Лекция 1

ТЕОРИЯ МЕРЫ ЛЕБЕГА ИЗ $\mathbb{R}^2$.

§ 1. Необходимость расширения понятия интеграла.

Сначала обсудим построение интеграла Римана.

Пусть функция $f(x)$ определена на собственном отрезке $[a, b]$. Определим разбиение отрезка $[a, b]$.

$$T_n(\xi_n) = \{a = x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b\}\,, \tag{1.1}$$
$$\xi(n) = \{\xi_1, ..., \xi_{n-1}\}\,, \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

Составим так называемую интегральную сумму:

$$\sigma_n(T_n) \equiv \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi)(x_{i+1} - x_i). \tag{1.2}$$

Введем параметр разбиения

$$\Delta_n \equiv \max_{i\in[1,n-1]} |x_{i+1} - x_i|. \tag{1.3}$$

Дадим определение *интеграла Римана* от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$.

Определение 1. *Интегралом Римана функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ называется следующий предел равномерно по T_n:*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \stackrel{def:}{=} \lim_{n\to+\infty} \sigma_n. \tag{1.4}$$

Замечание 1. Равномерность существования предела (1.4) относительно разбиения T_n понимается в том смысле, что предел не должен зависеть от выбора разбиения T_n при каждом $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим следующий известный пример, когда предел (1.4) существует, но зависит от выбора последовательности разбиений $\{T_n\}$. Рассмотрим так называемую функцию Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]; \\ 0 & \text{при} \quad x \in \mathbb{J} \cap [0, 1], \end{cases}$$

где символом $\mathbb{Q}$ обозначено множество рациональных чисел, а символом $\mathbb{J}$ — множество иррациональных чисел. Известно, что $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{J}$ и $\mathbb{Q} \cap \mathbb{J} = \varnothing$.

Тогда возьмем сначала такую последовательность разбиений $\{T_{1n}\}$ отрезка $[0,1]$, состоящую из произвольного разбиения точками $\{x_1, ..., x_N\}$ с выбором $\xi_1(n) \subset \mathbb{Q}$, а затем последовательность разбиений $\{T_{2n}\}$ отрезка $[0,1]$, состоящую из произвольного разбиения точками $\{x_1, ..., x_N\}$ с выбором $\xi_2(n) \subset \mathbb{J}$. Вычислим соответствующие интегральные суммы:

$$\sigma_{1n} = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_{1i})(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n-1} 1 \cdot (x_{i+1} - x_i) = 1,$$

$$\sigma_{2n} = \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_{2i})(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^{n-1} 0 \cdot (x_{i+1} - x_i) = 0.$$

Ясно, что в обоих случаях пределы существуют

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_{1n} = 1, \quad \lim_{n\to+\infty} \sigma_{2n} = 0.$$

Однако, эти пределы не совпадают. Более того, нетрудно заметить, что в общем случае для каждого числа $c \in [0,1]$ найдется такая последовательность разбиений $T_n(a)$, что

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_n[T_n(a)] = a.$$

Следовательно, предельных точек последовательности интегральных сумм функции Дирихле — это весь отрезок $[0,1]$.

Для получения необходимого и достаточного условия интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ нужно ввести понятия верхней суммы Дарбу $S(T_n)$ и нижней суммы Дарбу $s(T_n)$.

Определение 2. *Верхней суммой Дарбу называется величина*

$$S(T_n) \stackrel{def:}{=} \sum_{i=1}^{n-1} M_i(x_{i+1} - x_i), \quad M_i = \sup_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x). \tag{1.5}$$

Определение 3. *Нижней суммой Дарбу называется величина*

$$s(T_n) \stackrel{def:}{=} \sum_{i=1}^{n-1} m_i(x_{i+1} - x_i), \quad m_i = \inf_{x\in[x_i, x_{i+1}]} f(x). \tag{1.6}$$

Очевидно, что

$$s_{T_n} \leqslant \sigma(T_n) \leqslant S_{T_n}. \tag{1.7}$$

Замечание 2. Введенные суммы Дарбу имеют следующий смысл: вместо того, чтобы исследовать вопрос о существовании равномерного предела (1.4) и исследовать вопрос о его существовании «перебирая» все возможные точки $\{\xi_n\}$ и всевозможные значения функции $\{f(\xi_i)\}$ на отрезке $[a,b]$ мы рассматриваем только точную верхнюю и точную нижнюю грань функции $f(x)$ на произвольных отрезках $[x_i, x_{i+1}]$. Так исследовать этот вопрос проще и, как мы покажем ниже, этот подход является оптимальным поскольку дает необходимое и достаточное условие интегрируемости по Риману.

Справедлива следующая известная теорема:

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in \mathbb{C}[0,1]$, *тогда равномерный по разбиению отрезка* $[0,1]$ *предел интегральных сумм существует.*

Доказательство.

Разобьем доказательство теоремы на три шага.

1. Пусть $T_{n+1} = T_n \cup \{x_0\}$. Докажем, что *имеет место неравенство*

$$s_{T_n} \leqslant s_{T_{n+1}} \leqslant S_{T_{n+1}} \leqslant S_{T_n}. \tag{1.8}$$

$\square$ Действительно, пусть $x_0 \in [x_i, x_{i+1}]$ и введем следующие обозначения:

$$m_i^{'} = \inf_{x\in[x_i,x_0} f(x),\ m_i^{''} = \inf_{x\in[x_0,x_{i+1}} f(x),\ \lambda_1 = |x_0 - x_i|,\ \lambda_2 = |x_{i+1} - x_0|.$$

Заметим, что отличие сумм s_{T_n} и $s_{T_{n+1}}$ в слагаемых, связанных с отрезком $[x_i, x_{i+1}] \ni x_0$. Поэтому

$$s_{T_{n+1}} - s_{T_n} = m_i^{'}\lambda_1 + m_i^{''}\lambda_2 - m_i(\lambda_1+\lambda_2) = \\ = \lambda_1(m_i^{'} - m_i) + \lambda_2(m_i^{''} - m_i) \geqslant 0,$$

поскольку, очевидно, $m_i^{'} \geqslant m_i$ и $m_i^{''} \geqslant m_i$.

Аналогичным образом, доказывается неравенство для верхних сумм Дарбу. $\boxtimes$.

2. Докажем, что *имеет место неравенство*

$$s_{T_n} \leqslant S_{T_m} \quad \text{для любых разбиений} \quad T_n,\ T_m. \tag{1.9}$$

$\square$. Пусть $T_l = T_n \cup T_m$. Тогда согласно неравенству (1.9), примененного необходимое число раз, и неравенства (1.7) получим неравенство

$$s_{T_n} \leqslant s_{T_l} \leqslant S_{T_l} \leqslant S_{T_m}. \boxtimes. \tag{1.10}$$

3. Теперь докажем, что *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta(\varepsilon) > 0$, *что для любого разбиения* T_n *с параметром разбиения* $\Delta_n < \delta(\varepsilon)$ *имеет место неравенство*

$$S_{T_n} - s_{T_n} < \varepsilon. \tag{1.11}$$

$\square$. Действительно, рассмотрим разность

$$S_{T_n} - s_{T_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i (x_{i+1} - x_i),$$

$$\omega_i = M_i - m_i = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) - \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(\xi_i^{''}) - f(\xi_i^{'}),$$

где $\xi_i^{'}, \xi_i^{''} \in [x_i, x_{i+1}]$, поскольку функция $f(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и, следовательно, в силу замкнутости отрезка $[x_i, x_{i+1}]$ достигает на нем точных граней.

С другой стороны, поскольку непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна на нем, то для заданного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $\xi_i^{'}, \xi_i^{''} \in [x_i, x_{i+1}]$ таких, что

$$|\xi_i^{''} - \xi_i^{'}| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(\xi_i^{''}) - f(\xi_i^{'})| < \varepsilon.$$

Осталось заметить, что имеет место неравенство

$$|\xi_i^{''} - \xi_i^{'}| \leqslant \Delta_n.$$

Поэтому утверждение доказано.

Из неравенств (1.9) и (1.11) вытекает, что для любой последовательности точек $\{x_1, ..., x_n\}$ разбиения отрезка $[a, b]$ соответствующие последовательности верхних S_n и нижних s_n сумм Дарбу монотонно сходятся и их пределы совпадают и не зависят от выбора этой последовательности точек разбиения.

Следовательно, по теореме о двух милиционеров

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = \lim_{n \to +\infty} \sigma_n = \lim_{n \to +\infty} S_n = a.$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Заметим, что при доказательстве теоремы мы воспользовались непрерывностью функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ только тогда, когда доказывали, что величина ω_i, называемая *колебанием* на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ обладает свойством

$$\sum_{i=1}^{n-1} \omega_i |x_{i+1} - x_i| \to +0 \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| \to +0. \tag{1.12}$$

Это свойство можно добиться двояким образом *либо функция $f(x)$ на некоторых отрезках разбиения непрерывна либо множество точек разрыва первого рода можно покрыть такими отрезками, что величина (1.12) стремилась к нулю при стремлении к нулю общей длины этих отрезков.*

Поэтому класс функций интегрируемых по Риману можно расширить до ограниченных функций имеющих точки разрыва первого рода на множестве нулевой меры Лебега на отрезке $[a, b]$ — это известный результат, называемый *теоремой Лебега о достаточном условии интегрируемости по Риману.*

Кроме того, имеется другое достаточное условие интегрируемости по Лебегу: *всякая монотонная ограниченная функция интегрируема по Риману.*

$\square$. Действительно, для этого заметим, что если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a,b]$, то колебание ω_i на любом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ оценивается сверху следующим образом:

$$\omega_i \leqslant |f(b) - f(a)| \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i |x_{i+1} - x_i| \leqslant$$
$$\leqslant \delta(\varepsilon) \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i = \delta(\varepsilon) \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| =$$
$$= \delta(\varepsilon) \left| \sum_{i=1}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] \right| = \delta(\varepsilon) |f(b) - f(a)| = \varepsilon.$$

С другой стороны, например, в теории стохастических процессов есть существенная необходимость в расширении понятия интеграла таким образом, чтобы ограниченные функции при дополнительном условии *измеримости функции в некотором смысле* на отрезке $[a,b]$ были интегрируемы. Таким расширением является понятие *интеграла Лебега.* В частности, функция Дирихле будет интегрируемой по Лебегу и ее интеграл Лебега равен нулю на отрезке $[0,1]$.

§ 2. Некоторые факты из теории множеств

Напомним следующие операции над множествами:

$$A \cup B = \{x \in A \quad \text{или} \quad x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x \in A \quad \text{и} \quad x \in B\},$$
$$A \setminus B = \{x \in A \quad \text{и} \quad x \notin B\},$$
$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Пример 1. Пусть $A \subset P$ и $B \subset P$, тогда имеют место следующие равенства:

$$A \cup B = P \setminus [(P \setminus A) \cap (P \setminus B)], \tag{2.1}$$
$$A \setminus B = A \cap (P \setminus B), \tag{2.2}$$
$$A \vartriangle B = (P \setminus A) \vartriangle (P \setminus B). \tag{2.3}$$

Пример 2. Кроме того, справедливы следующие вложения:

$$(A_1 \cup A_2) \vartriangle (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2). \tag{2.4}$$

Если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2)\,. \tag{2.5}$$

§ 3. Элементарные множества на плоскости.

Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1_x \times \mathbb{R}^1_y$. Рассмотрим все множества следующего вида:

$$\Pi = \{A_x \times B_y\}\,,$$

$$A_x = \{x \in \lfloor a, b\rceil\}\,, \quad B_y = \{y \in \lfloor c, d\rceil\}\,.$$

(Символ $\lfloor a, b\rceil$ обозначает конечный промежуток любого типа.)

Причем Π может быть пустым множеством, если, например, $a > b$, точкой, когда $a = b$ и $c = d$, и отрезком (интервалом, полуинтервалом), когда $a = b$ и $c < d$.

Определим меру собственного прямоугольника Π стандартным образом, как площадь:

$$m(\Pi) = (b-a)(d-c).$$

Если же Π — это пустое множество, точка или отрезок (интервал, полуинтервал), то определению считаем, что

$$m(\Pi) = 0.$$

Можно доказать, что введенная мера m является аддитивной функцией прямоугольников, т. е. если

$$\Pi_i \cap \Pi_j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j \quad \text{и} \quad \bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i \text{— прямоугольник},$$

то

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i). \tag{3.1}$$

Теперь мы введем понятие *элементарного множества* из $\mathbb{R}^2$.

Определение 1. *Элементарным множеством из $\mathbb{R}^2$ называется множество, полученное объединением* ***конечного*** *числа* ***попарно непересекающихся*** *прямоугольников.*

При этом мера элементарного множества вводится как

$$m^{'}(A) \stackrel{def:}{=} \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i), \quad \Pi_i \cap \Pi_j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j. \tag{3.2}$$

□ Действительно, пусть

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \Pi_i = \bigcup_{j=1}^{l} Q_j, \tag{3.3}$$

где
$$\Pi_i \cap \Pi_j = \varnothing, \quad Q_i \cap Q_j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j.$$
В силу равенств (3.3) имеем
$$\Pi_i = \bigcup_{j=1}^{l} \left(Q_j \bigcap \Pi_i\right), \quad Q_j = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\Pi_i \bigcap Q_j\right), \tag{3.4}$$
причем
$$\begin{aligned} \left(Q_{j_1} \bigcap \Pi_i\right) \bigcap \left(Q_{j_2} \bigcap \Pi_i\right) = \varnothing \quad \text{при} \quad j_1 \neq j_2, \\ \left(\Pi_{i_1} \bigcap Q_j\right) \bigcap \left(\Pi_{i_2} \bigcap Q_j\right) = \varnothing \quad \text{при} \quad i_1 \neq i_2. \end{aligned} \tag{3.5}$$
Очевидно, что множество
$$Q_j \bigcap \Pi_i = \Pi_i \bigcap Q_j$$
является прямоугольником. Таким образом, согласно определению (3.2) в силу (3.3), (3.4), (3.5) и (3.1) приходим к следующей цепочке равенств:
$$m^{'}(A) = \sum_{i=1}^{n} m(\Pi_i) = \sum_{i=1}^{n} m\left(\bigcup_{j=1}^{l}\left(Q_j \bigcap \Pi_i\right)\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} m\left(Q_j \bigcap \Pi_i\right) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{n} m\left(\Pi_i \bigcap Q_j\right) = \sum_{j=1}^{l} m(Q_j). \tag{3.6}$$

☒ Непосредственно из определения следуют важные свойства меры на элементарных множествах. Именно, если A, B — элементарные множества, то
$$A \cap B = \varnothing \Rightarrow m'(A \cup B) = m'(A) + m'(B), \tag{3.7}$$
(конечная аддитивность)
$$A \subset B \Rightarrow m'(A) \leqslant m'(B) \tag{3.8}$$
(монотонность).

Имеет место свойство *счётной полуаддитивности* элементарных множеств.

Теорема 1. *Пусть A и A_n при $n \in \mathbb{N}$ являются элементарными множествами, причем*
$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$
тогда
$$m^{'}(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m^{'}(A_n). \tag{3.9}$$

Доказательство. Доказательство проведем в несколько шагов.

Шаг 1. Прежде всего заметим, что по элементарному множеству A можно построить такое замкнутое элементарное множество $\overline{A}$, т. е. составленное из попарно непересекающихся замкнутых прямоугольников, что

$$\overline{A} \subset A$$

и

$$m'(\overline{A}) \geqslant m'(A) - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.10}$$

$\square$ Действительно, пусть

$$A = \bigcup_{j=1}^{l} \Pi_j, \quad \text{где} \quad \Pi_i \bigcap \Pi_j = \varnothing \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Пусть $\overline{\Pi}_j$ — это замкнутый прямоугольник (т. е. имеющий вид $[a, b] \otimes [c, d]$), для которого имеет место вложение

$$\overline{\Pi}_j \subset \Pi_j, \quad \overline{A} = \bigcup_{j=1}^{l} \overline{\Pi}_j$$

и мера которого равна

$$m(\overline{\Pi}_j) \geqslant m(\Pi_j) - \frac{\varepsilon}{2l} \Rightarrow m'(\overline{A}) = \sum_{j=1}^{l} m(\overline{\Pi}_j) \geqslant \sum_{j=1}^{l} m(\Pi_j) - \frac{\varepsilon}{2},$$

тогда мы приходим к неравенству (3.10). $\boxtimes$

Шаг 2. Теперь заметим, что для всякого элементарного множества A_n найдется такое открытое элементарное множество $\widetilde{A}_n$, т. е. составленное из открытых прямоугольников (прямоугольники вида$(a, b) \otimes (c, d)$) что

$$A_n \subset \widetilde{A}_n \quad \text{и} \quad m'(\widetilde{A}_n) \leqslant m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{3.11}$$

$\square$. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ выберем открытый прямоугольник $\widetilde{\Pi}$ «близкий» к прямоугольнику Π следующим образом:

$$\Pi_l = \lfloor a, b \rceil \otimes \lfloor c, d \rceil \Rightarrow \widetilde{\Pi}_l = (a - \delta, b + \delta) \otimes (c - \delta, d + \delta),$$

причем $\delta > 0$ выберем из условия

$$m\left(\widetilde{\Pi}_l\right) = m(\Pi_l) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \frac{1}{m} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (b - a + 2\delta)(d - c + 2\delta) = (b - a)(d - c) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \frac{1}{m}.$$

Отсюда получаем квадратное уравнение

$$4\delta^2 + (d - c + b - a)2\delta = \frac{\varepsilon}{m 2^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta = -(d-c+b-a) + \left[(d-c+b-a)^2 + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}m}\right]^{1/2}$$

Отсюда получаем, что

$$\widetilde{A}_n = \bigcup_{l=1}^{m} \widetilde{\Pi}_l$$

удовлетворяет свойству (3.11). ⊠.

Шаг 3. Ясно, что

$$\overline{A} \subset A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \widetilde{A}_n. \tag{3.12}$$

Но $\overline{A}$ — это замкнутое и ограниченное множество из $\mathbb{R}^2$, т. е. так называемый *компакт*.

Справедливо следующее утверждение из вещественного анализа, подробное доказательство которого будет проведено позже при изучении метрических пространств в лекции 4:

Л е м м а 1. *Из любого произвольного покрытия компакта $\overline{A}$ открытыми прямоугольниками $\widetilde{A}_n$*

$$\overline{A} \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \widetilde{A}_n$$

можно выделить конечную подсистему

$$\left\{\widetilde{A}_{n_i}\right\}_{i=1}^{s} \Rightarrow \overline{A} \subset \bigcup_{i=1}^{s} \widetilde{A}_{n_i}.$$

Используя свойство монотонности меры элементарных множеств, можно доказать, что имеет место неравенство

$$m'(\overline{A}) \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\widetilde{A}_{n_i}). \tag{3.13}$$

Теперь из неравенств (3.10), (3.11) и (3.13) вытекает цепочка

$$m'(A) \leqslant m'(\overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{i=1}^{s} m'(\widetilde{A}_{n_i}) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m'(\widetilde{A}_n) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n) + \varepsilon. \tag{3.14}$$

Приходим к утверждению теоремы.

Т е о р е м а д о к а з а н а.

Следствие. *Мера m', заданная на элементарных множествах, является σ-аддитивной:*

$$m'(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} m'(A_n), \tag{3.15}$$

если A, A_n (n=1,2,...) — элементарные множества и

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n, \quad A_{n_1} \bigcap A_{n_2} = \varnothing \quad \textit{при} \quad n_1 \neq n_2.$$

□ Очевидно, нужно доказать лишь неравенство, обратное (3.9). Используем монотонность внешней меры элементарных множеств

$$\sum_{n=1}^{N} m'(A_n) = m'\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant m'(A)$$

и предельный переход в неравенстве. ⊠

§ 4. Внешняя мера множеств.

Определение 2. *Внешней мерой μ^* множества A называется число*

$$\mu^*(A) \equiv \inf_{A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_k} \sum_{k=1}^{+\infty} m(\Pi_k), \tag{4.1}$$

где $\{\Pi_k\}$ — произвольная счетная система прямоугольников, возможно пересекающихся.

Замечание 4. Пока мы рассматриваем лишь случай

$$A \subset \Pi \equiv [0,1] \times [0,1],$$

имеем $m(\Pi) = 1$ и из равенства (4.1) приходим к выводу, что

$$\mu^*(A) \leqslant m(\Pi) = 1,$$

т. е. внешняя мера множества $A \subset \Pi$ всегда конечна.

Следствие. *Из определения внешней меры сразу же вытекает, что*

$$\mu^*(A) = m'(A)$$

для всякого элементарного множества A.

□.

Действительно, поскольку

$$A = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_k, \quad \Pi_{k_1} \cap \Pi_{k_2} = \varnothing, \quad k_1 \neq k_2 \Rightarrow m'(A) = \sum_{k=1}^{n} m(\Pi_k).$$

то infimum достигается на этой системе прямоугольников. ⊠.

Справедливо следующее *утверждение о σ-полуаддитивность внешней меры*:
Теорема 2. *Пусть $A \subset \Pi$, $A_n \subset \Pi$ — произвольные множества и*

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n,$$

тогда

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n). \tag{4.2}$$

Доказательство.
Заметим, что в силу определения внешней меры μ^* для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая система прямоугольников

$$\{\Pi_{k,n}\}_{k=1}^{+\infty},$$

что

$$A_n \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_{k,n}$$

и

$$\sum_{k=1}^{+\infty} m(\Pi_{k,n}) \leqslant \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \tag{4.3}$$

С другой стороны,

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Pi_{k,n}$$

и, стало быть,

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} m\left(\Pi_{k,n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к утверждению теоремы.
Теорема доказана.

§ 5. Измеримые по Лебегу множества.

Определение 3. *Множество A называется измеримым по Лебегу, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество B, что имеет место следующее неравенство*:

$$\mu^*(A \vartriangle B) < \varepsilon. \tag{5.1}$$

Замечание. Отметим, что из определения 3 сразу же вытекает измеримость по Лебегу множеств A, имеющих нулевую внешнюю меру.

$\square$ Действительно, пусть $\mu^*(A) = 0$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ возьмем $B = \varnothing$ и
$$\mu^*(A \vartriangle B) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon. \boxtimes.$$

Множество измеримых по Лебегу множеств $\mathfrak{M}$ обладает определенным набором свойств, некоторые из которых мы собрали в следующей лемме, доказательство которой мы опустим.

Лемма 1. *Сумма, пересечение, дополнение, разность и симметрическая разность измеримых по Лебегу множеств являются измеримыми по Лебегу множествами.*

Доказательство.

1. Пусть $A, B \in \mathfrak{M}$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементарные множества A_ε, B_ε, что
$$\mu^*(A\Delta A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \mu^*(B\Delta B_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}.$$
Далее в силу вложения (2.4) имеем
$$(A \cup B)\,\Delta\,(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \subset (A\Delta A_\varepsilon) \cup (B\Delta B_\varepsilon)$$
и, следовательно,
$$\mu^*\,(A \cup B)\,\Delta\,(A_\varepsilon \cup B_\varepsilon) \leqslant \mu^*\,(A\Delta A_\varepsilon) + \mu^*\,(B\Delta B_\varepsilon) < \varepsilon.$$

2. Пусть $A \in \mathfrak{M}$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество A_ε, что имеет место неравенство
$$\mu^*(A\Delta A_\varepsilon) < \varepsilon.$$
В силу (2.3) имеет место формула
$$(X\backslash A)\,\Delta\,(X\backslash A_\varepsilon) = A\Delta A_\varepsilon \Rightarrow \mu^*\,((X\backslash A)\,\Delta\,(X\backslash A_\varepsilon)) = \mu^*\,(A\Delta A_\varepsilon) < \varepsilon.$$

3. Справедлива следующая формула:
$$A \cap B = (X\backslash A) \cup (X\backslash B)\,.$$
Следовательно, из пунктов 1 и 2 вытекает, что если $A, B \in \mathfrak{M}$, то
$$X\backslash A, X\backslash B, A \cup B \in \mathfrak{M} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{M}.$$

4. Последнее утверждение следует из пунктов 1–3 и следующей формулы:
$$A \vartriangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)\,.$$

Лемма доказана.

Теперь мы в состоянии доказать $\sigma-$аддитивность меры Лебега μ на множестве $\mathfrak{M}$. Сначала докажем её *конечную* аддитивность.

Теорема 3. *Пусть*
$$A = \bigcup_{n=1}^{N} A_n,$$

где $A_{n_1} \bigcap A_{n_2} = \varnothing$ *при* $n_1 \neq n_2$, *причем* $A, A_n \in \mathfrak{M}$, *тогда*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n).$$

Доказательство.

Лемма 2. *Для любых множеств A и B имеет место следующее неравенство:*

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B). \tag{5.2}$$

□ Действительно, имеют место вложения

$$A \subset B \cup (A \triangle B), \quad B \subset A \cup (A \triangle B),$$

из которых в силу доказанной полуаддитивности внешней меры μ^* имеют место следующие неравенства:

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B) + \mu^*(A \triangle B), \quad \mu^*(B) \leqslant \mu^*(A) + \mu^*(A \triangle B).$$
$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \leqslant \mu^*(A \triangle B).\boxtimes$$

Очевидно, что рассматриваемую теорему достаточно доказать для случая двух измеримых по Лебегу множеств A_1 и A_2.

Поскольку $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие элементарные множества B_1 и B_2, что

$$\mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon, \quad \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon. \tag{5.3}$$

Введем следующие обозначения:

$$A = A_1 \cup A_2, \quad B = B_1 \cup B_2. \tag{5.4}$$

Ясно, что как объединение двух измеримых множеств множество A измеримо по Лебегу и, конечно, множество B является элементарным. Ранее было доказано вложение

$$B_1 \cap B_2 \subset (A_1 \triangle B_1) \cup (A_2 \triangle B_2), \tag{5.5}$$

поскольку множества A_1 и A_2 не пересекаются. Заметим, что на элементарных множествах внешняя мера μ^* и мера $m^{'}$ совпадают. Тогда из (5.3) и (5.5) вытекает следующее соотношение:

$$m^{'}(B_1 \cap B_2) = \mu^*(B_1 \cap B_2) \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1) + \mu^*(A_2 \triangle B_2) < 2\varepsilon. \tag{5.6}$$

Наконец, в силу (5.2) имеют место следующие неравенства:

$$\left|m^{'}(B_1) - \mu^*(A_1)\right| = |\mu^*(B_1) - \mu^*(A_1)| \leqslant \mu^*(A_1 \triangle B_1) < \varepsilon, \tag{5.7}$$

$$\left|m^{'}(B_2) - \mu^*(A_2)\right| = |\mu^*(B_2) - \mu^*(A_2)| \leqslant \mu^*(A_2 \triangle B_2) < \varepsilon. \tag{5.8}$$

В частности,

$$m^{'}(B_1) > \mu^*(A_1) - \varepsilon, \quad m^{'}(B_2) > \mu^*(A_2) - \varepsilon. \tag{5.9}$$

С другой стороны, имеет место равенство

$$m'(B) = m'(B_1) + m'(B_2) - m'(B_1 \cap B_2), \tag{5.10}$$

$\square$ Докажем, что

$$\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1) + \lambda(A_2) - \lambda(A_1 \cap A_2).$$

Действительно, имеют место следующие равенства:

$$A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c), \quad A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2),$$
$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c),$$

где объединяемые множества не пересекаются и для удобства мы ввели обозначение

$$A^c = E \backslash A.$$

Отсюда приходим к равенствам

$$\lambda(A_1) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1 \cap A_2^c), \quad \lambda(A_2) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1^c \cap A_2),$$
$$\lambda(A_1 \cup A_2) = \lambda(A_1 \cap A_2) + \lambda(A_1^c \cap A_2) + \lambda(A_1 \cap A_2^c). \boxtimes$$

Из (5.6)–(5.10) вытекает оценка снизу

$$m'(B) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon. \tag{5.11}$$

Теперь мы воспользуемся следующим вложением множеств:

$$A \vartriangle B \subset (A_1 \vartriangle B_1) \cup (A_2 \vartriangle B_2).$$

Из (5.2) и (5.11) вытекает следующая цепочка соотношений:

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(B) - \mu^*(A \vartriangle B) = m'(B) - \mu^*(A \vartriangle B) \geqslant$$
$$\geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 4\varepsilon - \mu^*(A \vartriangle B) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2) - 6\varepsilon. \tag{5.12}$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ приходим к выводу, что

$$\mu^*(A) \geqslant \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2). \tag{5.13}$$

Обратное неравенство очевидно (полуаддитивность внешней меры), и поэтому приходим к равенству

$$\mu^*(A) = \mu^*(A_1) + \mu^*(A_2).$$

Теорема доказана.

§ 6. Счетная аддитивность измеримых множеств.

Сначала докажем, что счетное объединение измеримых множеств измеримо.

Теорема 4. *Счетное объединение и счетное пересечение измеримых по Лебегу множеств являются измеримыми множествами.*

Доказательство.

Докажем измеримость счетного объединения измеримых множеств. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ — это семейство измеримых множеств и пусть

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n.$$

Заметим, что без ограничения общности можно считать множества A_n попарно непересекающимися.

$\square$ Действительно, достаточно рассмотреть следующие множества:

$$A_n' = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Очевидно, что $A_{n_1}' \cap A_{n_2}' = \varnothing$ при $n_1 \neq n_2$ и, кроме того,

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'. \quad \boxtimes.$$

В силу предыдущей теоремы имеет место цепочка выражений:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n'\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n') \leqslant \mu(A). \tag{6.1}$$

Поэтому ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n')$$

сходится. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \mu(A_n') < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.2}$$

С другой стороны, измеримо множество

$$C = \bigcup_{n=1}^{N} A_n'.$$

Стало быть, для $\varepsilon > 0$ найдется такое элементарное множество B, что

$$\mu^*(C \vartriangle B) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.3}$$

Заметим, что имеет место вложение

$$A \vartriangle B \subset (C \vartriangle B) \cup \bigcup_{n=N+1}^{+\infty} A_n'. \tag{6.4}$$

Стало быть, из (6.1)–(6.4) приходим к неравенству

$$\mu^*(A \vartriangle B) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Наконец, мы можем доказать важный результат *о σ–аддитивности измеримых множеств.*

Теорема 5. *Пусть $\{A_n\}$ — это счетная система измеримых по Лебегу и попарно непересекающихся множеств, тогда*

$$\mu(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n), \quad \text{где} \quad A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n. \tag{6.5}$$

Доказательство.

Действительно,

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n \subset A$$

и, значит,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leqslant \mu(A) \Rightarrow \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n) \leqslant \mu(A).$$

Переходя к пределу при $N \to +\infty$, мы получим, что

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n) \leqslant \mu(A).$$

Обратное неравенство непосредственно следует из уже доказанной σ-полуаддитивности внешней меры.

Теорема доказана.