ТЕМА 3

Собственные значения и собственные векторы вполне непрерывного самосопряженного оператора.

Основные определения и теоремы

Оператор $A^*: E \to E$, действующий в евклидовом пространстве, называется сопряженным к оператору A, если $\forall\, y_1, y_2 \in E \quad (Ay_1, y_2) = (y_1, A^* y_2)$. Если $A = A^*$, то оператор A называется самосопряженным.

Пусть линейный оператор A действует в линейном пространстве L. Число Λ называется <u>собственным значением</u> оператора A, если существует элемент $y \neq \theta$ такой, что $Ay = \Lambda y$. Элемент y называется <u>собственным вектором</u>. Множество собственных векторов, соответствующих собственному значению Λ, является подпространством пространства L.

Число $\lambda = \dfrac{1}{\Lambda}$ $(\Lambda \neq 0)$ называется <u>характеристическим</u> числом оператора A.

Теорема. Самосопряженный вполне непрерывный оператор A, действующий в бесконечномерном евклидовом пространстве, обладает собственным вектором, соответствующим собственному значению Λ: $|\Lambda| = \|A\|$. Это собственное значение является максимальным по модулю среди всех собственных значений оператора A.

Теорема, вообще говоря, не верна, если отказаться от условий самосопряженности или вполне непрерывности оператора (см. примеры в конце темы).

Элемент e называется максимальным элементом (вектором) оператора A, если $\|e\| = 1$ и $\|Ae\| = \|A\|$. Самосопряженный вполне непрерывный оператор A обладает максимальным вектором.

Если z - максимальный вектор самосопряженного оператора A, то z -собственный вектор оператора A^2, соответствующий собственному значению $\Lambda = \|A\|^2 = M^2$. Если оператор A^2 обладает собственным вектором z, соответствующим собственному значению M^2, то оператор A имеет собственный вектор, соответствующий собственному значению M или $-M$.

Теорема. Пусть ядро $K(x,s)$ оператора Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x,s)\, y(s)\, ds$ $h[a,b] \to h[a,b]$ является вещественным, симметрическим, непрерывным по совокупности переменных $(x,s) \in [a,b] \times [a,b]$, и не равно тождественно нулю. Тогда оператор Фредгольма обладает собственным значением Λ, $\Lambda \neq 0$: $Ay = \Lambda y$, $y \neq 0$, $y \in h[a,b]$.

Иногда удобнее использовать характеристические числа: $\lambda = \dfrac{1}{\Lambda}$, $\Lambda \neq 0$. Тогда в утверждении теоремы следует записать $\lambda A y = y$.

Теорема. Собственные векторы самосопряженного оператора A, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Теорема. Число собственных значений вполне непрерывного самосопряженного оператора A, удовлетворяющих условию: $\|A\| \ge |\Lambda| \ge \delta > 0$, ($\delta$ - фиксированное положительное число) конечно.

Число линейно независимых собственных векторов, соответствующих собственному значению, называется кратностью (рангом) собственного значения.

Теорема. Ненулевому собственному значению вполне непрерывного оператора A может соответствовать только конечное число линейно независимых собственных векторов. Нулевому собственному значению может отвечать как конечное, так и бесконечное число линейно независимых собственных векторов.

Теорема.

а) Множество собственных значений самосопряженного вполне непрерывного оператора A, действующего в бесконечномерном евклидовом пространстве, представляет собой: либо бесконечную последовательность, тогда $\|A\| = |\Lambda_1| \ge |\Lambda_2| \ge ... \ge |\Lambda_n| \ge ...$ - монотонно невозрастающая и ограниченная снизу нулем;
либо конечную последовательность, тогда $\|A\| = |\Lambda_1| \ge |\Lambda_2| \ge ... \ge |\Lambda_n| > \Lambda_{n+1} = 0$ (каждое собственное значение повторяется в эти неравенствах столько раз, какова его кратность).

б) Если ненулевых собственных значений бесконечно много, то $|\Lambda_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

в) Каждому собственному значению отвечает хотя бы один собственный вектор, причем можно выбрать собственные векторы так, что они образуют ортонормированную систему (собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям ортогональны, а собственные векторы, соответствующие одному и тому же собственному значению, можно ортогонализовать, используя процедуру Грама-Шмидта).

Для характеристических чисел вполне непрерывного самосопряженного оператора справедливы аналогичные результаты:
либо $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n|$ (конечная последовательность характеристических чисел);
либо $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le ...$ (бесконечная последовательность характеристических чисел). В этом случае $\lim\limits_{n \leftarrow \infty} |\lambda_n| = \infty$.

Каждому характеристическому числу λ_n можно сопоставить собственный вектор φ_n, причем векторы $\{\varphi_n\}$ образуют ортонормированную систему.

Аналогичные утверждения верны для интегрального оператора с непрерывным, симметрическим и неравным тождественно нулю ядром. В этом случае вместо слов собственные векторы говорят собственные функции интегрального оператора или собственные функции ядра $K(x,s)$.

Пусть A - вполне непрерывный самосопряженный оператор со следующей последовательностью характеристических чисел (неважно, конечной или бесконечной) : $|\lambda_1| \le |\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le ...$, которым соответствует ортонормированная последовательность собственных векторов $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n, ...$.

Теорема. Вектор y принадлежит нуль-пространству оператора A ($y \in Ker\, A$) тогда и только тогда, если $(y, \varphi_k) = 0$ $k = 1,2,...$ (φ_k - конечная или бесконечная последовательность).

Теорема Гильберта-Шмидта. Функция $f(x)$ называется истокопредставимой через ядро $K(x,s)$, если существует непрерывная функция $g(x)$ такая, что $f(x) = \int\limits_a^b K(x,s)\, g(s)\, ds$. Если функция $f(x)$ истокопредставима через симметрическое непрерывное ядро $K(x,s)$, то она может быть разложена в ряд $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k\,\varphi_k(x)$, где $f_k=(f,\varphi_k)=\int_a^b f(s)\,\varphi_k(s)\,ds$, причем этот ряд сходится абсолютно и равномерно на $[a,b]$.

Можно рассматривать оператор Фредгольма в пространстве непрерывных комплекснозначных функций $h^C[a,b]$, состоящем из комплекснозначных функций вещественной переменной x: $y(x)=u(x)+i\,v(x)\quad x\in[a,b]$, функции *u(x), v(x)* – непрерывные на *[a,b]* вещественные функции. В этом пространстве скалярное произведение вводится так: $(y_1,y_2)=\int_a^b y_1^*(x)\,y_2(x)\,dx$ (здесь * - знак комплексного сопряжения).

Теорема. Пусть интегральный оператор с непрерывным симметрическим вещественным ядром $K(x,s)$ действует в комплексном пространстве $h^C[a,b]$. Тогда этот оператор может иметь только вещественные собственные значения.

Если ядро *K(x,s)* является <u>вырожденным</u>, т.е. представимо в виде $K(x,s)=\sum_{j=1}^{n} a_j(x)b_j(s)$, где $a_1(x),...,a_n(x)$ и $b_1(s),...,b_n(s)$ - линейно независимы и непрерывны по своим аргументам на $[a,b]$, то интегральный оператор является вырожденным. В этом случае и у него всегда есть нулевое собственное значение, причем кратность его равна ∞. Отыскание других собственных значений сводится к решению эквивалентной алгебраической задачи на собственные значения и собственные векторы для некоторой матрицы

$$\Lambda c_i=\sum_{j=1} c_j \underbrace{\int_a^b a_j(x)\;b_i(x)\;dx}_{k_{ij}},\; i=1,2,...,n, \quad \text{или } K\cdot C=\Lambda\cdot C, \quad \text{где } K=\{k_{ij}\}_{i,j=1}^{n}, \quad C=\begin{pmatrix} c_1\\ \vdots \\ c_n\end{pmatrix}.$$

Собственные значения Λ_n матрицы K и, следовательно, собственные значения (и характеристические числа $\lambda_n=\dfrac{1}{\Lambda_n}$) интегрального оператора Фредгольма теперь можно найти, решив характеристическое уравнение $\det(K-\Lambda I)=0$.

Некоторые задачи на нахождение характеристических чисел и собственных функций оператора Фредгольма с непрерывным невырожденным ядром рассмотрены также в примерах к теме 7.

Примеры решения задач

Пример 3.1. Пусть M - подпространство евклидова пространства, инвариантное относительно самосопряженного оператора A. Доказать, что ортогональное дополнение $M_{\perp}$ подпространства M также инвариантно относительно оператора A.

Решение. Рассмотрим любые элементы $y \in M$ и $z \in M_{\perp}$, т.е. такие, что $(y,z)=0$. Подпространство M инвариантно относительно оператора A. Это означает, что для любого $y \in M$ элемент $Ay \in M$, т.е. $(Ay,z)=0$. Нужно доказать, что $Az \in M_{\perp}$.

Оператор A - самосопряженный, поэтому $(Ay,z)=(y,Az)=0$, т.е. элемент Az ортогонален любому $y \in M$. Следовательно $Az \in M_{\perp}$, что и требовалось доказать.

Пример 3.2. Доказать, что норма вполне непрерывного самосопряженного оператора может быть найдена по формуле $\|A\| = \sup\limits_{\|y\|=1} |(Ay,y)|$.

Решение. Обозначим $\mu = \sup\limits_{\|y\|=1} |(Ay,y)|$ и докажем, что указанная точная верхняя грань существует. Пользуясь неравенством Коши-Буняковского, получим $|(Ay,y)| \le \|Ay\| \cdot \underbrace{\|y\|}_{=1} \le \|A\| \cdot \underbrace{\|y\|}_{=1} = \|A\|$, откуда следует существование $\sup\limits_{\|y\|=1} |(Ay,y)|$ и оценка $\mu = \sup\limits_{\|y\|=1} |(Ay,y)| \le \|A\|$.

Докажем теперь, что справедливо неравенство $\mu \ge \|A\|$. Для любого элемента y норма элемента $y_0 = \dfrac{y}{\|y\|}$ равна единице. Поэтому $|(Ay_0,y_0)| \le \sup\limits_{\|y_0\|=1} |(Ay_0,y_0)| = \mu$, откуда получаем $|(Ay,y)| \le \mu \cdot \|y\|^2$. Пользуясь линейностью оператора A, свойствами скалярного произведения и равенством $(Ay,z)=(y,Az)$ (определение самосопряженного оператора), нетрудно получить $4(Ay,z) = (A(y+z),\ y+z) - (A(y-z),\ y-z)$. Из этого равенства с учетом полученной выше оценки, имеем

$$4|(Ay,z)| = |(A(y+z),\ y+z) - (A(y-z),\ y-z)| \le |(A(y+z),\ y+z)| + |(A(y-z),\ y-z)| \le$$
$$\le \mu \cdot \|y+z\|^2 + \mu \cdot \|y-z\|^2 = 2\mu \cdot (\|y\|^2 + \|z\|^2).$$

Поэтому для произвольных элементов пространства таких, что $\|y\|=1$ и $\|z\|=1$, верно $|(Ay,z)| \le \mu$. Полагая $z = \dfrac{Ay}{\|Ay\|}$, получим $\dfrac{|(Ay,Ay)|}{\|Ay\|} = \|Ay\| \le \mu$ для любых y, таких что $\|y\|=1$, откуда следует $\|A\| \le \mu$.

Итак, $\mu \le \|A\| \le \mu$, поэтому $\|A\| = \mu = \sup\limits_{\|y\|=1} |(Ay,y)|$, что и требовалось.

Замечание. Обратившись к теореме о существовании собственного вектора вполне непрерывного самосопряженного оператора, можно заключить, что если в рассмотренной задаче оператор A - вполне непрерывный, то максимальное по модулю собственное значение его удовлетворяет соотношению $|\Lambda| = \|A\| = \sup\limits_{\|y\|=1} |(Ay,y)|$

Пример 3.3. Рассмотрим оператор умножения $Ay = (1-x)\cdot y(x)$, действующий в пространстве $h[0,1]$.

а) Доказать, что указанный оператор является ограниченным, и найти его норму.

б) Доказать, что у него нет максимального вектора.

Решение.

а) Напомним, что нормой линейного оператора называется число $\|A\| = \sup\limits_{\|y\|=1}\|Ay\|$.

Рассмотрим в пространстве $h[0,1]$ множество функций $y(x)$: $\|y\|_{h[0,1]} = \sqrt{\int\limits_0^1 y^2(x)\,dx} = 1$.

Тогда $\|Ay\|_{h[0,1]} = \sqrt{\int\limits_0^1 (1-x)^2 y^2(x)\,dx} \le \sqrt{\int\limits_0^1 y^2(x)\,dx} = 1$, поэтому оператор ограничен и для нормы оператора получаем оценку $\|A\| \le 1$.

Докажем, что норма рассматриваемого оператора равна 1. Для этого достаточно построить последовательность $y_n(x)$ непрерывных функций такую, что $\|Ay_n\|_{h[0,1]} \underset{n\to\infty}{\to} 1$.

Пусть $$y_n(x) = \begin{cases} \sqrt{3n}\cdot(1-nx), & 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ 0\ , & x \ge \dfrac{1}{n} \end{cases}.$$

Непосредственным вычислением легко проверить, что $\forall n$ $\|y_n\|_{h[0,1]} = 1$ и

$$\|Ay_n\|^2_{h[0,1]} = 3n\cdot\int\limits_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2\cdot(1-x)^2\,dx = 1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{10n^2} \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

Поэтому $\|A\| = 1$.

б) Докажем, что у рассматриваемого оператора в пространстве $h[0,1]$ нет максимального вектора. Напомним, что элемент y: $\|y\| = 1$ называется максимальным вектором ограниченного оператора, если $\|Ay\| = \|A\|$. Предположим, что $y_0(x)$: $\|y_0\| = 1$ является максимальным вектором рассматриваемого оператора, тогда $\|y_0\|^2 = \int\limits_0^1 y_0^2(x)\,dx = 1$, $\|Ay_0\|^2 = \int\limits_0^1 (1-x)^2\cdot y_0^2(x)\,dx = \|A\|^2 = 1$. Вычитая последние два равенства, получим $\int\limits_0^1 \underbrace{[1-(1-x)^2]}_{>0}\cdot y_0^2(x)\,dx = 0$, что невозможно.

Таким образом, сделанное предположение неверно, т.е. максимального вектора у оператора нет.

Замечание. Рассмотренный оператор умножения в пространстве $h[0,1]$ является самосопряженным, но не вполне непрерывным, поэтому теорема о существовании максимального вектора в данном случае неприменима.

Пример 3.4. Пусть $K^{(2)}(x,s) = K(x,s) - \dfrac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}$, где φ_1 - нормированная собственная функция оператора Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x,s)\ y(s)\ ds$ с непрерывным симметрическим ядром, отвечающая характеристическому числу λ_1. Рассмотрим интегральный оператор $A^{(2)}$ с ядром $K^{(2)}(x,s)$: $A^{(2)}y = \int_a^b K^{(2)}(x,s)\, y(s)\, ds$.

Доказать, что:

а) все собственные функции $\varphi_2,...,\varphi_n,...$ оператора A, отвечающие характеристическим числам $|\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le ...$, являются также собственными функциями оператора $A^{(2)}$, соответствующими тем же характеристическим числам $|\lambda_2| \le ... \le |\lambda_n| \le ...$;

б) оператор $A^{(2)}$ не имеет других характеристических чисел, отличных от λ_k, $k = 2,3,4,...$;

в) функция φ_1 также является собственной функцией оператора $A^{(2)}$, соответствующей нулевому собственному значению ядра $K^{(2)}(x,s)$.

Решение. Так как ядро оператора A непрерывно и симметрично, то и ядро $K^{(2)}(x,s)$ удовлетворяет тем же условиям, т.е. оператор $A^{(2)}$ является вполне непрерывным и самосопряженным. Заметим также, что действие оператора $A^{(2)}$ можно представить в следующем виде: $A^{(2)}y = \int_a^b [K(x,s) - \dfrac{\varphi_1(x)\varphi_1(s)}{\lambda_1}]\, y(s)\, ds = A\, y - \dfrac{\varphi_1}{\lambda_1}(\varphi_1, y)$.

Напомним, что собственные функции самосопряженного оператора образуют ортогональную систему, и $A\varphi_k = \int_a^b K(x,s)\,\varphi_k(s)\, ds = \dfrac{1}{\lambda_k}\varphi_k$. Будем считать также, что $\|\varphi_k\|^2 = \int_a^b \varphi_k^2(x)\, dx = 1$.

а) Для любой собственной функции φ_k, $k = 2,3,4,...$ оператора A имеем

$$A^{(2)}\varphi_k = \int_a^b K^{(2)}(x,s)\,\varphi_k(s)\, ds = \int_a^b K(x,s)\,\varphi_k(s)\, ds - \int_a^b \frac{\varphi_1(x)\ \varphi_1(s)}{\lambda_1}\ \varphi_k(s)\, ds = \frac{1}{\lambda_k}\ \varphi_k(x) - 0 = \frac{1}{\lambda_k}\ \varphi_k(x),$$

т.е. φ_k является собственной функцией оператора $A^{(2)}$, соответствующей характеристическому числу λ_k.

б) Пусть $\tilde\lambda$ - характеристическое число оператора $A^{(2)}$, а $\tilde\varphi$- отвечающая ему собственная функция, т.е. $A^{(2)}\tilde\varphi = \dfrac{1}{\tilde\lambda}\tilde\varphi$. Докажем, что $\tilde\lambda$ является также характеристическим числом оператора A, т.е. совпадает с одним из λ_k, $k = 2,3,4,...$.

Действительно

$$\tilde\varphi = \tilde\lambda A^{(2)}\tilde\varphi = \tilde\lambda\int_a^b K^{(2)}(x,s)\,\tilde\varphi(s)\, ds = \tilde\lambda\int_a^b K(x,s)\,\tilde\varphi(s)\, ds - \tilde\lambda\int_a^b \frac{\varphi_1(x)\ \varphi_1(s)}{\lambda_1}\ \tilde\varphi(s)\, ds = \tilde\lambda A\,\tilde\varphi - 0 = \tilde\lambda A\,\tilde\varphi,$$

т.е. $\tilde\lambda$ является характеристическим числом оператора A, что и требовалось. Здесь было использовано неочевидное (так как φ_k и $\tilde\varphi$ - собственные функции различных операторов!!!) соотношение

$$\int_a^b \varphi_1(s)\,\tilde\varphi(s)\,ds = (\varphi_1,\tilde\varphi) = (\varphi_1,\tilde\lambda A^{(2)}\tilde\varphi) = \tilde\lambda\,(\varphi_1, A^{(2)}\tilde\varphi) = (\text{т.к. } A^{(2)} - \text{самосопряженный}) = \tilde\lambda\,(A^{(2)}\varphi_1,\tilde\varphi) =$$

$$= \tilde\lambda\left[(A\varphi_1,\tilde\varphi) - \frac{(\varphi_1,\tilde\varphi)}{\lambda_1}\underbrace{(\varphi_1,\varphi_1)}_{=1}\right] = \tilde\lambda\left[\left(\frac{\varphi_1}{\lambda_1},\tilde\varphi\right) - \frac{(\varphi_1,\tilde\varphi)}{\lambda_1}\right] = 0.$$

в) $A^{(2)}\varphi_1 = A\varphi_1 - \dfrac{\varphi_1}{\lambda_1}(\varphi_1,\varphi_1) = \dfrac{1}{\lambda_1}\,\varphi_1(x) - \dfrac{1}{\lambda_1}\,\varphi_1(x) = 0\cdot\varphi_1(x)$, следовательно φ_1 - собственная функция оператора $A^{(2)}$, отвечающая собственному значению $\Lambda_0 = 0$.

Пример 3.5. Доказать, что оператор умножения на независимую переменную x: $Ay = x\cdot y(x)$, действующий в пространстве $h[0,1]$

а) является самосопряженным;
б) не имеет собственных значений.

Решение.

а) $(Ay,z) = \int_0^1 [x\,y(x)]\cdot z(x)\,dx = \int_0^1 y(x)\cdot[x\ z(x)]\,dx = (y,Az)$, т.е. A - самосопряженный.

б) Рассмотрим уравнение $Ay \equiv x\cdot y(x) = \lambda y(x) \ \Rightarrow\ (x-\lambda)\cdot y(x) = 0$, откуда получаем $y(x)\equiv 0$. Итак, при любом λ уравнение $Ay = \lambda y$ имеет только тривиальное решение, что и означает отсутствие собственных значений у оператора A.

Замечание. Рассматриваемый оператор не является вполне непрерывным (см. задачу 2.16), поэтому теорема о существовании собственного вектора в данном случае неприменима.

Пример 3.6. Доказать, что оператор Вольтерра $A\,y = \int_0^x y(s)\,ds$ ($x\in[0,1]$), действующий в пространстве $h[0,1]$:

а) является вполне непрерывным;
б) не имеет собственных значений.

Решение.

а) Докажем сначала, что A - вполне непрерывный оператор при действии $h[0,1]\to C[0,1]$.

Рассмотрим ограниченную последовательность $y_n\in h[0,1]$: $\|y_n\|_{h[0,1]} = \sqrt{\int_0^1 y_n^2(x)dx} \le M$, *n=1,2,...,* и последовательность $z_n(x) = Ay_n = \int_0^x y_n(s)\ ds$.

Докажем равномерную ограниченность $z_n(x)$ в пространстве $C[0,1]$. Действительно,

$$|z_n(x)| = \left|\int_0^x y_n(s)\ ds\right| = \left|\int_0^x 1\cdot y_n(s)\ ds\right| \le \sqrt{\int_0^x ds\cdot\int_0^x y_n^2(s)\ ds} \le \sqrt{\underbrace{\int_0^x ds}_{\le 1}\cdot\underbrace{\int_0^1 y_n^2(s)\ ds}_{\le M^2}} \le M$$

сразу для всех $x \in [0,1]$ и всех *n=1,2,...* , откуда следует $\| z_n \|_{C[0,1]} = \sup\limits_{x\in[0,1]} | z_n(x) | \le M$, что и требовалось.

Докажем равностепенную непрерывность последовательности $z_n(x)$. Возьмем произвольные точки $x_1, x_2 \in [0,1]$. Имеем

$$\left|z_n(x_1) - z_n(x_2)\right| = \left|\int\limits_0^{x_1} y_n(s)\,ds - \int\limits_0^{x_2} y_n(s)\,ds\right| = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} y_n(s)\,ds\right| \le \sqrt{\int\limits_{x_1}^{x_2} ds \cdot \int\limits_{x_1}^{x_2} y_n^2(s)\;\; ds} \;\le\; \sqrt{(x_2 - x_1)\cdot \underbrace{\int\limits_0^1 y_n^2(s)\,ds}_{\le M^2}}$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $0 < \delta = \dfrac{\varepsilon^2}{M^2}$. Тогда для всех $n = 1,2,3,...$

и любых $x_1, x_2 \in [0,1]$, удовлетворяющих условию $\left|x_1 - x_2\right| \le \delta = \dfrac{\varepsilon^2}{M^2}$, имеем $\left|z_n(x_1) - z_n(x_2)\right| \le \varepsilon$, т.е. последовательность $z_n(x)$ равностепенно непрерывна.

Итак, последовательность функций $z_n(x)$, непрерывных на сегменте $[0,1]$, равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Из теоремы Арцела следует, что из нее можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся при $x \in [0,1]$ к непрерывной функции. Очевидно, что этим же свойством обладает и любая подпоследовательность последовательности $z_n(x)$. Следовательно, оператор A является вполне непрерывным при действии $h[0,1] \to C[0,1]$.

Так как из равномерной сходимости следует сходимость в среднем, то та же самая подпоследовательность непрерывных функций, которая сходится равномерно к некоторой непрерывной функции, сходится и в среднем к той же функции. Поэтому оператор A является вполне непрерывным и при действии $h[0,1] \to h[0,1]$.

б) Покажем, что рассматриваемый оператор не имеет собственных значений. Рассмотрим уравнение $A\,y \equiv \int\limits_0^x y(s)\,ds = \Lambda\,y(x)$ и докажем, что при любом значении Λ оно имеет только тривиальное решение.

Если $\Lambda = 0$, то утверждение очевидно, так как в этом случае $\int\limits_0^x y(s)\,ds = 0 \cdot y(x) \equiv 0$ для всех $x \in [0,1]$ и, следовательно, $y(x) \equiv 0$.

При $\Lambda \ne 0$ уравнению $\int\limits_0^x y(s)\,ds = \Lambda\,y(x)$ удовлетворяют функции вида $y(x) = ce^{\frac{x}{\Lambda}}$, а так как $y(0) = 0$, то и в этом случае единственным решением его при любом Λ будет $y(x) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Рассматриваемый оператор не является самосопряженным. Действительно, путем интегрирования по частям легко показать, что

$$(Ay, z) = \int\limits_0^1 [\int\limits_0^x y(t)\,dt] \cdot z(x)\,dx \ne \int\limits_0^1 y(x) \cdot [\int\limits_0^x z(t)\,dt]\,dx = (y, Az)\,.$$

Поэтому теорема о существовании собственного вектора в данном случае неприменима.

Пример 3.7. Показать, что оператор Фредгольма $Ay = \int_0^{\pi} \sin x \cos s\, y(s)\, ds, \quad x \in [0, \pi]$ не имеет характеристических чисел.

Решение. Рассмотрим уравнение $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin x \cos s\, y(s)\, ds$. Требуется доказать, что ни для одного λ не существует нетривиальных решений этого уравнения.

Обозначим $C = \int_0^{\pi} \cos s\, y(s)\, ds$, тогда $y(x) = \lambda C \sin x$, и для определения C имеем $C = \int_0^{\pi} \cos s\, \underbrace{C\lambda \sin s}_{y(s)}\, ds = 0$. Следовательно, $y(x) \equiv 0$ при любом λ, т.е. характеристических чисел у исследуемого оператора нет.

Замечание. В данном случае ядро $K(x,s) = \sin x \cdot \cos s$ непрерывное, но не симметрическое, поэтому оператор является вполне непрерывным, но не самосопряженным, и теорема о существовании собственного вектора неприменима.

Пример 3.8. Найти характеристические числа и построить ортонормированные собственные функции однородного уравнения Фредгольма с непрерывным вырожденным симметрическим ядром $y(x) = \lambda \int_0^{\pi} \sin(x+s)\, y(s)\, ds$.

Решение. Ядро исследуемого оператора симметрическое и непрерывное, следовательно, оператор Фредгольма в данной задаче является вполне непрерывным и самосопряженным.

Представим ядро в виде $K(x,s) = \sin(x+s) = \sin x \cos s + \cos x \sin s$ и обозначим $\int_0^{\pi} \cos s\, y(s)\, ds = a_1$, $\int_0^{\pi} \sin s\, y(s)\, ds = a_2$. Тогда $y(x) = \lambda a_1 \sin x + \lambda a_2 \cos x$, где

$$a_1 = \int_0^{\pi} \cos s\, y(s)\, ds = \lambda \int_0^{\pi} \cos s\,(a_1 \sin s + a_2 \cos s)\, ds = \lambda \frac{\pi}{2} a_2,$$

$$a_2 = \int_0^{\pi} \sin s\, y(s)\, ds = \lambda \int_0^{\pi} \sin s\,(a_1 \sin s + a_2 \cos s)\, ds = \lambda \frac{\pi}{2} a_1.$$

Однородная система $\begin{cases} a_1 - \dfrac{\lambda\pi}{2} a_2 = 0 \\ \dfrac{\lambda\pi}{2} a_1 - a_2 = 0 \end{cases}$ имеет нетривиальные решения при условии

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\dfrac{\lambda\pi}{2} \\ -\dfrac{\lambda\pi}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \left(\frac{\lambda\pi}{2}\right)^2 = 0,$$

откуда определяем характеристические числа $\lambda_1 = \dfrac{2}{\pi}$ и $\lambda_2 = -\dfrac{2}{\pi}$.

При $\lambda_1 = \dfrac{2}{\pi}$ имеем $a_2 = a_1$, т.е. собственная функция $y_1(x) = C(\sin x + \cos x)$;

при $\lambda_2 = -\dfrac{2}{\pi}$ получаем $a_2 = -a_1$, и собственная функция $y_2(x) = C(\sin x - \cos x)$.

Так как собственные функции, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны, то искомая ортонормированная система имеет вид

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x + \cos x), \qquad \varphi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\sin x - \cos x).$$

Пример 3.9. Если для любых $x, s \in [a,b]$ имеет место равенство $K(x,s) = -K(s,x)$, то ядро $K(x,s)$ называется кососимметрическим.

Показать, что все отличные от нуля собственные значения оператора Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x,s)y(s)\,ds,\ \ x \in [a,b]$ с вещественным кососимметрическим ядром - чисто мнимые числа.

Решение. Пусть Λ - одно из собственных значений, т.е. $\int_a^b K(x,s)y(s)ds = \Lambda y(x)$, где $y(x) \not\equiv 0$ - соответствующая собственная функция (возможно, комплекснозначная). Так как ядро вещественно, то имеет место также $\int_a^b K(x,s)y^*(s)ds = \Lambda^* y^*(x)$, где знак * означает комплексное сопряжение.

Умножим второе уравнение на $y(x)$, а первое - на комплексно сопряженную функцию $y^*(x)$, и проинтегрируем по отрезку $[a,b]$. Получим:

$$\Lambda \int_a^b |\, y(x)\,|^2\, dx = \int_a^b y^*(x)dx \int_a^b K(x,s)y(s)ds,$$

$$\Lambda^* \int_a^b |\, y(x)\,|^2\, dx = \int_a^b y(x)dx \int_a^b K(x,s)y^*(s)ds = \int_a^b y^*(s)ds \int_a^b K(x,s)y(x)dx.$$

Меняя обозначения переменных интегрирования в последнем интеграле и учитывая, что $K(x,s) = -K(s,x)$ приходим к соотношению

$$\Lambda^* \int_a^b |\, y(x)\,|^2\, dx = \int_a^b y^*(x)dx \int_a^b K(s,x)y(s)ds = -\int_a^b y^*(x)dx \int_a^b K(x,s)y(s)ds.$$

Складывая первое и последнее равенства, найдем $(\Lambda + \Lambda^*)\int_a^b |\, y(x)\,|^2\, dx = 0$. Так как $y(x) \not\equiv 0$, то $\Lambda^* = -\Lambda$, т.е. либо $\Lambda = 0$, либо является чисто мнимым.

Замечание. Напомним, что все собственные значения самосопряженного оператора - вещественные числа. В рассмотренном случае интегральный оператор Фредгольма не является самосопряженным, поэтому собственные значения могут не быть вещественными (в данном примере все ненулевые собственные значения оказались чисто мнимыми).

Пример 3.10. Найти характеристические числа и собственные функции оператора Фредгольма с вырожденным кососимметрическим ядром $Ay = \int_0^1 (x-s)y(s)ds, \quad x \in [0,1]$.

Решение. Требуется найти такие λ, при которых существуют нетривиальные решения уравнения $y(x) = \lambda\int_0^1 (x-s)y(s)ds$. Обозначим $C_1 = \int_0^1 y(s)ds, \quad C_2 = \int_0^1 s\,y(s)ds$, тогда $y(x) = \lambda(C_1 x - C_2)$, и для определения C_1, C_2 получим соотношения

$$C_1 = \lambda\int_0^1 \underbrace{(C_1 s - C_2)}_{y(s)}ds = \frac{\lambda}{2}C_1 - \lambda C_2, \quad C_2 = \lambda\int_0^1 s\cdot\underbrace{(C_1 s - C_2)}_{y(s)}ds = \frac{\lambda}{3}C_1 - \frac{\lambda}{2}C_2,$$

откуда

$$\begin{cases} \left(1-\dfrac{\lambda}{2}\right)C_1 + \lambda C_2 = 0 \\ -\dfrac{\lambda}{3}C_1 + \left(1+\dfrac{\lambda}{2}\right)C_2 = 0 \end{cases}.$$

Нетривиальные решения системы существуют при условии

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\dfrac{\lambda}{2} & \lambda \\ -\dfrac{\lambda}{3} & 1+\dfrac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{12}\lambda^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = +i\,2\sqrt{3},\ \lambda_2 = -i\,2\sqrt{3}.$$

Пусть $\lambda = \lambda_1 = 2i\sqrt{3}$ тогда, полагая $C_1 = C\cdot 2\sqrt{3}$, где C - произвольная постоянная, найдем $C_2 = C\cdot(i+\sqrt{3})$ и собственные функции $y_1(x) = \lambda_1(C_1 x - C_2) = C(12i\,x - 6i + 2\sqrt{3})$.

Пусть $\lambda = \lambda_2 = -2i\sqrt{3}$ тогда, также полагая $C_1 = C\cdot 2\sqrt{3}$, найдем $C_2 = C\cdot(-i+\sqrt{3})$ и собственные функции $y_2(x) = \lambda_2(C_1 x - C_2) = C(-12i\,x + 6i + 2\sqrt{3})$.

Замечание. Если оператор несамосопряженный, то характеристические числа могут не быть действительными. В данном случае, ядро оператора $K(x,s) = x - s$ не симметрическое, и характеристические числа оказались чисто мнимыми (см. пример 3.9).

Задачи для самостоятельного решения

3.1 Пусть, $K^{(n+1)}(x,s) = K(x,s) - \sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(s)}{\lambda_i}$, где φ_k - собственные функции оператора Фредгольма $Ay = \int_a^b K(x,s)\ y(s)\ ds$ с вещественным непрерывным симметрическим ядром, отвечающие характеристическим числам λ_k, $k = 1,2,3,...,n$. Рассмотрим интегральный оператор $A^{(n+1)}$ с ядром $K^{(n+1)}(x,s)$: $A^{(n+1)}y = \int_a^b K^{(n+1)}(x,s)\,y(s)\,ds$.

Доказать, что:

а) все собственные функции φ_k, $k = n+1,...$ оператора A, отвечающие характеристическим числам $|\lambda_{n+1}| \le ... \le |\lambda_k| \le ...$, являются также собственными функциями оператора $A^{(n+1)}$, соответствующими тем же характеристическим числам $|\lambda_{n+1}| \le ... \le |\lambda_k| \le ...$;

б) оператор $A^{(n+1)}$ не имеет других характеристических чисел, отличных от λ_k, $k = n+1, \ldots$;

в) функции φ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ также являются собственными функциями оператора $A^{(n+1)}$, соответствующими нулевому собственному значению ядра $K^{(n+1)}(x,s)$.

3.2 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с непрерывным симметрическим ядром, действующий $h[a,b] \to h[a,b]$, является самосопряженным оператором.

3.3 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра с непрерывным не равным тождественно нулю ядром, действующий $h[a,b] \to h[a,b]$, не является самосопряженным оператором.

3.4 Доказать, что интегральный оператор Вольтерра $By = \int\limits_a^x K(x,s)\,y(s)\,ds$ с вещественным непрерывным ядром является вполне непрерывным при действии $h[a,b] \to C[a,b]$ и $h[a,b] \to h[a,b]$.

3.5 Пусть φ - собственный вектор самосопряженного оператора *A*, действующего в евклидовом пространстве. Доказать, что множество векторов, ортогональных φ, образуют замкнутое линейное подпространство, инвариантное относительно *A*.

3.6 Доказать, что если интегральный оператор Фредгольма с непрерывным симметрическим вещественным ядром $K(x,s)$ действует в комплексном пространстве $h^C[a,b]$ (комплексном расширении пространства $h[a,b]$), то этот оператор может иметь только вещественные собственные значения.

3.7 Доказать, что собственные векторы самосопряженного оператора A, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

3.8 Доказать, что интегральный оператор Фредгольма с ядром $K(x,s) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx \cdot \sin ns}{n^2}$, действующий в пространстве $h[0,\pi]$, является невырожденным.

3.9 Доказать, что нуль является простым собственным значением интегрального оператора Фредгольма с ядром $K(x,s) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{\sin nx \cdot \sin ns}{n^2}$, действующего в пространстве $h[0,\pi]$,.

3.10 Доказать, что нулевое собственное значение интегрального оператора Фредгольма с ядром $K(x,s) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2nx \cdot \sin 2ns}{(2n)^2}$, действующего в пространстве $h[0,\pi]$, имеет бесконечную кратность.

3.11 Привести пример интегрального оператора Фредгольма, нулевое собственное значение которого имеет конечную кратность.

3.12 Найти характеристические числа и собственные функции однородных уравнений Фредгольма с вырожденными непрерывными симметрическими ядрами в следующих случаях (все характеристические числа - вещественные):

а) $y(x) = \lambda\int\limits_0^{\pi} \cos x \cos s \, y(s)\,ds$;

б) $y(x) = \lambda\int\limits_0^{\pi} \sin x \sin s \, y(s)\,ds$;

в) $y(x) = \lambda\int\limits_0^{\pi} \cos(x+s) \, y(s)\,ds$;

г) $y(x) = \lambda\int\limits_0^{\pi} \cos(x-s) \, y(s)\,ds$;

д) $y(x) = \lambda\int\limits_{-1}^{1} (x+s) \, y(s)\,ds$;

е) $y(x) = \lambda\int\limits_0^{1} xs \, y(s)\,ds$;

ж) $y(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} (xs + x^2 s^2)\, y(s)\, ds$;

з) $y(x) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(x - s))\, y(s)\, ds$.

3.13 Найти характеристические числа и собственные функции уравнений Фредгольма с вырожденными несимметрическими ядрами (характеристические числа необязательно вещественные, и их может не быть вовсе):

а) $y(x) = \lambda \int\limits_{0}^{1} (xs - 2x^2)\, y(s)\, ds$;

б) $y(x) = \lambda \int\limits_{0}^{2\pi} \sin(x - s)\, y(s)\, ds$;

в) $y(x) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} x \cos s\, y(s)\, ds$;

г) $y(x) = \lambda \int\limits_{0}^{\pi} \cos x \sin s\;\, y(s)\, ds$.

Ответы к задачам

3.11 $Ay = \int\limits_{0}^{\pi} K(x,s)\, y(s)\, ds$, где $K(x,s) = \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{n=k}^{\infty} \dfrac{\sin nx \cdot \sin ns}{n^2}$ $\quad (k \ge 2)$.

3.12 а) $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$, $\quad y(x) = C \cos x$;

б) $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$, $\quad y(x) = C \sin x$;

в) $\lambda_1 = \dfrac{2}{\pi}$, $\quad y_1(x) = C \cos x$; $\quad \lambda_2 = -\dfrac{2}{\pi}$, $\quad y_2(x) = C \sin x$;

г) $\lambda = \dfrac{2}{\pi}$, $\quad y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ (ранг характеристического числа равен 2).

д) $\lambda_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad y_1(x) = C(1 + x\sqrt{3})$; $\quad \lambda_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad y_2(x) = C(1 - x\sqrt{3})$;

е) $\lambda = 3$, $\quad y(x) = C\, x$;

ж) $\lambda_1 = \dfrac{3}{2}$, $\quad y_1 = Cx$; $\quad \lambda_2 = \dfrac{5}{2}$, $\quad y_2 = Cx^2$;

з) $\lambda_1 = \dfrac{1}{2\pi}$, $\quad y_1 = C$; $\quad \lambda_2 = \dfrac{1}{\pi}$, $\quad y_2 = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ (ранг λ_2 равен 2).

3.13 а) $\lambda_1 = -6$, $\quad y_1 = C(x - 2x^2)$;

б) $\lambda_1 = \dfrac{i}{\pi}$, $\quad y_1 = Ce^{ix}$; $\quad \lambda_2 = -\dfrac{i}{\pi}$, $\quad y_2 = Ce^{-ix}$;

в) характеристических чисел (и собственных функций) нет;

г) характеристических чисел (и собственных функций) нет.