Лекция 1. Пространство функций ограниченной вариации. Интеграл Римана—Стилтьеса

Корпусов Максим Олегович,
Панин Александр Анатольевич

Курс лекций по линейному функциональному анализу

23 февраля 2012 г.

Введение

Пусть вещественная функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ произвольное разбиение

$$\mathrm{T} \equiv \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

и сопоставим данному разбиению величину

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) \equiv \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| . \tag{1}$$

Кроме того, рассмотрим supremum по всем таким разбиениям T отрезка $[a, b]$. И определим следующую величину

$$\mathrm{V}_a^b(f) \equiv \sup_{\mathrm{T}} \mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f). \tag{2}$$

Линейность

$$f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x), \quad \mathrm{V_T}(f) \equiv \sum_{k=1}^{n} \left| f(x_k) - f(x_{k-1}) \right|,$$

$$\begin{aligned} &|f(x_k) - f(x_{k-1})| = \\ &\qquad = |\alpha_1 f_1(x_k) + \alpha_2 f_2(x_k) - \alpha_1 f_1(x_{k-1}) - \alpha_2 f_2(x_{k-1})| \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \alpha_1 \left| f_1(x_k) - f_1(x_{k-1}) \right| + \alpha_2 \left| f_2(x_k) - f_2(x_{k-1}) \right|, \end{aligned}$$

откуда сразу же получаем неравенство

$$\mathrm{V_T}(f) \leqslant \alpha_1 \mathrm{V_T}(f_1) + \alpha_2 \mathrm{V_T}(f_2),$$

Определение

Определение 1. *Назовем пространством функций ограниченной вариации на отрезке* $[a, b]$ *линейное пространство тех вещественных функций, определенных на отрезке* $[a, b]$, *для которых конечна величина* $\mathrm{V}_a^b(f)$ *из* (2). *Обозначим это линейное пространство через* $\mathbb{BV}[a, b]$.

Монотонные функции

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f)=\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)-f(x_{k-1})]=f(b)-f(a).$$

Аналогичный результат имеет место и для монотонно невозрастающих функций, и вместе получим равенство

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f)=|f(b)-f(a)|\,.$$

Естественно, и supremum по всем разбиениям T отрезка $[a,b]$ равен этой же величине:

$$\mathrm{V}_a^b(f)=|f(b)-f(a)|\,.$$

Аддитивность

Теорема

Пусть $f(x) \in \mathbb{BV}[a,b]$ *и* $c \in (a,b)$ *— произвольная точка, тогда*

$$f(x) \in \mathbb{BV}[a,c] \cap \mathbb{BV}[c,b],$$

причем имеет место равенство

$$\mathrm{V}_a^b(f) = \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f).$$

Доказательство-1

Итак, пусть T — это произвольное разбиение отрезка $[a,b]$ и $c \in (a,b)$. Тогда $\mathrm{T} = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2$, где T_1 — это разбиение отрезка $[a,c]$, а T_2 — это разбиение отрезка $[c,b]$. Тогда имеет место равенство

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) = \mathrm{V}_{\mathrm{T}_1}(f) + \mathrm{V}_{\mathrm{T}_2}(f). \tag{3}$$

Поскольку объединение разбиений T_1 и T_2 отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$ дает разбиение отрезка $[a,b]$, то из (3) вытекает неравенство

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}_1}(f) + \mathrm{V}_{\mathrm{T}_2}(f) = \mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) \leqslant \mathrm{V}_a^b(f),$$

откуда, взяв supremum от обеих частей этого неравенства по T_1 и T_2, получим

$$\mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f) \leqslant \mathrm{V}_a^b(f).$$

Доказательство-2

Пусть теперь T — это произвольное разбиение отрезка $[a, b]$. К сожаленью, его сужения на $[a, c]$ и $[c, b]$ могут не быть разбиениями этих отрезков, поскольку точка $c \in (a, b)$ не обязана входить в произвольное разбиение T. Поэтому добавим к нашему разбиению T точку c. Получившееся разбиение обозначим через T'. Теперь сужения T' на отрезки $[a, c]$ и $[c, b]$ образуют разбиения T_1 и T_2 соответственно. Поэтому из (3) вытекает неравенство

$$\mathrm{V}_{\mathrm{T}}(f) \leqslant \mathrm{V}_{\mathrm{T}'}(f) = \mathrm{V}_{\mathrm{T}_1}(f) + \mathrm{V}_{\mathrm{T}_2}(f) \leqslant \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f),$$

и, взяв supremum от обеих частей этого неравенства по T, получим неравенство

$$\mathrm{V}_a^b(f) \leqslant \mathrm{V}_a^c(f) + \mathrm{V}_c^b(f).$$

Следствие

Следствие. *Произвольную функцию* $f(x) \in \mathbb{BV}[a,b]$ *всегда можно представить в виде разности двух монотонно неубывающих функций*

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x).$$

Доказательство

Возьмем в качестве функции $f_1(x)$ функцию $f_1(x) = \mathrm{V}_a^x(f)$, тогда из теоремы 1 получим, что функция $f_1(x)$ монотонно неубывающая. Определим теперь функцию $f_2(x)$ следующим равенством

$$f_2(x) = \mathrm{V}_a^x(f) - f(x).$$

Проверим монотонность функции $f_2(x)$. Действительно, из теоремы 1 имеем

$$f_2(x) - f_2(y) = \mathrm{V}_y^x(f) - [f(x) - f(y)] \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \geqslant y.$$

Действительно, по определению $\mathrm{V}_y^x(f)$ имеет место неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \mathrm{V}_y^x(f).$$

Вопрос

Возникает вопрос: можно сделать линейное пространство $\mathbb{BV}[a,b]$ нормированным? А если можно, то будет ли оно полно относительно этой нормы? Для ответа на эти вопросы необходимо построить интегралы Римана–Стилтьеса и Лебега–Стилтьеса. Начнем с построения интеграла Римана–Стилтьеса.

Интеграл Римана–Стилтьеса-1

С этой целью давайте рассмотрим некоторое разбиение отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mathrm{T} \equiv \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = b\} ,$$

с отмеченными точками $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ при $i = 1, 2, ..., n$, а также две ограниченные на отрезке $[a, b]$ функции $f(x), g(x) : [a, b] \to \mathbb{R}^1$. Составим следующую интегральную сумму

$$\sigma = \sigma(g; f; \mathrm{T}) \equiv \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \left[g(x_i) - g(x_{i-1})\right] . \qquad (4)$$

Введем параметр разбиения

$$\lambda(\mathrm{T}) \equiv \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - x_{i-1}| \,.$$

Предположим, что существует предел интегральных сумм (4) при $\lambda(\mathrm{T}) \to 0$, тогда полученный предел будем называть интегралом Римана–Стилтьеса и будем его обозначать следующим образом:

$$\int\limits_a^b f(x)\, dg(x). \qquad (5)$$

Интеграл Римана–Стилтьеса-3

Совершенно понятно из построения интеграла Римана–Стилтьеса, что в том случае, когда функция $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$ и функция $g(x) \in \mathbb{C}^{(1)}[a,b]$, то интеграл Римана–Стилтьеса по этим функциям существует и совпадает с интегралом Римана:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Однако условие $g(x) \in \mathbb{C}^{(1)}[a,b]$ очень обременительно, и возникает вопрос о существовании более слабого достаточного условия существования интеграла Римана–Стилтьеса. На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема

Пусть функция $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, *а функция* $g(x) \in \mathbb{BV}[a,b]$. *Тогда существует интеграл Римана–Стилтьеса*

$$\mathrm{I} = \int\limits_a^b f(x)\,dg(x),$$

причем

$$|\mathrm{I}| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \mathrm{V}_a^b(g). \qquad (6)$$

Доказательство-1

В силу следствия из теоремы 1 в качестве $g(x)$ можно взять монотонно неубывающую функцию. Действительно, пусть $g(x) = g_1(x) - g_2(x)$ и нам достаточно доказать существование следующих интегралов Римана–Стилтьеса:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg_1(x) \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b f(x)\,dg_2(x),$$

и тогда мы докажем существование интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = \int\limits_a^b f(x)\,dg_1(x) - \int\limits_a^b f(x)\,dg_2(x).$$

Доказательство-2

Рассмотрим произвольное разбиение T отрезка $[a,b]$ и на каждом отрезке разбиения $[x_{k-1},x_k]$ рассмотрим минимум и максимум функции $f(x)$:

$$m_k = \min_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x), \quad M_k = \max_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x).$$

Так что помимо интегральной суммы (4) составим нижнюю s и верхнюю S суммы

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right], \quad S = \sum_{k=1}^{n} M_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right]. \tag{7}$$

Доказательство-3

Совершенно понятно, что выполнены неравенства для одного и того же разбиения T отрезка $[a, b]$:

$$s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

Заметим, что при добавлении одной новой точки к разбиению T отрезка $[a, b]$ нижняя сумма не убывает, а верхняя сумма не возрастает.

Доказательство-4

Действительно, пусть $y_k \in [x_{k-1}, x_k]$ — это новая точка разбиения T и

$$m_{1k} = \min_{x \in [x_{k-1}, y_k]} f(x) \geqslant m_k, \quad m_{2k} = \min_{x \in [y_k, x_k]} f(x) \geqslant m_k, \qquad (8)$$

тогда в верхнюю сумму до добавления новой точки имелось слагаемое

$$m_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1}) \right],$$

а после добавления новой точки получилось два слагаемых

$$m_{1k} \left[g(x_k) - g(y_k) \right] + m_{2k} \left[g(y_k) - g(x_{k-1}) \right].$$

Причем в силу (8) имеет место неравенство снизу

$$m_{1k} \left[g(x_k) - g(y_k) \right] + m_{2k} \left[g(y_k) - g(x_{k-1}) \right] \geqslant m_k \left[g(x_k) - g(y_k) \right] + \\ + m_k \left[g(y_k) - g(x_{k-1}) \right] = m_k \left[g(x_k) - g(x_{k-1}) \right].$$

Аналогичным образом доказывается, что верхняя сумма S не возрастает при добавлении новой точки разбиения.

Доказательство-5

Теперь докажем, что если у нас имеется два различных разбиения T_1 и T_2 отрезка $[a, b]$, то соответствующая разбиению T_1 нижняя сумма s_1 не превосходит верхнюю сумму S_2, соответствующую разбиению T_2. С этой целью возьмем объединение этих двух разбиений $\mathrm{T}_3 = \mathrm{T}_1 \cup \mathrm{T}_2$ и сопоставим ему нижнюю сумму s_3 и верхнюю сумму S_3. В силу предыдущего имеет место неравенства

$$s_1 \leqslant s_3 \leqslant S_3 \leqslant S_2.$$

Значит, всегда $s_1 \leqslant S_2$.

Доказательство-6

Пусть теперь

$$\mathrm{I} = \sup_{\mathrm{T}} s(\mathrm{T}).$$

По доказанному имеет место неравенство

$$s \leqslant \mathrm{I} \leqslant S \quad \text{и} \quad s \leqslant \sigma \leqslant S.$$

Стало быть,

$$|\sigma - \mathrm{I}| \leqslant S - s. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь повнимательней выражение $S - s$:

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \left[g(x_k) - g(x_{k-1}) \right].$$

Доказательство-7

Заметим, что поскольку функция $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, то она по теореме Кантора является равномерно непрерывной на отрезке $[a,b]$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $\lambda(\mathrm{T}) < \delta$ получим $M_k - m_k < \varepsilon$ для всех $k = 1, 2, ..., n$. Тогда из (9) получим неравенство

$$|\sigma - \mathrm{I}| \leqslant S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right] \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right] = \varepsilon[g(b) - g(a)].$$

Доказательство-8

А это означает, что

$$\lim_{\lambda(\mathrm{T})\to 0} \sigma(\mathrm{T}) = \mathrm{I} = \int\limits_a^b f(x)\, dg(x).$$

Теперь заметим, что для произвольного разбиения T отрезка $[a, b]$ справедливо неравенство

$$|\sigma(g; f; \mathrm{T})| \leqslant \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \mathrm{V}_a^b(g).$$

Справедливо следующее неравенство

$$|\mathrm{I}| \leqslant |\mathrm{I} - \sigma(g; f; \mathrm{T})| + |\sigma(g; f; \mathrm{T})| \leqslant |\mathrm{I} - \sigma(g; f; \mathrm{T})| + \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \mathrm{V}_a^b(g).$$

Переходя к пределу при $\lambda(\mathrm{T}) \to 0$ получим искомую оценку.

Интегрирование по частям

Теорема

При условии существования одного из интегралов в следующей формуле вытекает существование другого:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = -\int\limits_a^b g(x)\,df(x) + f(b)g(b) - f(a)g(a). \tag{10}$$

Доказательство-1

Пусть $\mathrm{T} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b\}$ — произвольное разбиение отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ при $k = \overline{1, n}$. Рассмотрим следующую интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right] = \sum_{k=1}^{n} g(x_k) f(\xi_k) - \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) f(\xi_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g(x_k) f(\xi_k) - \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) f(\xi_{k+1}) = g(b) f(\xi_n) - g(a) f(\xi_1) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)\right] = g(b) f(b) - g(a) f(a) +$$

$$+ g(b)\left[f(\xi_n) - f(b)\right] - g(a)\left[f(\xi_1) - f(a)\right] - \sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)\right].$$

Доказательство-2

Теперь перейдем к пределу при $\lambda(\mathrm{T}) \to 0$ и получим при условии существовании предела одной из интегральных сумм либо

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left[g(x_k) - g(x_{k-1})\right],$$

либо

$$\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)\left[f(\xi_{k+1}) - f(\xi_k)\right],$$

получим в пределе равенство (10).

Свойства интеграла Римана–Стилтьеса

Приведем некоторые свойства интеграла Римана–Стилтьеса.

(i) $\int\limits_a^b (\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x))\, dg(x) =$

$\alpha_1 \int\limits_a^b f_1(x)\, dg(x) + \alpha_2 \int\limits_a^b f_2(x)\, dg(x)$;

(ii) $\int\limits_a^b f(x)\, d\,(\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)) =$

$\alpha_1 \int\limits_a^b f(x)\, dg_1(x) + \alpha_2 \int\limits_a^b f(x)\, dg_2(x)$;

(iii) $\int\limits_a^b f(x)\, dg(x) = \int\limits_a^c f(x)\, dg(x) + \int\limits_c^b f(x)\, dg(x)$, $c \in (a, b)$,

причем равенства (i)–(ii) имеют место при условии существования всех интегралов в правой части, а в случае (iii) при условии существования интеграла в левой части.

Один пример-1

ПРИМЕР 1. Приведем пример функций $f(x)$ и $g(x)$, когда интегралы в правой части (iii) существуют, а вот интеграл в левой части — нет. Пусть функции f и g заданы на сегменте $[-1,1]$, причем

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0; \\ 1, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0; \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда существуют оба интеграла

$$\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,dg(x) = \int\limits_{0}^{1} f(x)\,dg(x) = 0,$$

Один пример-2

однако интеграл

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dg(x)$$

не существует. Для того чтобы это доказать, возьмем произвольное разбиение T отрезка, но таким образом, чтобы точка 0 не попала в число точек разбиения. Рассмотрим соответствующую интегральную сумму

$$\sigma(g; f; \mathrm{T}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\, [g(x_k) - g(x_{k-1})]\,,$$

и пусть $x_{i-1} < 0 < x_i$, тогда эта сумма равна $\sigma = f(\xi_i)$, а стало быть, равна либо 0 либо 1 в зависимости от того, где лежит точка ξ_i: $\xi_i > 0$ или $\xi_i < 0$. Поэтому предела при $\lambda(\mathrm{T}) \to 0$ не существует.

Теорема Хелли

Теорема

Пусть $f(x) \in \mathbb{C}[a, b]$ *и последовательность функций* $\{g_n(x)\}$ *сходится в каждой точке отрезка* $[a, b]$ *к функции* $g(x)$, *причем*

$$\mathrm{V}_a^b(g_n) \leqslant K < +\infty,$$

тогда имеет место предельное равенство

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)\, dg_n(x) = \int\limits_a^b f(x)\, dg(x).$$

Вспомогательная лемма

Лемма

Пусть функция $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$, *а* $g(x)$ *— кусочно-постоянная функция, т. е. существует такое разбиение отрезка* $[a,b]$

$$c_0 = a < c_1 < c_2 < \ldots < c_n < c_{n+1} = b,$$

что функция $g(x)$ *является постоянной на каждом отрезке* $[c_{k-1}, c_k]$ *при* $k = \overline{0, n+1}$. *При этих условиях имеет место явное выражение для интеграла Римана–Стилтьеса на отрезке* $[a,b]$ *от функции* $f(x)$ *по функции* $g(x)$:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dg(x) = f(a)\left[g(a+0) - g(a)\right] + f(b)\left[g(b) - g(b-0)\right] + \\ + \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\left[g(c_k+0) - g(c_k-0)\right]. \quad (11)$$

Линейные функционалы над $\mathbb{C}[a,b]$-1

Итак, рассмотрим некоторый линейный (по построению) функционал на банаховом пространстве $\mathbb{C}[a,b]$, определенный следующим интегралом Римана–Стилтьеса:

$$\langle \Phi_g, f\rangle = \int\limits_a^b f(x)\,dg(x) \quad \text{при некотором} \quad g \in \mathbb{BV}[a,b] \qquad (12)$$

и для любой функции $f(x) \in \mathbb{C}[a,b]$. Линейность этого функционала вытекает из свойства (i) интегралов Римана–Стилтьеса.

Линейные функционалы над $\mathbb{C}[a,b]$-2

Пусть $f_n \rightrightarrows f(x)$ равномерно по $x \in [a,b]$, что равносильно $\|f_n - f\| \to 0$ при $n \to +\infty$. Тогда в силу теоремы 2 справедлива цепочка неравенств

$$|\langle \Phi_g, f_n - f\rangle| = \left| \int\limits_a^b [f_n(x) - f(x)]\, dg(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \mathrm{V}_a^b(g) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to +\infty.$$

Линейные функционалы над $\mathbb{C}[a, b]$-3

Тем самым мы приходим к выводу о том, что линейная оболочка этого семейства

$$\left\{ \Phi_g \middle| \ g \in \mathbb{BV}[a, b] \right\}$$

образует линейное подпространство в банаховом пространстве всех линейных непрерывных функционалов на банаховом пространстве $\mathbb{C}[a, b]$. Возникает вопрос: имеются ли другие функционалы, действие которых нельзя представить формулой (12)? Оказывается, что все функционалы на банаховом пространстве $\mathbb{C}[a, b]$ можно представить формулой (12).

Теорема Рисса

Теорема

Каждый линейный и непрерывный функционал на банаховом пространстве $\mathbb{C}[a, b]$ *со стандартной нормой можно представить в виде следующего интеграла Римана–Стилтьеса*:

$$\langle \Phi_g, f \rangle = \int\limits_a^b f(x)\, dg(x) \quad \textit{при} \quad g(x) \in \mathbb{BV}[a, b]$$

для всех

$$f(x) \in \mathbb{C}[a, b].$$

Определение 3. *Посредством* $\widehat{\mathbb{BV}}[a,b]$ *обозначим линейное пространство функций, для которых конечна величина*

$$\hat{\mathrm{V}}_a^b(f) = \sup_{h(x)\in\mathbb{C}_0^\infty(a,b),\ |h|\leqslant 1} \left| \int\limits_a^b f(x)\,dh(x) \right| < +\infty. \qquad (13)$$

(Здесь $\mathbb{C}_0^\infty(a,b)$ есть множество бесконечно дифференцируемых на интервале функций, равных нулю вне некоторого замкнутого подмножества интервала $(a;b)$.)

Некоторые пространства-2

Теорема

Имеют место вложения $\mathbb{C}[a,b] \cap \widehat{\mathbb{BV}}[a,b] \subset \mathbb{BV}[a,b] \subset \widehat{\mathbb{BV}}[a,b]$, *причем на множестве* $\mathbb{C}[a,b] \cap \widehat{\mathbb{BV}}[a,b]$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{V}_a^b(f) = \hat{\mathrm{V}}_a^b(f).$$