

§4. Разностные схемы для одномерного уравнения колебаний

4.1 Постановка задачи. Разностная схема "крест"

Рассмотрим задачу для уравнения колебаний на отрезке с краевыми условиями 1-го рода (задачу Дирихле)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

начальные условия

$$u(x, 0) = \mu_1(x), \quad u_t(x, 0) = \mu_2(x), \quad t = 0, \quad x \in [0, l] \quad (17)$$

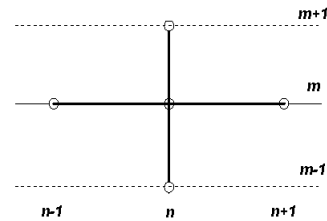
краевые условия 1-го рода

$$u(0, t) = \mu_3(t) \equiv 0; \quad u(l, t) = \mu_4(t) \equiv 0, \quad t \geq 0$$

Введём обозначения

$$y = y_n^m; \quad \hat{y} = y_n^{m+1}; \quad \check{y} = y_n^{m-1};$$

и, используя метод разностной аппроксимации, построим схему "крест" для одномерного уравнения теплопроводности.



Разностная аппроксимация самого уравнения:

$$\frac{1}{\tau^2} (\hat{y} - 2y + \check{y}) = \frac{a^2}{h^2} (y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}) + \varphi_n^m. \quad (18.1)$$

При аппроксимации правой части мы использовали метод *неопределенных коэффициентов*.

Начальное условие для функции $u(x)$ аппроксимируется точно

$$y(x_n, 0) = y_n^0 = \chi_{1n} = \mu_1(x_n) \Leftrightarrow \eta_1 \equiv 0.$$

Аппроксимация краевых условий также не вносит дополнительных погрешностей $\eta_3 \equiv 0$ и $\eta_4 \equiv 0$

$$y_0^m = \chi_3^m = \mu_3(t_m) = 0; \quad y_N^m = \chi_4^m = \mu_4(t_m) = 0.$$

При аппроксимации начального условия для производной

$$y_t(x_n, 0) = \frac{y_n^1 - y_n^0}{\tau} = \chi_{2n}$$

порядок аппроксимации зависит от способа построения сеточной функции χ_2 . Простейшая аппроксимация

$$\chi_{2n} = \mu_2(x_n) \Rightarrow \eta_2 \equiv O(\tau).$$

Если использовать само уравнение, то можно получить более аккуратную аппроксимацию начального условия

$$\frac{y_n^1 - y_n^0}{\tau} \Rightarrow \frac{u(x_n, \tau) - u(x_n, 0)}{\tau} = u'_t(x_n, 0) + \frac{\tau}{2} u''_{tt}(x_n, 0) + O(\tau^2)$$

Допустим:

$$u_{tt}(x_n, 0) = a^2 u_{xx}(x_n, 0) + f(x_n, 0) = a^2 \mu_{1xx}(x_n) + f_n^0.$$

При этом можно использовать аппроксимацию порядка $O(h^2)$ для $\mu_{1xx}(x_n)$. Таким образом

$$\frac{y_n^1 - y_n^0}{\tau} = \mu_2(x_n) + \frac{\tau}{2} (a^2 \mu_{1xx}(x_n, 0) + f_n^0); \quad \eta_2 = O(\tau^2).$$

Теперь запишем разностную схему для исходной задачи (17)

$$\frac{\hat{y} - 2y + \check{y}}{\tau^2} = a^2 \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + \varphi_n^m$$

краевые условия

$$y_0^m = \chi_3^m = \mu_3(t_m) \equiv 0; \quad y_n^m = \chi_4^m = \mu_4(t_m) \equiv 0 \quad (18)$$

начальные условия

$$y_n^0 = \chi_1(x_n) = \mu_1(x_n)$$

$$\frac{y_n^1 - y_n^0}{\tau} = \chi_2(x_n) = \begin{cases} \mu_2(x_n) & \Rightarrow \eta_2 = O(\tau) \\ \mu_2(x_n) + \frac{\tau}{2} (a^2 \mu_{1xx}(x_n) + f(x_n, 0)) & \Rightarrow \eta_2 = O(\tau^2). \end{cases}$$

Это явная схема относительно $\hat{y} \equiv y_n^{m+1}$. После того, как найдено $\{y_n^1\}$ из начального условия далее расчётные формулы просты.

Задача 1^о: Получить расчётные формулы для \hat{y} .

4.2 Порядок аппроксимации разностной схемы (18)

Сам принцип построения разностной схемы (18) позволяет утверждать, что:

- 1) $\varphi_n^m = f(x_n, t_m)$ — необходимое условие для аппроксимации;
- 2) порядок аппроксимации (18.1) есть $O(\tau^2 + h^2)$ в силу симметрии полученных разностных формул;
- 3) с учетом (18.2) \Rightarrow общий порядок аппроксимации схемы $O(\tau^2 + h^2)$.

Задача 2^о: Подтвердить перечисленные пункты.

4.3 Устойчивость разностной схемы (18)

Для доказательства устойчивости схемы (18) используем *метод разделения переменных* (поскольку коэффициенты схемы постоянны или их можно "заморозить" на данном временном слое) или *метод гармоник*. Этим методом доказываемость устойчивости разностной схемы в сеточном аналоге \mathcal{L}_2 ("в среднем").

На каждом временном слое сеточная функция по $\{x_n\}$ может быть разложена по собственным сеточным функциям сеточного оператора Лапласа $\Lambda_{\bar{x}x}$ это "косинусы" и "синусы" от $(\frac{\pi k}{l}x_n)$ для k -ой функции. Поведение гармоник на различных слоях по t характеризуется множителями роста гармоник ρ_k , т.е. рассматривается устойчивость решения вида

$$y_n^m = y(x_n, t_m) = (\rho_k)^m e^{ikx_n}, \quad k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$$

Имеет место теорема:

Теорема 5. *Двуслойная разностная схема с постоянными коэффициентами устойчива в среднем по начальным данным, если $\forall k$ (т.е. для любой гармоники) множитель роста удовлетворяет условию*

$$|\rho_k| \leq 1 + C\tau; \quad C \geq 0 \quad - \text{const.} \quad (*)$$

Ограничимся замечаниями:

- 1) Фактически $\text{const } C \geq 0$ не должна быть очень большой. На практике условие (*) проверяют для $C = 0$, т.е. $|\rho_k| \leq 1$.
- 2) Условие (*) в некотором смысле и необходимо, т.е. если существует гармоника k_0 для которой (*) не выполняется, то схема неустойчива.

Теперь вернемся к нашей задаче (18). Пусть $\varphi_n^m \equiv 0$; $y_n^m = e^{ikx_n}$ — начнем с этого слоя. Тогда

$$\hat{y} = \rho_k e^{ikx_n} = \rho_k y; \quad \check{y} \Rightarrow y = \rho_k \check{y}.$$

Однородное уравнение (18.1) даёт

$$\left(\rho_k - 2 + \frac{1}{\rho_k}\right) = \underbrace{\frac{\tau^2 a^2}{h^2}}_{\gamma^2} (e^{ikh} - 2 + e^{-ikh}) = \gamma^2 (2 \cos kh - 2) = -4\gamma^2 \sin^2 \frac{kh}{2}.$$

Множители роста k -ой гармоники ρ_k удовлетворяют уравнению

$$\rho_k^2 + 2\rho_k \left(1 - 2\gamma^2 \sin^2 \frac{kh}{2}\right) + 1 = 0. \quad (**)$$

По теореме Виетта — $(\rho_k)_1 (\rho_k)_2 = 1$ и требование устойчивости $|(\rho_k)_{1,2}| \leq 1$ выполнено, если только

$$\left|(\rho_k)_{1,2}\right| = 1.$$

Значит $(\rho_k)_1$ и $(\rho_k)_2$ — комплексно-сопряженные числа. Это в свою очередь возможно лишь при отрицательном дискриминанте уравнения (**): $D < 0$.

Итак

$$\left(1 - 2\gamma^2 \sin^2 \frac{kh}{2}\right)^2 - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left|1 - 2\gamma^2 \sin^2 \frac{kh}{2}\right| < 1.$$

Это условие относительно γ (точнее τ и h) и оно заведомо верно $\forall k$, если $\gamma^2 < 1$, т.е.

$$\frac{\tau a}{h} < 1 \quad \text{— условие Куранта.} \quad (19)$$

Замечания:

- 1) Схема "крест" устойчива в среднем по начальным данным при дополнительном условии $\tau a/h < 1$.
- 2) При условии (19) схема "крест" устойчива по правой части;
- 3) При условии (19) схема "крест" устойчива по начальным данным и правой части в равномерной сеточной норме (в C).

4.4 Сходимость схемы "крест"

Установленный нами порядок аппроксимации и устойчивость схемы (18) позволяет утверждать наличие сходимости схемы (в соответствующей метрике) с точностью не ниже порядка аппроксимации. Итак

$$\|z\| = \|y - u\| = \begin{cases} O(\tau + h^2) \\ O(\tau^2 + h^2) \end{cases} \quad \text{при} \quad \frac{\tau a}{h} < 1 \Leftrightarrow \tau < \frac{h}{a}.$$

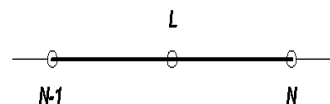
Сходимость указанных порядков возможна лишь для решений, обладающих достаточной гладкостью, чтобы обеспечить аппроксимацию этих порядков.

Достаточно

$$u(x, t) \in C^{(4)}[0, l] \times C^{(4)}[0, T].$$

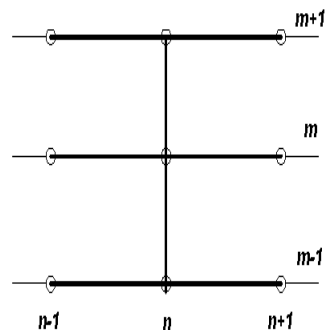
Замечания к § 4:

- 1) При аппроксимации краевых условий 2-го рода, например $u_x(l, t) = \mu_4(t)$, удобно сетку по x строить так, чтобы точка $x = l$ оказалась бы между узлами сетки, тогда



$$\frac{y_N^m - y_{N-1}^m}{h} = \mu_4(t_m) \Rightarrow \eta_4 = O(h^2).$$

- 2) Не представляет труда построить для одномерного уравнения колебаний неявную 9-ти точечную схему с весами.



В шаблоне использованы три временных слоя. Основное уравнение схемы

$$\frac{1}{\tau^2} (\hat{y} - 2y + \check{y}) = a^2 \Lambda_{\bar{x}\bar{x}} [\sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma)y + \sigma \check{y}] + \varphi_n^m,$$

где $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$.

Задача 3.

- 1) Установить порядок аппроксимации такой схемы.
- 2) Показать, что при $\frac{1}{4} \leq \sigma \leq \frac{1}{2}$ схема безусловно устойчива в \mathcal{L}_2 по начальным данным.

§5. Многомерные разностные схемы для уравнения теплопроводности

Рассмотрим задачу о распределении тепла в прямоугольной области:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = a^2 (u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2}) + f(x_1, x_2, t), \quad \begin{array}{l} 0 < x_1 < l_1 \\ 0 < x_2 < l_2 \\ 0 < t \end{array} \\ u|_{\Gamma} = \mu_{\Gamma}(t) \text{ (задача Дирихле)} \\ u|_{t=0} = \mu(x_1, x_2) \end{array} \right. \quad (20)$$

Будем предполагать, что задача (20) корректна и входные данные обеспечивают нужную гладкость решения.

5.1 Разностная схема

Обобщим на задачу (20) схемы §3. Рассмотрим в $\bar{\mathcal{D}}$ равномерную сетку:

$$\bar{\omega}_{h_1, h_2, \tau} = \left\{ \begin{array}{l} x_{1n} = nh_1; \quad n = \overline{1, N}; \quad h_1 = \frac{l_1}{N} \\ (x_{1n}, x_{2k}, t_m) : \quad x_{2k} = kh_2; \quad k = \overline{1, K}; \quad h_2 = \frac{l_2}{K} \\ t_m = m\tau; \quad m = \overline{1, M}; \quad \tau = \frac{T}{M} \end{array} \right\}.$$

Граничные условия аппроксимируются в этом случае точно:

$$\chi_{\Gamma}^m = \mu_{\Gamma}(t_m); \quad \eta_{\Gamma} = 0; \quad \begin{array}{l} \text{на каждой} \\ \text{стороне прямоуголь-} \\ \text{ника,} \end{array}$$

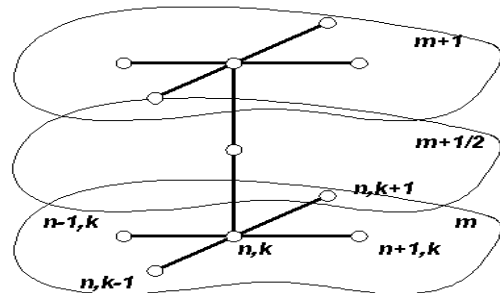
поскольку точки сетки естественным образом задают границу области $\bar{\mathcal{D}}$. (Дискуссию по этому вопросу мы исключим).

Пусть $y_{n,k}^m = y$; $\hat{y} = y_{n,k}^{m+1}$. Составим двуслойную схему с весами. Аппроксимируем оператор Лапласа $\Delta_2 \Rightarrow$

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2, \quad \text{где}$$

$$\Lambda_1 y = \Lambda_{\bar{x}_1 x_1} y = \frac{1}{h_1^2} (y_{n+1,k} - 2y_{n,k} + y_{n-1,k})$$

$$\Lambda_2 y = \Lambda_{\bar{x}_2 x_2} y = \frac{1}{h_2^2} (y_{n,k+1} - 2y_{n,k} + y_{n,k-1}).$$



Эти операторы аппроксимируют $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ и $\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ со вторым порядком по пространственным переменным. Сеточный оператор $(\Lambda_1 + \Lambda_2)$ аппроксимирует оператор Лапласа

Δu в узле (n, k) с невязкой $O(h_1^2 + h_2^2)$.

Тогда основное уравнение задачи (20) аппроксимируется разностным уравнением

$$\frac{1}{\tau} (\hat{y}_{n,k} - y_{n,k}) = a^2 (\Lambda_1 + \Lambda_2) [\sigma \hat{y}_{n,k} + (1 - \sigma) y_{n,k}] + \varphi_{n,k}^m \quad (21.1)$$

Задача 4.

1) Установить порядок аппроксимации для уравнения (21.1)

2) Показать, что $\varphi_{n,k}^m = f(x_{1n}, x_{2k}, t_{m+\frac{1}{2}}) = \bar{f}_{n,k}$.

3) Показать, что

при $\sigma = \frac{1}{2}$ невязка $\psi = O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2)$

при $\sigma \neq \frac{1}{2}$ невязка $\psi = O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$.

Задача 5.

1) Методом разделения переменных доказать устойчивость в \mathcal{L}_2 схемы (21) по начальным условиям при

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2}\right)^{-1}}{4\tau a^2}. \quad (22)$$

2) Получить условие устойчивости для явной схемы $\sigma = 0$.

Существенный недостаток схемы (21) в *многомерном* случае связан с тем, что как чисто явная схема $\sigma = 0$, так и неявная $\sigma \neq 0$ схемы приводят к неэффективным численным алгоритмам для построения решения на слое T . Если из соображений аппроксимации $h_1 \sim h_2$; $N \sim K$, то оценка числа арифметических действий для явной $\sigma = 0$ схемы для построения решения на последнем слое T есть $O(N^4)$. Действительно, для перехода на следующий временной слой решается явная система уравнений с числом неизвестных $O(NK) \sim O(N^2)$. При этом требования устойчивости схемы ограничивают временной шаг $\tau \sim \left(\frac{1}{h^2}\right)^{-1} \sim h^2 \sim N^{-2}$. Что и приводит к общей оценке числа арифметических действий $O(N^4)$.

Для неявной схем $\sigma \neq 0$ положение ещё хуже. Ограничиваясь абсолютно устойчивым вариантом схем при $\sigma \geq \frac{1}{2}$, на каждом временном слое приходится решать СЛАУ с N^2 уравнений при ширине ленты порядка $O(2N)$. Метод исключения Гаусса требует $O(N^6)$ с учётом ленточной структуры матрицы — $O(N^4)$ действий. Требование аппроксимации даёт $O(N)$ шагов по времени. Итого — $O(N^5)$! Неявная схема менее выгодна в этом случае!

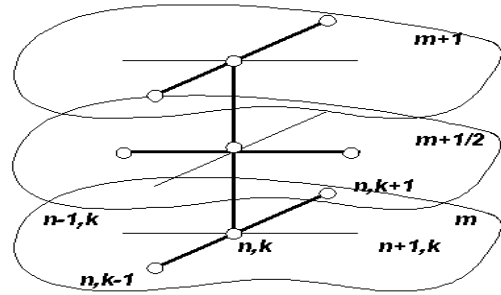
Поэтому предпочтение отдают абсолютно устойчивым ($\tau \sim h$), экономичным разностным схемам, в которых при переходе на очередной временной слой совершается всего $O(N^2)$ действий.

§6. Продольно-поперечная разностная схема для уравнения теплопроводности. Экономичные разностные схемы

Введем промежуточный по t слой $(m + \frac{1}{2})$ и рассмотрим разностную схему

$$\frac{\bar{y}_{n,k} - y_{n,k}}{\tau/2} = a^2 \Lambda_1 \bar{y}_{n,k} + a^2 \Lambda_2 y_{n,k} + \bar{f}_{n,k} \quad (23)$$

$$\frac{\hat{y}_{n,k} - \bar{y}_{n,k}}{\tau/2} = a^2 \Lambda_1 \bar{y} + a^2 \Lambda_2 \hat{y} + \bar{f}_{n,k}.$$



Обсудим построение решения уравнения (23) на $(m + 1)$ слое:

1) Уравнение (23.1) позволяет найти $\bar{y}_{n,k}$ по неявной схеме относительно x_1 и по явной схеме относительно $x_2 \Rightarrow$ Решается система с 3-х диагональная матрицей относительно переменной x_1 эффективным методом прогонки по x_1 при каждом k (k - раз прогонка с $O(N)$ действий $\Rightarrow O(NK)$ действий).

2) Уравнение (23.2) позволяет найти $\hat{y}_{n,k}$ по неявной схеме относительно x_2 и по явной схеме относительно $x_1 \Rightarrow$ прогонка по x_2 при каждом $n \Rightarrow O(NK)$ действия \Rightarrow итого $O(2NK) \sim O(N^2)$ действия.

3) Диагональные коэффициенты в соответствующих матрицах на каждом шаге преобладают — тем самым решение существует, единственно и вычисления по формулам прогонки устойчивы.

4) Общее число действий при переходе на $(m + 1)$ -ый временной слой $O(30N^2)$ действий.

Другие достоинства схемы:

6.1 Устойчивость продольно-поперечной схемы

Воспользуемся методом гармоник. Рассмотрим

$$y_{n,k} = \exp(ix_{1n}p + ix_{2k}q); \quad \bar{y} = p'_{p,q} y; \quad \hat{y} = p''_{p,q} \bar{y}$$

(свой множители роста на каждом полуслое). Тогда (23.1):

$$p'_{p,q} - 1 = \frac{\tau a^2}{2h_1^2} \left(-4 \sin^2 \frac{ph_1}{2} \right) p'_{p,q} + \frac{\tau a^2}{2h_2^2} \left(-4 \sin^2 \frac{qh_2}{2} \right), \quad \text{т.е.}$$

$$\text{Аналогично} \left. \begin{aligned} p'_{p,q} &= \frac{1 - \frac{2\tau a^2}{h_2^2} \sin^2 \frac{qh_2}{2}}{1 + \frac{2\tau a^2}{h_1^2} \sin^2 \frac{ph_1}{2}} \\ p''_{p,q} &= \frac{1 - \frac{2\tau a^2}{h_1^2} \sin^2 \frac{ph_1}{2}}{1 + \frac{2\tau a^2}{h_2^2} \sin^2 \frac{qh_2}{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |p_{pq}| = |p'_{p,q} p''_{p,q}| \leq 1$$

всегда! $\forall p$ и q . Таким образом схема (23) безусловно (абсолютно) устойчива в \mathcal{L}_2 по начальным данным (и по правой части тоже).

Для рассмотренной схемы имеет место абсолютная устойчивость в C по начальным условиям и по правой части.

Осталось установить аппроксимацию.

6.2 Аппроксимация продольно-поперечной схемы

Исключим из (23) слой $\bar{y}_{n,k}$. Для этого вычтем уравнения (1)-(2), найдём:

$$2 \frac{\bar{y}_{nk}}{\tau/2} - \frac{\hat{y}_{nk} + y_{nk}}{\tau/2} = -a^2 \Lambda_2 (\hat{y} - y), \quad \text{т.е.}$$

$$\bar{y}_{nk} = \frac{\hat{y}_{nk} + y}{2} - \frac{\tau a^2}{4} \Lambda_2 (\hat{y} - y); \quad (*)$$

Складывая уравнения (1) - (2), найдём:

$$\frac{\hat{y}_{nk} - y_{nk}}{\tau/2} = a^2 \Lambda_1 (2\bar{y}_{nk}) + a^2 \Lambda_2 (\hat{y}_{nk} + y_{nk}) + 2\bar{f}_{nk}.$$

Откуда, с учетом (*), получим

$$\begin{aligned} \frac{\hat{y}_{nk} - y_{nk}}{\tau} &= a^2 \Lambda_1 \left(\frac{\hat{y}_{nk} + y}{2} \right) - \frac{\tau a^2}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 (\hat{y} - y) + a^2 \Lambda_2 \frac{\hat{y}_{nk} + y_{nk}}{2} + \bar{f}_{nk} = \\ &= a^2 (\Lambda_1 + \Lambda_2) \frac{\hat{y}_{nk} + y_{nk}}{2} - \underbrace{\frac{\tau a^2}{4} \Lambda_1 \Lambda_2 (\hat{y} - y)}_{O(\tau^2)} + \bar{f}_{nk}. \end{aligned}$$

Итак, это почти симметричная схема с $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{1}{2}$, тем самым — схема обладает аппроксимацией при условии $\bar{f}_{nk} = f \left(x_{1n}, x_{2n}, t_{m+\frac{1}{2}} \right)$ и порядок аппроксимации

$$\psi = O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2).$$

Схема (23) безусловно устойчива и обладает повышенной аппроксимацией следовательно она сходится в указанной прямоугольной области на равномерной сетке и обладает точностью не хуже, чем

$$\|y - u\| = O(\tau^2 + h_1^2 + h_2^2).$$

Замечания:

1) Схема обладает той же сходимостью в C .

2) Для обеспечения указанного порядка точности разностной схемы требуется, чтобы решения исходной задачи обладали гладкостью не хуже, чем

$$u(x_1, x_2, t) \in C^{(5)}([0; l_1] \times [0; l_2]) \cup C^{(5)}[0; T].$$

Вместо заключения

Рассмотренный нами лекционный материал исчерпывает предложенную Вашему вниманию программу лекционного курса. Хотя при этом мы лишь подошли ко многим наиболее интересным и содержательным с прикладной точки зрения вопросам. Но, позволю себе напомнить, что "... достаточно иллюзорной представляется попытка изложить "во всей полноте и строгости" курс численных методов, поэтому основная цель лекционного курса преследовала задачу собрать и изложить минимальный материал достаточный для дальнейшей самостоятельной работы в области разумного применения и создания новых численных методов."