{k_1} + \cdots + \alpha^{r_0} x_{k_{r_0}} = \theta$, $\exists m = \overline{1,r_0}(\alpha^m \neq 0)$. Обозначим: $\beta^{k_1} = \alpha^1, \ldots, \beta^{k_{r_0}} = \alpha^{r_0}$, $\beta^k = 0$ при: $k = \overline{1,r}$, $k \notin \{k_1, \ldots, k_{r_0}\}$. Тогда:

$$\beta^{k_1} x_{k_1} + \cdots + \beta^{k_{r_0}} x_{k_{r_0}} = \theta, \quad \exists m = \overline{1,r_0}(\beta^{k_m} \neq 0);$$
$$\beta^1 x_1 + \cdots + \beta^r x_r = \theta, \quad \exists k = \overline{1,r}(\beta^k \neq 0).$$

Следовательно, $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Утверждение. *Пусть:* $N = \overline{1,3}$*;* O*,* $I_1, \ldots, I_N$ *— аффинно независимые точки пространства* E^N*,* h *— соответствующая аффинная координатная карта;* $r \in \mathbb{N}$*,* $x_1, \ldots, x_r \in \vec{E}^N$*. Векторы* $x_1, \ldots, x_r$ *являются линейно зависимыми тогда и только тогда, когда столбцы* $[x_1](h), \ldots, [x_r](h)$ *являются линейно зависимыми.*

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k x_k = \theta$, $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$. Следовательно:

$$\lambda^k [x_k](h) = [\lambda^k x_k](h) = [\theta](h) = \tilde{\theta}.$$

Так как $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$, то $[x_1](h), \ldots, [x_r](h)$ — линейно зависимые столбцы.

Пусть $[x_1](h), \ldots, [x_r](h)$ — линейно зависимые столбцы. Тогда существуют числа $\lambda^1, \ldots, \lambda^r \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям: $\lambda^k [x_k](h) = \tilde{\theta}$, $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$. Следовательно:

$$[\lambda^k x_k](h) = \lambda^k [x_k](h) = \tilde{\theta} = [\theta](h).$$

Согласно второму критерию равенства векторов, $\lambda^k x_k = \theta$. Так как $\exists k = \overline{1,r}(\lambda^k \neq 0)$, то $x_1, \ldots, x_r$ — линейно зависимые векторы. □

Утверждение. *Пусть:* $N = \overline{1,3}$*;* O*,* $I_1, \ldots, I_N$ *— аффинно независимые точки пространства* E^N*,* h *— соответствующая аффинная координатная карта,* $e_k = \overrightarrow{OI_k}$ *при* $k = \overline{1,N}$*.*

1. *Справедливо утверждение:* $[e_k]^m(h) = \delta_k^m$ *при* k*,* $m = \overline{1,N}$*.*
2. *Пусть* $\lambda^1, \ldots, \lambda^N \in \mathbb{R}$*. Тогда:* $[\lambda^k e_k]^m(h) = \lambda^m$ *при* $m = \overline{1,N}$*.*
3. *Пусть* $x \in \vec{E}^N$*. Тогда* $x = [x]^k(h) e_k$*.*

Доказательство.

1. Пусть k, $m = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[e_k]^m(h) = [\overrightarrow{OI_k}]^m(h) = \big(h(I_k) - h(O)\big)^m = h^m(I_k) - h^m(O) = \delta_k^m - 0 = \delta_k^m.$$

2. Пусть $m = \overline{1,N}$. Тогда:

$$[\lambda^k e_k]^m(h) = \lambda^k [e_k]^m(h) = \lambda^k \delta_k^m = \lambda^m.$$

3. Очевидно: $\big[[x]^k(h)e_k\big]^m(h) = [x]^m(h)$ при $m = \overline{1,N}$. Тогда $\big[[x]^k(h)e_k\big](h) = [x](h)$. Согласно второму критерию равенства векторов, $[x]^k(h)e_k = x$. □

Утверждение. *Пусть: $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \ldots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, $e_k = \overrightarrow{OI_k}$ при $k = \overline{1,N}$.*

1. Справедливо утверждение: $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы.

2. Пусть $x \in \vec{E}^N$. Тогда $x \in L(e_1, \ldots, e_N)$.

Доказательство. Пусть h — аффинная координатная карта в пространстве E^N, соответствующая точкам O, $I_1, \ldots, I_N$.

1. Очевидно, по любой линейной комбинации векторов $e_1, \ldots, e_N$ однозначно восстанавливаются её коэффициенты. Тогда $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы.

2. Так как $x = [x]^k(h)e_k$, то $x \in L(e_1, \ldots, e_N)$.

Замечание. Пусть: $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \ldots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, $e_k = \overrightarrow{OI_k}$ при $k = \overline{1,N}$. Будем говорить, что $e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства $\vec{E}^N$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Будем говорить, что $\tilde{x}$ — столбец координат вектора x в базисе e, если: $\tilde{x} \in \mathbb{R}^N$, $x = \tilde{x}^k e_k$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Очевидно, существует единственный столбец $\tilde{x}$, удовлетворяющий условию: $\tilde{x}$ — столбец координат вектора x в базисе e.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Обозначим через $[x](e)$ столбец координат вектора x в базисе e.

Обозначим: $h_{O,e}(A) = [\overrightarrow{OA}](e)$ при $A \in E^N$. Будем говорить, что $h_{O,e}$ — аффинная координатная карта (аффинная система координат) в пространстве E^N, соответствующая точке O и базису e. Пусть $A \in E^N$. Будем говорить, что $h_{O,e}(A)$ — столбец координат точки A в координатной карте $h_{O,e}$.

Замечание. Пусть: $N = \overline{1,3}$; O, $I_1, \ldots, I_N$ — аффинно независимые точки пространства E^N, h — соответствующая аффинная координатная карта, $e_k = \overrightarrow{OI_k}$ при $k = \overline{1,N}$.

Пусть $x \in \vec{E}^N$. Так как: $[x](h) \in \mathbb{R}^N$, $x = [x]^k(h)e_k$, то $[x](e) = [x](h)$.

Пусть $A \in E^N$. Тогда:

$$h_{O,e}(A) = [\overrightarrow{OA}](e) = [\overrightarrow{OA}](h) = h(A) - h(O) = h(A) - \tilde{\theta} = h(A).$$

Следовательно, $h_{O,e} = h$.

Утверждение. *Пусть: l — прямая в пространстве E^2; O, I_1 — аффинно независимые точки прямой l, $e_1 = \overrightarrow{OI_1}$. Справедливо утверждение: $A \in l$ тогда и только тогда, когда: $A \in E^2$, $\overrightarrow{OA} \in L(e_1)$.*

Доказательство. Так как: O, $I_1 \in l$, O, I_1 — аффинно независимые точки, то $l_*(O, I_1) = l$. Так как O, I_1 — аффинно независимые точки, то существует точка I_2, удовлетворяющая условиям: $I_2 \in E^2$, O, I_1, I_2 — аффинно независимые точки. Пусть: h — аффинная координатная карта в пространстве E^2, соответствующая точкам O, I_1, I_2, $e_2 = \overrightarrow{OI_2}$.

Пусть $A \in l$. Тогда: $A \in E^2$, $h^2(A) = 0$. Следовательно, $[\overrightarrow{OA}]^2(e) = 0$. Тогда: $\overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 + [\overrightarrow{OA}]^2(e)e_2 = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 \in L(e_1)$.

Пусть: $A \in E^2$, $\overrightarrow{OA} \in L(e_1)$. Тогда существует число $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $\overrightarrow{OA} = te_1$. Следовательно, $\overrightarrow{OA} = te_1 + 0e_2$. С другой стороны, $\overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 + [\overrightarrow{OA}]^2(e)e_2$. Тогда $[\overrightarrow{OA}]^2(e) = 0$. Следовательно, $h^2(A) = 0$. Тогда $A \in l$. □

Утверждение. *Пусть: l — прямая в пространстве E^3; O, I_1 — аффинно независимые точки прямой l, $e_1 = \overrightarrow{OI_1}$. Справедливо утверждение: $A \in l$ тогда и только тогда, когда: $A \in E^3$, $\overrightarrow{OA} \in L(e_1)$.*

Доказательство. Так как: O, $I_1 \in l$, O, I_1 — аффинно независимые точки, то $l_*(O, I_1) = l$. Так как O, I_1 — аффинно независимые точки, то существуют точки I_2, I_3, удовлетворяющие условиям: I_2, $I_3 \in E^3$, O, I_1, I_2, I_3 — аффинно независимые точки. Пусть: h — аффинная координатная карта в пространстве E^3, соответствующая точкам O, I_1, I_2, I_3, $e_2 = \overrightarrow{OI_2}$, $e_3 = \overrightarrow{OI_3}$.

Пусть $A \in l$. Тогда: $A \in E^3$, $h^2(A)$, $h^3(A) = 0$. Следовательно, $[\overrightarrow{OA}]^2(e)$, $[\overrightarrow{OA}]^3(e) = 0$. Тогда: $\overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 + [\overrightarrow{OA}]^2(e)e_2 + [\overrightarrow{OA}]^3(e)e_3 = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 \in L(e_1)$.

Пусть: $A \in E^3$, $\overrightarrow{OA} \in L(e_1)$. Тогда существует число $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $\overrightarrow{OA} = te_1$. Следовательно, $\overrightarrow{OA} = te_1 + 0e_2 + 0e_3$. С другой стороны, $\overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 + [\overrightarrow{OA}]^2(e)e_2 + [\overrightarrow{OA}]^3(e)$. Тогда $[\overrightarrow{OA}]^2(e)$, $[\overrightarrow{OA}]^3(e) = 0$. Следовательно, $h^2(A)$, $h^3(A) = 0$. Тогда $A \in l$. □

Утверждение. *Пусть: π — плоскость в пространстве E^3; O, I_1, I_2 — аффинно независимые точки плоскости π, $e_1 = \overrightarrow{OI_1}$, $e_2 = \overrightarrow{OI_2}$. Справедливо утверждение: $A \in \pi$ тогда и только тогда, когда: $A \in E^3$, $\overrightarrow{OA} \in L(e_1, e_2)$.*

Доказательство. Так как: O, I_1, $I_2 \in \pi$, O, I_1, I_2 — аффинно независимые точки, то $\pi_*(O, I_1, I_2) = \pi$. Так как O, I_1, I_2 — аффинно независимые точки, то существует точка I_3, удовлетворяющая условиям: $I_3 \in E^3$, O, I_1, I_2, I_3 — аффинно независимые точки. Пусть: h — аффинная координатная карта в пространстве E^3, соответствующая точкам O, I_1, I_2, I_3, $e_3 = \overrightarrow{OI_3}$.

Пусть $A \in \pi$. Тогда: $A \in E^3$, $h^3(A) = 0$. Следовательно, $[\overrightarrow{OA}]^3(e) = 0$. Тогда: $\overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 + [\overrightarrow{OA}]^2(e)e_2 + [\overrightarrow{OA}]^3(e)e_3 = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 + [\overrightarrow{OA}]^2(e)e_2 \in L(e_1, e_2)$.

Пусть: $A \in E^3$, $\overrightarrow{OA} \in L(e_1, e_2)$. Тогда существуют числа u^1, $u^2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющее условию $\overrightarrow{OA} = u^1e_1 + u^2e_2$. Следовательно, $\overrightarrow{OA} = u^1e_1 + u^2e_2 + 0e_3$. С другой стороны, $\overrightarrow{OA} = [\overrightarrow{OA}]^1(e)e_1 + [\overrightarrow{OA}]^2(e)e_2 + [\overrightarrow{OA}]^3(e)e_3$. Тогда $[\overrightarrow{OA}]^3(e) = 0$. Следовательно, $h^3(A) = 0$. Тогда $A \in \pi$. □

Утверждение. *Пусть: $N = \overline{1,3}$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $p_1, \ldots, p_r \in E^N$, $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы.*

Доказательство. Так как $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки, то $r \leqslant N + 1$.

Пусть $r \leqslant N$. Так как $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки, то существуют точки $p_{r+1}, \ldots, p_{N+1}$, удовлетворяющие условиям: $p_{r+1}, \ldots, p_{N+1} \in E^N$, $p_1, \ldots, p_{N+1}$ — аффинно независимые точки. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_{N+1}}$ — линейно независимые векторы. Следовательно, $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы.

Пусть $r = N+1$. Так как $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки, то $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы. □

Утверждение. *Пусть: $N = \overline{1,3}$; $r \in \mathbb{Z}$, $r \geqslant 2$, $p_1, \ldots, p_r \in E^N$, $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы. Тогда $p_1, \ldots, p_r$ — аффинно независимые точки.*

Доказательство. Пусть: $N = 1$, $r = 2$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}$ — линейно независимый вектор, то $\overrightarrow{p_1p_2} \neq \theta$. Тогда $p_1 \neq p_2$. Следовательно, p_1, p_2 — аффинно независимые точки.

Пусть $N = 1$. Предположим, что $r \geqslant 3$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы, то $\overrightarrow{p_1p_2}$ — линейно независимый вектор. Тогда p_1, p_2 — аффинно независимые точки. Следовательно, $\overrightarrow{p_1p_3} \in L(\overrightarrow{p_1p_2})$. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно зависимые векторы. Следовательно, $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы). Итак, $r \leqslant 2$.

Пусть: $N = 2$, $r = 2$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}$ — линейно независимый вектор, то $\overrightarrow{p_1p_2} \neq \theta$. Тогда $p_1 \neq p_2$. Следовательно, p_1, p_2 — аффинно независимые точки.

Пусть: $N = 2$, $r = 3$. Предположим, что p_1, p_2, p_3 — аффинно зависимые точки. Тогда существует прямая l, удовлетворяющая условиям: l — прямая в пространстве E^2, p_1, p_2, $p_3 \in l$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно независимые векторы, то $\overrightarrow{p_1p_2}$ — линейно независимый вектор. Тогда p_1, p_2 — аффинно независимые точки. Так как $p_1, p_2, p_3 \in l$, то $\overrightarrow{p_1p_3} \in L(\overrightarrow{p_1p_2})$. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно независимые векторы). Итак, p_1, p_2, p_3 — аффинно независимые точки.

Пусть $N = 2$. Предположим, что $r \geqslant 4$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы, то $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно независимые векторы. Тогда p_1, p_2, p_3 — аффинно независимые точки. Следовательно, $\overrightarrow{p_1p_4} \in L(\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3})$. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$, $\overrightarrow{p_1p_4}$ — линейно зависимые векторы. Следовательно, $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы). Итак, $r \leqslant 3$.

Пусть: $N = 3$, $r = 2$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}$ — линейно независимый вектор, то $\overrightarrow{p_1p_2} \neq \theta$. Тогда $p_1 \neq p_2$. Следовательно, p_1, p_2 — аффинно независимые точки.

Пусть: $N = 3$, $r = 3$. Предположим, что p_1, p_2, p_3 — аффинно зависимые точки. Тогда существует прямая l, удовлетворяющая условиям: l — прямая в пространстве E^3, p_1, p_2, $p_3 \in l$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно независимые векторы, то $\overrightarrow{p_1p_2}$ — линейно независимый вектор. Тогда p_1, p_2 — аффинно независимые точки. Так как $p_1, p_2, p_3 \in l$, то $\overrightarrow{p_1p_3} \in L(\overrightarrow{p_1p_2})$. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно независимые векторы). Итак, p_1, p_2, p_3 — аффинно независимые точки.

Пусть: $N = 3$, $r = 4$. Предположим, что p_1, p_2, p_3, p_4 — аффинно зависимые точки. Тогда существует плоскость π, удовлетворяющая условиям: π — плоскость в пространстве E^3, p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \pi$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$, $\overrightarrow{p_1p_4}$ — линейно независимые векторы, то $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$ — линейно независимые векторы. Тогда p_1, p_2, p_3 — аффинно независимые точки. Так как p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \pi$, то $\overrightarrow{p_1p_4} \in L(\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3})$. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$, $\overrightarrow{p_1p_4}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$, $\overrightarrow{p_1p_4}$ — линейно независимые векторы). Итак, p_1, p_2, p_3, p_4 — аффинно независимые точки.

Пусть $N = 3$. Предположим, что $r \geqslant 5$. Так как $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы, то $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$, $\overrightarrow{p_1p_4}$ — линейно независимые векторы. Тогда p_1, p_2, p_3, p_4 — аффинно независимые точки. Следовательно, $\overrightarrow{p_1p_5} \in L(\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_1p_3}, \overrightarrow{p_1p_4})$. Тогда $\overrightarrow{p_1p_2}$, $\overrightarrow{p_1p_3}$, $\overrightarrow{p_1p_4}$, $\overrightarrow{p_1p_5}$ — линейно зависимые векторы. Следовательно, $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно зависимые векторы (что противоречит утверждению: $\overrightarrow{p_1p_2}, \ldots, \overrightarrow{p_1p_r}$ — линейно независимые векторы). Итак, $r \leqslant 4$. □

Замечание. Пусть $N = \overline{1, 3}$.

Пусть: $e_1, \ldots, e_N \in \vec{E}^N$, $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы. Очевидно, существуют точки O, $I_1, \ldots, I_N$, удовлетворяющие условиям: O, $I_1, \ldots, I_N \in E^N$, $e_k = \overrightarrow{OI_k}$ при $k = \overline{1, N}$. Так как $e_1, \ldots, e_N$ — линейно независимые векторы, то O, $I_1, \ldots, I_N$ — аффинно независимые точки. Тогда $e_1, \ldots, e_N$ — базис пространства $\vec{E}^N$.

Пусть: $r \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_r \in \vec{E}^N$, $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы. Очевидно, существуют точки O, $I_1, \ldots, I_r$, удовлетворяющие условиям: O, $I_1, \ldots, I_r \in E^N$, $e_k = \overrightarrow{OI_k}$ при $k = \overline{1, r}$. Так как $e_1, \ldots, e_r$ — линейно независимые векторы, то O, $I_1, \ldots, I_r$ — аффинно независимые точки. Тогда $r + 1 \leqslant N + 1$. Следовательно, $r \leqslant N$.

Список литературы

[1] *Кадомцев С. Б.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра.

[2] *Ильин В. А., Позняк Э. Г.* Линейная алгебра.

[3] *Крутицкая Н. Ч., Тихонравов А. В., Шишкин А. А.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра с приложениями.

[4] *Винберг Э. Б.* Курс алгебры.

[5] *Ефимов Н. В., Розендорн Э. Р.* Линейная алгебра и многомерная геометрия.

[6] *Бутузов В. Ф., Крутицкая Н. Ч., Шишкин А. А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах.

[7] *Клетеник Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии.