Экзаменационные вопросы по курсу

Численные Методы (2-ой поток).

§1 Основные понятия вычислительной математики.

Актуальность и область приложения, понятие численного эксперимента. Общая задача вычисления, пример некорректной постановки. Методология численного решения, требования к вычислительной задаче, дискретная аппроксимация. Оценка эффективности численного метода, основные виды погрешностей, критерий корректности расчета.

§2 Интерполяция и приближение функций.

Постановка задачи интерполяции, определение линейной интерполянты, чебышевская система функций. Полиномиальная интерполяция, доказательство существования и единственности. Базис Лагранжа и доказательство его единственности, интерполяционный полином $Ln(x)$ и оценка его эффективности. Разделенные разности и их свойства, построение многочлена $Pn(x)$, формула Ньютона и ее экономичность. Погрешность полиномиальной интерполяции: вывод формулы и практические рекомендации. Актуальность сплайн-интерполяции, определение сплайна p-того порядка, его вид в линейном случае. Вид и необходимые условия построения кубического сплайна. Постановка задачи среднеквадратичной аппроксимации обобщенным полиномом. Доказательство существования и единственности наилучшего приближения. Вид наилучшей среднеквадратичной аппроксиманты, условие ее сходимости.

§3 Численное интегрирование и дифференцирование.

Задача интегрирования, доказательство существования решения в квадратурах. Степень и погрешность квадратурной формулы, их определение и связь. Веса Ньютона - Котесса. Квадратурные формулы Ньютона - Котесса, свойства коэффициентов Котесса. Формула трапеций, оценка степени и погрешности, геометрическая интерпретация. Формула парабол, оценка степени и погрешности, геометрическая интерпретация. Составные квадратурные формулы, их актуальность, выбор шага по заданной точности интегрирования. Общая формула трапеций, ее вывод и оценка погрешности. Метод Рунге повышения точности расчета. Применение метода Рунге в общей формуле трапеций. Постановка задачи численного дифференцирования, связь интерполяционной и разностной производных. Дифференцирование на основе полиномов $L_2(x)$. Оценка погрешности численного дифференцирования.

.

§4 Численное решение нелинейных уравнений.

Постановка задачи и основные методы ее решения. Метод дихотомии и оценка его точности. Представление метода простой итерации в решении нелинейных уравнений, его относительная погрешность. Сходимость итерационного процесса и ее порядок (скорость), понятие сжимающего отображения. Доказательство сходимости метода простой итерации. Достаточные условия сходимости и оценка ее скорости. Метод релаксации, достаточные условия и скорость его сходимости, выбор итерационного параметра. Метод касательных, достаточные условия и скорость его сходимости, геометрическая интерпретация. Метод секущих, достаточные условия и скорость его сходимости, геометрическая интерпретация. Обобщение метода простой итерации на системы нелинейных уравнений. Простейший одношаговый метод решения систем.

§5 Численные методы линейной алгебры.

Постановка задачи решения СЛАУ, классификация методов. СЛАУ как операторное уравнение, виды и согласование норм. Устойчивость формального решения, связь погрешности решения с обусловленностью матриц. Метод решения систем с треугольными матрицами. Метод исключения (Гаусса) для систем общего вида. Достаточные условия применимости метода Гаусса, суть метода исключения с выбором главного элемента. LU – разложение матриц, связь с методом Гаусса. Общая формулировка простейших итерационных методов решения СЛАУ. Достаточные условия сходимости, задача минимизации вычислений. Понятие энергетического пространства H_A, формулировка теоремы Самарского. Метод релаксации: явный вид и условия сходимости. Метод Якоби: явный вид и условия сходимости. Алгебраическая проблема поиска собственных значений и собственных векторов. Интерполяционный метод вычисление собственных значений. Нахождение собственных векторов методом обратной итерации.

§6 Разностное решение дифференциальных уравнений.

Общая постановка и классификация задач. Понятие разностной схемы (РС). Конечно-разностная аппроксимация, невязка РС на точном решении дифференциального уравнения. Устойчивость РС и ее критерий, понятие корректной схемы. Сходимость РС, определение точности схемы. Формулировка задачи Коши, общая классификация методов решения. Одношаговые методы и оценка их точности. Многоэтапные методы (схемы) Рунге-Кутта. Вычислительная схема «предиктор – корректор», достоинства методов Рунге-Кутта. Многошаговые методы Адамса-Бэшфорта (МАБ) и оценка их погрешности. Понятие явных неявных схем для МАБ, их достоинства и недостатки. Практическая реализация метода Адамса-Бэшфорта (гибридная схема).